PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) a) Calcular los límites: $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$.

b) Calcular la integral: $I = \int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} \cdot dx$.

c) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

----

a)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+e^{-\infty}} = \frac{2}{4+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{2}{4+\frac{1}{\infty}} = \frac{2}{4+0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+e^{-(-\infty)}} = \frac{2}{4+e^{\infty}} = \frac{2}{4+\infty} = \frac{2}{\infty} = \underline{\underline{0}}.$$

b)

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} 1+3x^2 = t & x=1 \to t=4 \\ 6xdx = dt & x=0 \to t=1 \\ xdx = \frac{1}{6}dt & \end{array} \right\} \Rightarrow I = I = \frac{1}{6} \cdot \int_1^4 \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{6} \cdot [Lt]_1^4 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (L4 - L1) = \frac{1}{6} \cdot L4 = \frac{1}{6} \cdot L2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot L2 = \underline{\underline{\frac{L2}{3}}} = I.$$

c)

$f(x)=\sqrt{x^2-9x+14}$ está definida para los valores de x tales que $x^2-9x+14\geq 0$.

$$x^2-9x+14=0\ ;;\ x=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{9\pm 5}{2}\Rightarrow \underline{x_1=2}\ ;;\ \underline{x_2=7}.$$

La función $g(x)=x^2-9x+14$ es una parábola convexa $(\cup)$ cuyos puntos de corte con los ejes son A(2, 0) y B(7, 0), teniendo como ordenadas positivas o nulas al conjunto de valores que determinan el dominio de definición de f(x), que es el siguiente:

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow(-\infty,\ 2]\cup[7,\ +\infty)}}$$

La derivada de $f(x)=\sqrt{x^2-9x+14}$ es la siguiente: $f'(x)=\frac{2x-9}{2\cdot\sqrt{x^2-9x+14}}$.

Los valores en que está definida $f'(x)$ son el conjunto de valores de la función $g(x)=x^2-9x+14$ tales que $g(x)>0$, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{f(x)=\sqrt{x^2-9x+14}\ \textit{ es derivable para }\ x\in(-\infty,\ 2)\cup(7,\ +\infty)}}$$

****

2º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$, $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$ y la recta r de ecuaciones continuas $r \equiv \frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z+2}{2}$, se pide:

a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

c) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

----

a) La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$. Los puntos de r tiene la expresión general: $P(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ -2+2\lambda)$.

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Por definición del problema tiene que cumplirse que $d(P,\ \pi_1)=d(P,\ \pi_2)$:

$$\frac{|2\cdot(1+2\lambda)+3\cdot(-1+\lambda)+(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{|2\cdot(1+2\lambda)+1\cdot(-1+\lambda)-3(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} \;;;$$

$$\frac{|2+4\lambda-3+3\lambda-2+2\lambda-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{|2+4\lambda-1+\lambda+6-6\lambda-1|}{\sqrt{1+4+9}} \;;;\; |9\lambda-4|=|-\lambda+6| \Rightarrow \begin{cases} 9\lambda-4=-\lambda+6 \\ 9\lambda-4=\lambda-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\lambda=10 \;;;\; \underline{\lambda_1=1} \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3,\ 0,\ 0)}} \\ \\ 8\lambda=-2 \;;;\; 4\lambda=-1 \Rightarrow \underline{\lambda_2=-\frac{1}{4}} \Rightarrow P_2\left(1-\frac{2}{4},\ -1-\frac{1}{4},\ -2-\frac{2}{4}\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{5}{2}\right)}} \end{cases}.$$

b)

Los puntos de corte con los ejes coordenados del plano $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$ son los siguientes:

Eje X $\Rightarrow \begin{Bmatrix} y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2x-1=0 \;;;\; x=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)}$.

Eje Y $\Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 3y-1=0 \;;;\; y=\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{B\left(0,\ \frac{1}{3},\ 0\right)}$.

Eje Z $\Rightarrow \left.\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow z-1=0$;; $z=1 \Rightarrow \underline{C(0,\ 0,\ 1)}$.

Sabiendo que el volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan; en este caso son $\overrightarrow{u}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$, $\overrightarrow{v}=\left(0,\ \frac{1}{3},\ 0\right)$ y $\overrightarrow{w}=(0,\ 0,\ 1)$.

