PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2010 (ESPECÍFICO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

OPCIÓN A

1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando propiedades de los determinantes, calcular:

a) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$.

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$.

----

a)

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4\right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}\right)^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = \underline{\underline{1296}}$$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{90}}$

c) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 0 & 2\beta & 2\gamma \\ 6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = A+B \qquad (*)$.

$$A = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\alpha & 4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & 0 & \gamma+3 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 3\alpha & 4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & 0 & \gamma+3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3\alpha & 4 & 3\gamma \\ 2\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & 0 & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3\alpha & 4 & 6 \\ 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 3\alpha & 4 & 6 \\ 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12\alpha \cdot (2) = \underline{24\alpha = A}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 0 & 2\beta & 2\gamma \\ 6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3\beta & 3\gamma+6 \\ 0 & 2\beta & 2\gamma \\ 6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3\gamma+6 \\ 0 & 0 & 2\gamma \\ 6 & 0 & \gamma+3 \end{vmatrix} = M+N \qquad (**)$$

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 3\beta & 3\gamma+6 \\ 0 & 2\beta & 2\gamma \\ 6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3\beta & 3\gamma \\ 0 & 2\beta & 2\gamma \\ 6 & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3\beta & 6 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ 6 & \beta & 3 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 2 & 3\beta & 6 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ 6 & \beta & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \beta \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\beta \cdot (2-12) = \underline{-60\beta = M}$$

$$N = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3\gamma+6 \\ 0 & 0 & 2\gamma \\ 6 & 0 & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3\gamma \\ 0 & 0 & 2\gamma \\ 6 & 0 & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \gamma \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 8\gamma \cdot (6) = \underline{48\gamma = M}$$

Sustituyendo en (**) los valores de M y N: $B = M + N = \underline{-60\beta + 48\gamma = B}$.

Por último, sustituyendo en (*) los valores de A y B:

$$\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = A+B = 24\alpha - 60\beta + 48\gamma = \underline{\underline{12(2\alpha - 5\beta + 4\gamma)}}.$$

****

2º) Dada la recta $r \equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ y el punto P(2, 0, -1), se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.

----

a)

La distancia de un punto P a una recta r viene dada por la siguiente fórmula: $d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo Q un punto de la recta r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de la recta r.

Un punto de la recta r es Q(-1, 2, -1) y un vector director de r es $\overrightarrow{v}=(-2,\ 1,\ 3)$.

$$\overrightarrow{QP}=P-Q=(2,\ 0,\ -1)-(-1,\ 2,\ -1)=\underline{(3,\ -2,\ 0)=\overrightarrow{QP}}$$

$$d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}=\frac{|-6i+3k-4k-9i|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{|-6i-9j-k|}{\sqrt{14}}=\frac{|6i+9j+k|}{\sqrt{14}}=$$

$$=\frac{\sqrt{6^2+9^2+1^2}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{36+81+1}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{128}{14}}=\sqrt{\frac{64}{7}}=\frac{8}{\sqrt{7}}=\underline{\underline{\frac{8\sqrt{7}}{7}\ unidades=d(P,\ r)}}$$

b)

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente:

$$r\equiv\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{r\equiv\begin{cases} x=-1-2k \\ y=2+k \\ z=-1+3k \end{cases}}\ \Rightarrow\ \underline{\overrightarrow{v}=(-2,\ 1,\ 3)}$$

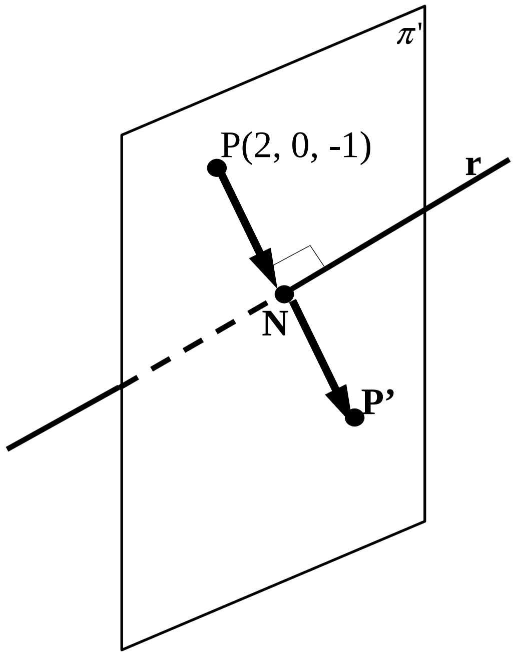
El plano π', perpendicular a r por P(2, 0, -1), es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v}$ y contiene al punto P:

$$\left.\begin{array}{l} \pi'\equiv -2x+y+3z+D=0 \\ P(2,\ 0,\ -1) \end{array}\right\}\Rightarrow -2\cdot 2+0+3\cdot(-1)+D=0\ ;;\ \underline{D=7}\ \Rightarrow\ \underline{\pi'\equiv -2x+y+3z+7=0}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\pi' \equiv -2x+y+3z+7=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-1-2k \\ y=2+k \\ z=-1+3k \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \ -2(-1-2k)+(2+k)+3(-1+3k)+7=0 \ ;;$$

$$2+4k+2+k-3+9k+7=0 \ ;; \ 14k=-8 \ ;; \ \underline{k=-\frac{4}{7}} \ \Rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} x=-1+\frac{8}{7}=\frac{1}{7} \\ y=2-\frac{4}{7}=\frac{10}{7} \\ z=-1-\frac{12}{7}=-\frac{19}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \underline{N\left(\frac{1}{7},\ \frac{10}{7},\ -\frac{19}{7}\right)}$$



Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura adjunta de forma aproximada.

Para que P’ sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP'} \ \Rightarrow \ N-P=P'-N \ ;;$$

$$\left(\frac{1}{7},\ \frac{10}{7},\ -\frac{19}{7}\right)-(2,\ 0,\ -1)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{1}{7},\ \frac{10}{7},\ -\frac{19}{7}\right) ;;$$

$$\left(-\frac{13}{7},\ \frac{10}{7},\ -\frac{12}{7}\right)=\left(x-\frac{1}{7},\ y-\frac{10}{7},\ z+\frac{19}{7}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{7}=-\frac{13}{7} \ \rightarrow \ \underline{x=-\frac{12}{7}} \\ y-\frac{10}{7}=\frac{10}{7} \ \rightarrow \ \underline{y=\frac{20}{7}} \\ z+\frac{19}{7}=-\frac{12}{7} \ \rightarrow \ \underline{z=-\frac{31}{7}} \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P'\left(-\frac{12}{7},\ \frac{20}{7},\ -\frac{31}{7}\right)}}$$

****

3º) Hallar: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25}$. b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}}$.

----

a)

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{25} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[3]{\frac{-8x^3+5x+3}{(2x+1)^3}} \right]^{25} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[3]{\frac{-8x^3+5x+3}{8x^3+12x^2+6x+1}} \right]^{25} = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[3]{\frac{-8+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{8+\frac{12}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}}} \right]^{25} = \left[\sqrt[3]{\frac{-8+\frac{5}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{8+\frac{12}{\infty}+\frac{6}{\infty}+\frac{1}{\infty}}} \right]^{25} =$$

$$= \left[\sqrt[3]{\frac{-8+0+0}{8+0+0+0}} \right]^{25} = \left[\sqrt[3]{-1}\right]^{25} = (-1)^{25} = \underline{\underline{-1}}$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}} = \infty^{\frac{2}{\infty}} = \infty^0 \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}} = A \;;;\; L\,A = L\left[\lim_{x \to +\infty} \left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[L\left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{x^2} \cdot L\left(1+4x^3\right) \right] = 2 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{L\left(1+4x^3\right)}{x^2} = 2 \cdot \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow 2 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{12x^2}{1+4x^3}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^2}{x+4x^4} = 0 = L\,A \Rightarrow \underline{A = e^0 = 1}$$

$$\underline{\underline{\lim_{x \to +\infty} \left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}} = 1}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=L\left(x^2+4x-5\right)$, donde L indica logaritmo neperiano, se pide:

a) Determinar el dominio de definición de f(x) y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