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\right)=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\underline{\underline{\frac{1}{36}u^3=V_{OABC}}}.$$

c)

Existen diversos procedimientos para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano; uno de ellos es el siguiente: hallamos dos puntos de la recta y por ellos hallamos las rectas perpendiculares al plano; estas rectas cortan al plano en un punto cada una de ellas; la recta que pasa por los puntos de corte es la proyección pedida.

Dos puntos de $r \equiv \frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z+2}{2}$ son A(1, -1, -2) y B(3, 0, 0).

El vector normal del plano $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$ es $\overrightarrow{n}=(2,\ 1,\ -3)$.

Las rectas perpendiculares al plano π_2 por los puntos A y B son $s_A \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}$ y $s_B \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$.

Los puntos de corte de las rectas s_A y s_B con el plano π_2 son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} s_A \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-3\cdot(-2-3\lambda)-1=0 \ ;;$$

$$2+4\lambda-1+\lambda+6+9\lambda-1=0 \ ;; \ 14\lambda+6=0 \ ;; \ 7\lambda=-3 \Rightarrow \underline{\lambda=-\frac{3}{7}} \Rightarrow \underline{A'\left(\frac{1}{7},\ -\frac{10}{7},\ -\frac{5}{7}\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} s_B \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(3+2\lambda)+\lambda-3\cdot(-3\lambda)-1=0 \ ;; \ 6+4\lambda+\lambda+9\lambda-1=0 \ ;;$$

$$14\lambda+5=0 \Rightarrow \underline{\lambda=-\frac{5}{14}} \Rightarrow \underline{B'\left(\frac{32}{14},\ -\frac{5}{14},\ \frac{15}{14}\right)}.$$

Los puntos A’ y B’ determinan el vector $\overrightarrow{A'B'}=B'-A'=\left(\frac{30}{14},\ \frac{15}{14},\ \frac{25}{14}\right)$.

Un vector director de la recta pedida s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{A'B'}=\left(\frac{30}{14},\ \frac{15}{14},\ \frac{25}{14}\right)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s}=(6,\ 3,\ 5)$.

Considerando un punto de s, por ejemplo $A'\left(\frac{1}{7},\ -\frac{10}{7},\ -\frac{5}{7}\right)$, la expresión dada por unas ecuaciones continuas de la recta s es la siguiente:

$$s\equiv\frac{x-\frac{1}{7}}{6}=\frac{y+\frac{10}{7}}{3}=\frac{z+\frac{5}{7}}{5}\ ;;\ \frac{7x-1}{42}=\frac{7y+10}{21}=\frac{7z+5}{35} \Rightarrow \underline{\underline{s\equiv\frac{7x-1}{6}=\frac{7y+10}{3}=\frac{7z+5}{5}}}.$$

Otra forma de obtener la recta s es la siguiente: determinamos un plano α que contenga a r y sea perpendicular al plano π_2; la intersección de los planos α y π_2 determinan la recta pedida s.

El plano α tiene como vectores directores al vector normal de π_2 y al vector director de r, que son $\overrightarrow{n}=(2,\ 1,\ -3)$ y $\overrightarrow{v_r}=(2,\ 1,\ 2)$, respectivamente.

Considerando el punto de r, P(1, -1, -2), la expresión general del plano α es la siguiente: $\alpha(P;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v_r})\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0\ ;;$

$$2(x-1)-6(y+1)+2(z+2)-2(z+2)+3(x-1)-4(y+1)=0\ ;;\ 5(x-1)-10(y+1)=0\ ;;$$

$$x-1-2(y+1)=0\ ;;\ x-1-2y-2=0 \Rightarrow \underline{\alpha\equiv x-2y-3=0}.$$

$$\underline{\underline{s\equiv\begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}}}.$$

Expresada por unas ecuaciones continuas es:

$$s\equiv\begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda}\ ;;\ \underline{x=3+2\lambda}\ ;;\ 3z=2x+y-1=6+4\lambda+\lambda-1=5\lambda+5\ ;;$$

$$\underline{z=\tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{3}\lambda} \Rightarrow \underline{s\equiv\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\lambda \end{cases}} \Rightarrow \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\ ;;\ \underline{\underline{s\equiv\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{3z-5}{5}}}.$$

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: hallando el haz de planos que contienen a la recta r; haciendo que su vector normal sea perpendicular al vector normal del plano π_2 obtenemos un plano β; la intersección de los planos π_2 y β determinan a la recta s pedida.