----

a)

Por tratarse de una función logarítmica, su dominio de definición es aquél que haga que los valores de $\left(x^2+4x-5\right)$ pertenezcan a R^+.

$$x^2+4x-5>0 \;;;\; x^2+4x-5=0 \;;;\; x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}=-2\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5 \\ \underline{x_2=1} \end{cases}.$$

Por ser la función $y=x^2+4x-5$ una parábola convexa $(\cup)$ que corta al eje OX en los puntos de abscisa x = -5 y x = 1, en el intervalo $(-5,\ 1)$ sus ordenadas son negativas, por lo que el dominio de definición de f(x) es el siguiente:

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow(-\infty,\ -5)\cup(1,\ +\infty)}}$$

Las asíntotas verticales son los límites laterales de los extremos del intervalo para el cual no está definida la función, que es $(-5,\ 1)$.

$$\underset{x\to -5^-}{Lím} f(x)=\underset{x\to -5^-}{Lím}\left[L\left(x^2+4x-5\right)\right]=L\,0^+=-\infty\ .$$

$$\underset{x\to 1^+}{Lím} f(x)=\underset{x\to 1^+}{Lím}\left[L\left(x^2+4x-5\right)\right]=L\,0^+=-\infty\ .$$

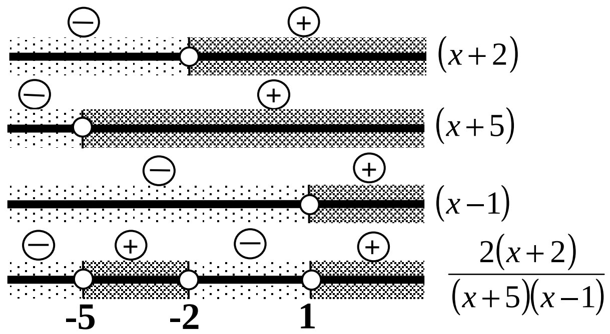
<u>Son asíntotas verticales las rectas x = -5 y x = 1. con las tendencias indicadas.</u>

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x-5}=\frac{2(x+2)}{(x+5)(x-1)}\ .$$

Teniendo en cuenta el dominio de definición de la función y es esquema adjunto:



$$\underline{\underline{Decreciente:\ (-\infty,\ -5)}} \;;;\; \underline{\underline{Creciente:\ (1,\ +\infty)}}$$

****

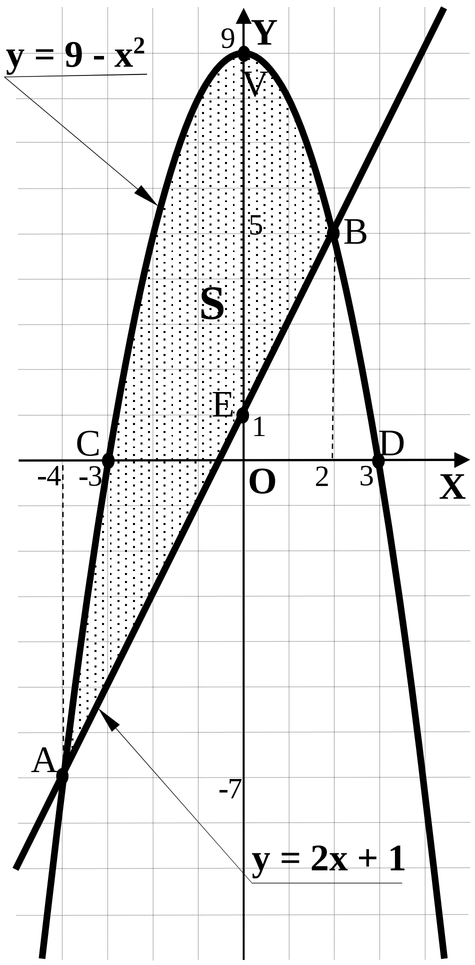
OPCIÓN B

1º) Dadas las funciones $y = 9 - x^2$, $y = 2x + 1$, se pide:

a) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

b) Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.



a)

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 9 - x^2 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 - x^2 = 2x + 1 \;;;\; x^2 + 2x - 8 = 0 \;;;$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \rightarrow \underline{A(-4,\ -7)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{B(2,\ 5)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes de la parábola son los siguientes:

$$Eje\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow \underline{C(-3,\ 0)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{D(3,\ 0)} \end{cases}$$

$$Eje\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 9 \rightarrow \underline{V(0,\ 9)}$$

La recta corta al eje de ordenadas en <u>E(0, 1)</u>.

La representación gráfica, aproximada, es la indicada en la figura.

b)

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que las ordenadas de la recta son iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la parábola.

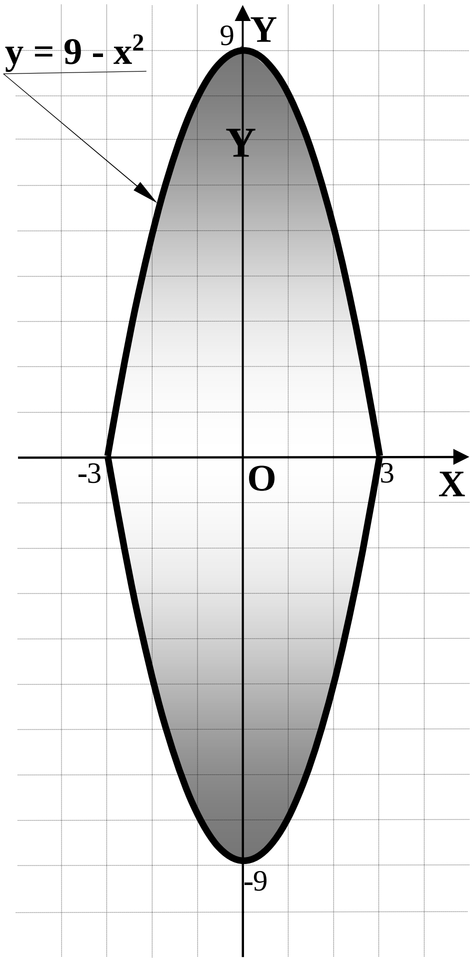
$$S = \int_{-4}^{2} \left[(9 - x^2) - (2x + 1)\right] \cdot dx = \int_{-4}^{2} \left(-x^2 - 2x + 8\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 8x\right]_{-4}^{2} = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} =$$

$$=\left(-\frac{2^3}{3}-2^2+8\cdot 2\right)-\left[-\frac{(-4)^3}{3}-(-4)^2+8\cdot(-4)\right]=-\frac{8}{3}-4+16-\frac{64}{3}+16+32=60-\frac{72}{3}=60-24=$$

$$=\underline{\underline{36\ u^2=S}}$$

c)

El volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y=9-x^2$ y el eje OX es el indicado en la figura.



Sabiendo que el volumen engendrado por una función f(x) al girar en torno al eje OX entre los valores reales a y b, viene dado por la expresión:

$V=\int_a^b 2\pi\cdot[f(x)]^2\cdot dx$, sería, en el cas que nos ocupa:

$$V=\int_{-3}^{3}\pi(9-x)^2\,dx=\pi\int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)^2dx=\pi\int_{-3}^{3}\left(81-18x^2+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left[81x-\frac{18x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3}=\pi\left[81x-6x^3+\frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3}=$$

$$=\pi\left(81\cdot 3-6\cdot 3^3+\frac{3^5}{5}\right)-\pi\left[81\cdot(-3)-6\cdot(-3)^3+\frac{(-3)^5}{5}\right]=$$

$$=\pi\left(243-162+\frac{243}{5}\right)-\pi\left(-243+162-\frac{243}{5}\right)=$$

$$=\pi\left(81+\frac{243}{5}\right)-\pi\left(-81-\frac{243}{5}\right)=2\pi\left(81+\frac{243}{5}\right)=2\pi\cdot\frac{405+243}{5}=2\pi\cdot\frac{648}{5}=\underline{\underline{\frac{1296}{5}\pi\ u^3=V}}$$

****

2º) Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta $r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$, se pide:

a) Calcular los valores de α para los que la recta r está contenida en el plano π.

b) Para el valor de α = -2, hallar el punto (o los puntos) que pertenezcan a la recta s perpendicular a π que pasa por P(-3/2, 0, -11/2), y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades del plano π.

c) Para α = -2, halla el seno del ángulo que forman r y π.