La expresión de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x-1=2y+2 \\ x-1=z+2 \end{cases} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x-2y-3=0 \\ x-z-3=0 \end{cases}}$.

El haz de planos que contienen a r es $\gamma \equiv x-2y-3+\lambda(x-z-3)=0$, que también puede expresarse de la forma $\gamma \equiv (1+\lambda)x-2y-\lambda z-(3+3\lambda)=0$, cuyo vector normal es el siguiente: $\overrightarrow{v_\gamma} = (1+\lambda,\ -2,\ -\lambda)$.

El vector normal de $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$ es $\overrightarrow{n_2} = (2,\ 1,\ -3)$.

$\overrightarrow{v_\gamma} \perp \overrightarrow{n_2} \Rightarrow (1+\lambda,\ -2,\ -\lambda)\cdot(2,\ 1,\ -3)=0$;; $2+2\lambda-2+3\lambda=0$;; $5\lambda=0$;; $\underline{\lambda=0}$.

El plano del haz γ que es perpendicular a π_2 es el siguiente: $\beta \equiv x-2y-3=0$.

La recta pedida es $s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$. Expresada por unas ecuaciones continuas es como sigue:

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \;;;\; \underline{x=3+2\lambda} \;;;\; 3z=2x+y-1=6+4\lambda+\lambda-1=5+5\lambda \;;;$$

$$\underline{z=\tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{3}\lambda} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\lambda \end{cases}} \Rightarrow \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \;;;\; \underline{\underline{s \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{3z-5}{5}}}.$$

Nótese que, aunque las expresiones son diferentes, se trata de la misma recta.

****

3º) Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro α.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2+F_1 \\ F_3 \to F_3-2F_1 \\ F_4 \to F_4-(a+2)F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & a-2 \\ 0 & -6 & 4-a \\ 0 & -3a-6 & 3a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2+F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 4-a \\ 0 & -3a-6 & 3a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 4-a \\ 0 & -3a-6 & 3a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_3 \to F_3+6F_2 \\ F_4 \to F_4+(3a+6)F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2-a \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \leftrightarrow F_4\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2-a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\mathit{Rango}\ \ A=3,\ \forall a \in R}}\ .$$

****

4º) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} sen\ x & \cos x & 0 \\ \cos x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz M.

b) Hallar la matriz M^2.

c) Hallar la matriz M^{25}.

----

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} sen\ x & \cos x & 0 \\ \cos x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -sen^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{Rango\ M = 3}}.$$

b)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} sen\ x & \cos x & 0 \\ \cos x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sen\ x & \cos x & 0 \\ \cos x & -sen\ x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} sen^2 x + \cos^2 x + 0 & sen\ x \cdot \cos x - \cos x \cdot sen\ x + 0 & 0+0+0 \\ \cos x \cdot sen\ x - sen\ x \cdot \cos x & \cos^2 x + sen^2 x + 0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I = M^2}}.$$

c)

$$M^{25} = M^{12 \cdot 2+1} = \left(M^2\right)^{12} \cdot M = I^{12} \cdot M = I \cdot M = \underline{\underline{M = M^{25}}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el punto P(0, 1, 1) y las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, se pide:

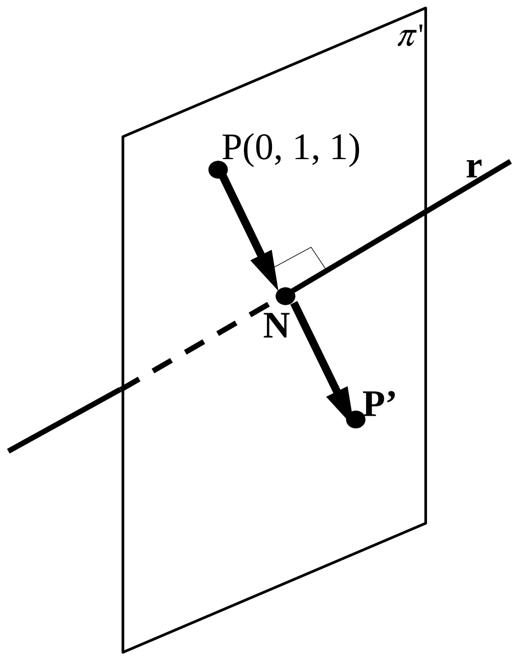
a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

b) Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

----

a)

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ -1)$.



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = -k \end{cases}$.

El plano π', perpendicular a r por P(0, 1, 1), es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v}$ y contiene al punto P:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y - z + D = 0 \\ P(0,\ 1,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 1 - 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = 0} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{\pi' \equiv 2x + y - z = 0}.$$

Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura adjunta de forma aproximada.

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y - z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = -k \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2k) + (-1 + k) - (-k) = 0 \ ;;\ 2 + 4k - 1 + k + k = 0 \ ;;\ 6k = -1 \ ;;$$

$$\underline{k = -\frac{1}{6}} \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \\ y = -1 - \frac{1}{6} = -\frac{7}{6} \\ z = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \ \underline{N\left(\frac{2}{3},\ -\frac{7}{6},\ \frac{1}{6}\right)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N \;;;\; \left(\frac{2}{3},\ -\frac{7}{6},\ \frac{1}{6}\right) - (0,\ 1,\ 1) = (x,\ y,\ z) - \left(\frac{2}{3},\ -\frac{7}{6},\ \frac{1}{6}\right) \;;;$$

$$\left(\frac{2}{3},\ -\frac{13}{6},\ -\frac{5}{6}\right) = \left(x - \frac{2}{3},\ y + \frac{7}{6},\ z - \frac{1}{6}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \underline{x = \frac{4}{3}} \\ y + \frac{7}{6} = -\frac{13}{6} \rightarrow \underline{y = -\frac{10}{3}} \\ z - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} \rightarrow \underline{z = -\frac{2}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(\frac{4}{3},\ -\frac{10}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}}.$$

b)

El haz de planos α perpendiculares a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ tiene como vector normal al vector director de r, que es $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ -1)$. La expresión general de α es la siguiente: $\alpha \equiv 2x + y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz $\alpha \equiv 2x + y - z + D = 0$, el plano μ que contiene al punto P(0, 1, 1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y - z + D = 0 \\ P(0,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 1 + D = 0 \;;;\; \underline{D = 0} \Rightarrow \underline{\mu \equiv 2x + y - z = 0}.$$

El punto Q de corte de la recta s con el plano μ es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ \mu \equiv 2x + y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow z = 0 \quad \Rightarrow \underline{Q(0,\ 0,\ 0)}.$$

La recta t pedida es la que pasa por los puntos P(0, 1, 1) y Q(0, 0, 0), cuya expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{\underline{t \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda,\ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{array}\right.}}}$.

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+4y=4k \\ -k^3x+k^2y+kz=0 \\ x+ky=k^2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) Resolver el sistema para k = 1.

c) Resolver el sistema para k = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4k \\ -k^3 & k^2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix}=4k-2k^2=2k(2-k)=0 \Rightarrow \underline{k_1=0} \ ;; \ \underline{k_2=2}.$$

$$\underline{Para \ \begin{Bmatrix} k\neq 0 \\ k\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M' = 3 = n^o \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ Deter\min ado}$$

$$Para \ k=0 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \ M = Rango \ M' = 2}.$$

$$Para \ k=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=2F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \ M'=2}.$$

$$\underline{Para \ \begin{Bmatrix} k=0 \\ k=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M' = 2 < n^o \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ In\det er\min ado}$$

b)

Resolvemos para k = 1. El sistema resulta $\begin{cases} 2x+4y=4 \\ -x+y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolvemos:

$\begin{cases} x+2y=2 \\ -x+y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow$ De las ecuaciones primera y tercera se deduce que x = 0 e y = 1.

Sustituyendo en la segunda: $-0+1+z=0$;; $z=-1$.

$$\underline{\underline{Solución: \{x=0 \ ;; \ y=1 \ ;; \ z=-1\}}}$$

c)

Resolvemos para k = 2. El sistema resulta $\begin{cases} 2x+4y=8 \\ -8x+4y+2z=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} -4x+2y+z=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$ que es compatible determinado.

$\begin{cases} -4x+2y+z=0 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda}$;; $\underline{x=4-2\lambda}$;; $z=4x-2y=16-8\lambda-2\lambda=\underline{16-10\lambda=z}$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=4-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=16-10\lambda \end{cases} , \ \forall \lambda \in R}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ \ x<0 \\ k & si\ \ x=0 \\ \dfrac{\cos\ x-1}{sen\ x} & si\ \ x>0 \end{cases}$, hallar el valor de k para que f sea continua en x = 0. Justificar la respuesta.