----

a)

La recta r puede expresarse por dos ecuaciones implícitas:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 2 = y - 1 \\ 5x + 5 = z + 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 5x - z = -2 \end{cases}}.$$

Para que la recta r esté contenida en el plano π es necesario que el sistema que forman tenga infinitas soluciones, o sea, que sea compatible indeterminado.

El sistema de ecuaciones que forman la recta r y el plano es π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0 \\ \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 5x - z = -2 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x + ay + 4z = -25 \\ 2x - y = -3 \\ 5x - z = -2 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M' = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 & -25 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea compatible determinado, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de ambas matrices tienen que ser 2.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 20 + 2a = 0 \;;;\; 2a = -22 \;;;\; \underline{a = -11}.$$

Para α = -11 la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 4 & -25 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo rango tiene que ser, necesariamente, dos, cosa que comprobamos a continuación.

$$\left.\begin{array}{l}\{C_1,\ C_2,\ C_4\}=\begin{vmatrix}2 & -11 & -25\\ 2 & -1 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=4+165-125-44=169-169=0\\ \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\}=\begin{vmatrix}2 & 4 & -25\\ 2 & 0 & -3\\ 5 & -1 & -2\end{vmatrix}=50-60-6+16=66-66=0\\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\}=\begin{vmatrix}-11 & 4 & -25\\ -1 & 0 & -3\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=-25+33-8=0\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2,\ c.q.c.}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ que\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ contenga\ \ a\ \ la\ \ recta\ \ r\ \ tiene\ \ que\ \ ser\ \ a=-11}}$$

b)

Para α = -2 el plano es $\pi \equiv 2x-2y+4z+25=0$.

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 2)$.

La recta s tiene a $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 2)$ como vector director y su ecuación expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r\equiv\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-\frac{11}{2}+2\lambda\end{cases}$.

El punto M de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv 2x-2y+4z+25=0\\ r\equiv\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-\frac{11}{2}+2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{3}{2}+\lambda\right)-2\cdot(-\lambda)+4\cdot\left(-\frac{11}{2}+2\lambda\right)+25=0\ ;;$$

$$-3+2\lambda+2\lambda-22+8\lambda+25=0\ ;;\ 12\lambda=0\ ;;\ \underline{\lambda=0}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{M\left(-\frac{3}{2},\ 0,\ -\frac{11}{2}\right)}.$$

Los puntos de la recta r tienen la expresión $Q\left(-\frac{3}{2}+\lambda,\ -\lambda,\ -\frac{11}{2}+2\lambda\right)$. Los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a la recta r y que distan $\sqrt{6}$ unidades del plano π son los que se determinan a continuación.

$$\left|\overrightarrow{MQ}\right|=\sqrt{6}\ \Rightarrow\ \sqrt{\left(-\frac{3}{2}+\lambda+\frac{3}{2}\right)^2+(-\lambda-0)^2+\left(-\frac{11}{2}+2\lambda+\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{6}\ ;;\ \sqrt{\lambda^2+(-\lambda)^2+(2\lambda)^2}=\sqrt{6}\ ;;$$

$$\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2=6\ ;;\ 6\lambda^2=6\ ;;\ \lambda^2=1\ \Rightarrow\ \underline{\lambda_1=-1}\ ;;\ \underline{\lambda_2=1}.$$

$$Q\left(-\frac{3}{2}+\lambda,\ -\lambda,\ -\frac{11}{2}+2\lambda\right)\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\ \rightarrow\ Q_1\left(-\frac{3}{2}-1,\ -(-1),\ -\frac{11}{2}-2\right)\ \rightarrow\ \underline{\underline{Q_1\left(-\frac{5}{2},\ 1,\ -\frac{15}{2}\right)}}\\ \\ \lambda=1\ \rightarrow\ Q_2\left(-\frac{3}{2}+1,\ +(-1),\ -\frac{11}{2}+2\right)\ \rightarrow\ \underline{\underline{Q_2\left(-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{7}{2}\right)}}\end{cases}$$

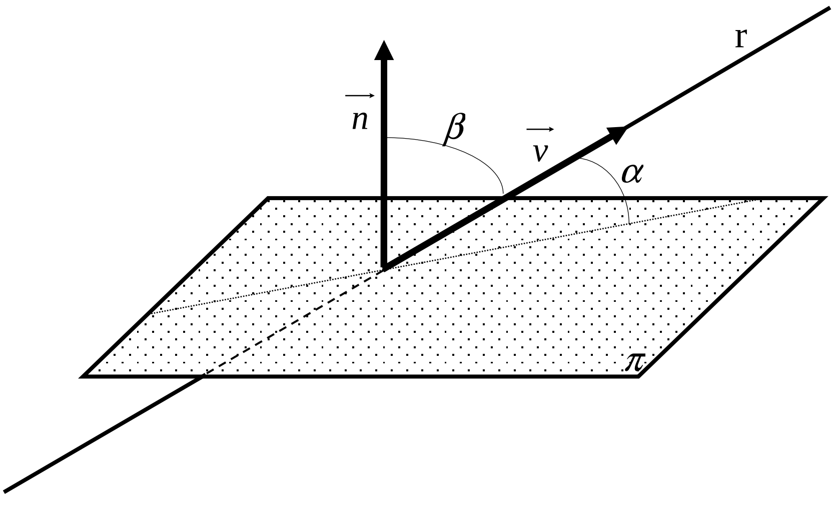
c)

El ángulo α que forman el plano $\pi\equiv 2x-2y+4z+25=0$ y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector $\overrightarrow{v}$ director de r y el vector $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 2)$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\cos\beta\ \Rightarrow\ \cos\beta=\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



Un vector director de $r\equiv x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{5}$ es $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ 5)$.

$$\cos\beta=sen\ \alpha=\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{(1,\ 2,\ 5)\cdot(1,\ -1,\ 2)}{\sqrt{1^2+2^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1-2+10}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{6}}=\frac{9}{\sqrt{180}}=\frac{9}{6\sqrt{5}}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{10}=sen\ \alpha}}$$

****

3º) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+my+3z=3 \\ x+y-2z=0 \\ 5x+(m+1)y+z=9 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores de m.

b) Resolver el sistema para el caso de m = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & m+1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función de m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & m+1 & 1 \end{vmatrix}=2+3(m+1)-10m-15+4(m+1)-m=0 \;;\; 7(m+1)-11m-13=0 \;;.$$

$$7m+7-11m-13=0 \;;\; -4m-6=0 \;;\; 2m+3=0 \;;\; \underline{m=-\frac{2}{3}}.$$

Para $m=-\frac{2}{3}$ es $A'=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & \frac{5}{3} & 1 & 9 \end{pmatrix}$, equivalente a efectos de rango a la siguiente matriz: $A'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

El rango de A' es el siguiente:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}=18+5-15-6=23-21=2\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq -\frac{2}{3} \Rightarrow Rango\ \ A=Rango\ \ A'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=-\frac{2}{3} \Rightarrow Rango\ \ A=2 \;;\; Rango\ \ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Para m = 0 resulta el sistema $\begin{cases} 2x+3z=3 \\ x+y-2z=0 \\ 5x+y+z=9 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{3-27+6}{-6}=\frac{-18}{-6}=\underline{3=x} \;;;\; y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{27-30+36-3}{-6}=\frac{30}{-6}=\underline{-5=y} \;;;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{18+3-15}{-6}=\frac{6}{-6}=\underline{-1=z}\,.$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \\ z=-1 \end{cases}}}$$

****

4º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$, estudiar para qué valores de α tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

Para que una matriz sea inversible es condición necesaria que su determinante no sea nulo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha.$$

La matriz A es inversible para cualquier valor real de α que sea distinto de cero.

La matriz traspuesta de A es la siguiente: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

$$Adj\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha^2 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ A^T}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha^2 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\alpha}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\alpha^2}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}=A^{-1}}}$$

****