Para que la función f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=0\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=\underline{0} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\ x-1}{sen\ x}=\underline{0}\ \ (*) \end{array} \right\}.$$

$$(*)\ \ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\ x-1}{sen\ x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\ \Rightarrow\ In\det er.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-sen\ x}{\cos\ x}=$$

$$=\frac{-0}{1}=\underline{0}.$$

Teniendo que ser $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$:

<u>La función f(x) es continua para x = 0 para el valor de k = 0.</u>

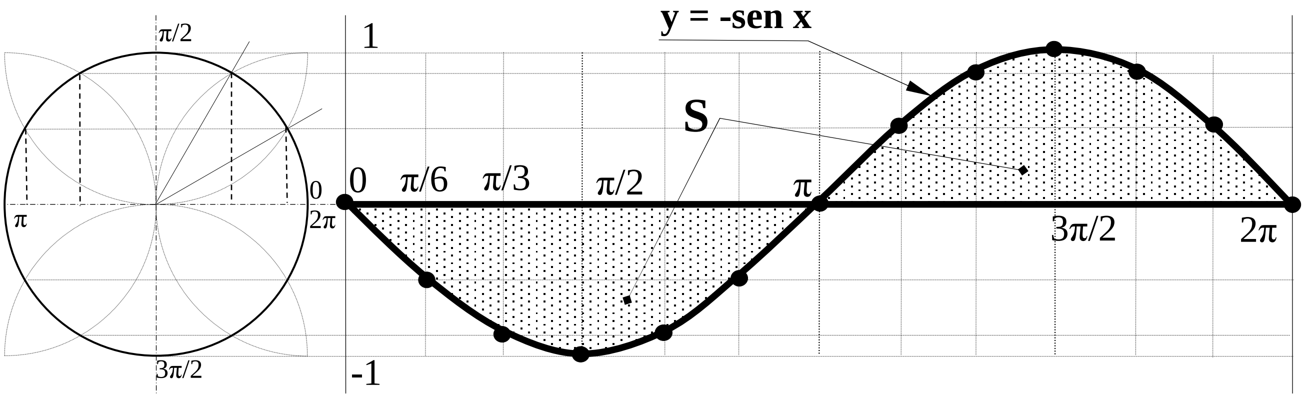
****

4º) a) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -sen\ x$ y el eje OX entre las abscisas x = 0 y x = 2π.

b) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -sen\ x$ alrededor del eje OX entre loas abscisas x = 0 y x = 2π.

----

a)



La gráfica de la función $f(x) = -sen\ x$ es la de la figura, de la cual se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S = \int_{\pi}^{0} -sen\ x \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} -sen\ x \cdot dx = [\cos x]_{\pi}^{0} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = (\cos 0 - \cos \pi) + (\cos 2\pi - \cos \pi) =$$

$$= 1 - (-1) + 1 - (-1) = \underline{\underline{4\ u^2 = S}}.$$

b)

Sabiendo que el volumen de un cuerpo de revolución engendrado al girar la curva f(x) alrededor del eje de abscisas limitado por x = a y x = b viene dado por la expresión integral $V = \pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2 \cdot dx$, el volumen pedido es el siguiente:

$$V = \pi \int_{0}^{2\pi} (-sen\ x)^2 \cdot dx = 2\pi \cdot \int_{0}^{\pi} sen^2\ x \cdot dx = 2\pi \cdot \int_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot dx = \pi \int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2x) =$$

$$= \pi \int_{0}^{\pi} dx + \pi \int_{0}^{\pi} \cos 2x \cdot dx = \underline{I_1 + I_2 = V}. \qquad (*)$$

$$I_1 = \pi \int_{0}^{\pi} dx = [x]_{0}^{\pi} = \pi(\pi - 0) = \underline{\pi^2\ u^3 = I_1}.$$

$$I_2 = \pi \int_{0}^{\pi} \cos 2x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} 2x = t & x = \pi \rightarrow t = 2\pi \\ dx = \frac{1}{2} dt & x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \cos t \cdot dt = \frac{\pi}{2} \cdot [sen\ t]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot (sen\ 4\pi - sen\ 0) = \frac{\pi}{2} \cdot (0 - 0) = \underline{0}.$$

Sustituyendo los valores de I_1 e I_2 en la expresión (*):

$$\underline{\underline{V = \pi^2\, u^3}}$$

****