

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2009**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permitirá el uso de calculadoras gráficas.

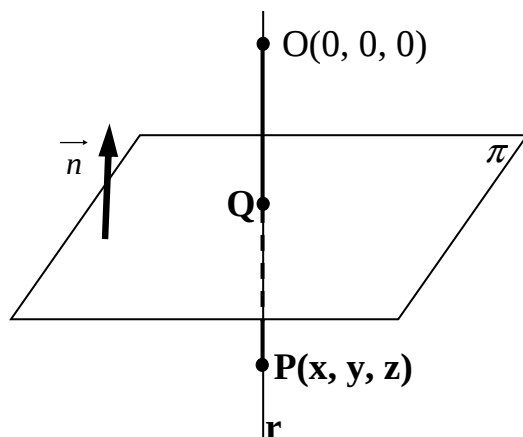
OPCIÓN A

1º) Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide:

- a) El punto P simétrico de O(0, 0, 0) respecto del plano π .
- b) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.
- c) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

a)

Un vector normal al plano π es: $\vec{n} = (1, 3, 1)$.



La recta r es la que pasa por el punto O y es perpendicular al plano π , por lo tanto su vector director puede ser el vector $\vec{n} = (1, 3, 1)$, normal del plano π ; su ecuación es:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto Q, intersección del plano π con la recta r , tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv x + 3y + z - 4 = 0 \\ r &\equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda + 3\lambda + \lambda - 4 = 0 \;; \; 4\lambda - 4 = 0 \;; \; \lambda - 1 = 0 \;; \; \lambda = 1 \Rightarrow \underline{Q(1, 1, 1)}$$

Para que P sea el punto simétrico de O con respecto a π , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} \Rightarrow (x, y, z) = 2 \cdot (1, 1, 1) = (2, 2, 2) \Rightarrow \underline{\underline{P(2, 2, 2)}}$$

b)

El vector normal al plano $x = 0$ es $\vec{u} = (1, 0, 0)$.

El ángulo α que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales, por lo tanto, el ángulo que forman los planos $\pi \equiv x + 3y + z = 4$ y $x = 0$ es el que forman los vectores $\vec{n} = (1, 3, 1)$ y $\vec{u} = (1, 0, 0)$.

Por el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, 0, 0) \cdot (1, 3, 1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \\ &= \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{\underline{\underline{11}}} = \cos \alpha \end{aligned}$$

c)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$ con los ejes X, Y, Z, respectivamente, son los siguientes: $A(4, 0, 0)$, $B(0, \frac{4}{3}, 0)$ y $C(0, 0, 4)$.

$$\text{El tetraedro T lo definen los vectores} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{OA} = (4, 0, 0) \\ \vec{b} = \overrightarrow{OB} = (0, \frac{4}{3}, 0) \\ \vec{c} = \overrightarrow{OC} = (0, 0, 4) \end{cases}$$

Sabiendo que el volumen de un paralelepípedo es, en valor absoluto, el producto mixto de los vectores que lo determinan y que el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo, el volumen pedido es el siguiente:

$$V_T = \frac{1}{6} \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left| 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 \right| = \frac{64}{18} = \underline{\underline{\frac{32}{9} u^3 = V_T}}$$

2º) Dado el sistema $\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \lambda (4 + 8\lambda - 16\lambda^2 - 8 + 16\lambda - 4\lambda^2) = \lambda (-20\lambda^2 + 24\lambda - 4) = \\ &= -4\lambda (5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \text{ ; ; } \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10} = \frac{3 \pm 2}{5} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lambda_2 = \frac{1}{5}} \\ \underline{\lambda_3 = 1} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Para } \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq \frac{1}{5} \\ \lambda \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1 = 2C_3\} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } \lambda = \frac{1}{5} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & \frac{4}{5} & 2 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^3} \cdot \begin{vmatrix} 20 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{125} \cdot (900 + 8 + 16 - 40 - 80 - 36) =$$

$$= \frac{1}{125} \cdot (924 - 1566) \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -36 + 2 + 8 + 8 - 4 - 18 =$$

$$= 18 - 58 = -40 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{1}{5} \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \ ; \ ; \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

$$\text{Para } \lambda = -1 \text{ el sistema es } \begin{cases} 4x - 4y + 2z = -2 \\ -x + y + z = -1 \\ -4x - 4y - z = 9 \end{cases}, \text{ que es compatible determinado. Re-}$$

solvemos mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2 + 8 - 36 - 18 - 8 + 4}{-4 + 8 + 16 + 8 + 16 + 4} = \frac{6 - 54}{48} = -\frac{48}{48} = \underline{\underline{-1 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 9 & -1 \end{vmatrix}}{48} = \frac{4 - 18 + 8 - 8 - 36 + 2}{48} = \frac{6 - 54}{48} = -\frac{48}{48} = \underline{\underline{-1 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 9 \end{vmatrix}}{48} = \frac{36 - 8 - 16 - 8 - 16 - 36}{48} = \frac{-48}{48} = \underline{\underline{-1 = z}}$$

3º) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}$, según los valores del parámetro α .

El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}$ es de la forma $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, que se resuelve de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(\alpha x^2 + 4x + 8) \cdot \frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(\alpha x^2 + 4x + 8)} \right]^{\frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}} = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(\alpha x^2 + 4x + 8)} \right]^{\frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}} = e^0 = \underline{\underline{1}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4º) Calcular la integral $F(x) = \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt$.

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = t^2 \rightarrow du = 2t dt \\ e^{-t} dt = dv \rightarrow v = -e^{-t} \quad (*) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(*) \int e^{-t} \cdot dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -t = h \\ dt = -dh \end{array} \right\} \Rightarrow \int e^h \cdot (-dh) = -e^h \Rightarrow \underline{\int e^{-t} \cdot dt = -e^{-t}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \left[t^2 \cdot (-e^{-t}) - \int -e^{-t} \cdot 2t dt \right]_0^x = \left[-t^2 e^{-t} + 2 \int t \cdot e^{-t} dt \right]_0^x = \left[-t^2 e^{-t} + 2I \right]_0^x = F(x) \quad (**)$$

$$I = \int t \cdot e^{-t} dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ e^{-t} dt = dv \rightarrow v = -e^{-t} \end{array} \right\} \Rightarrow I = t \cdot (-e^{-t}) - \int -e^{-t} \cdot dt = -t \cdot e^{-t} + \int e^{-t} \cdot dt =$$

$$= -t \cdot e^{-t} - e^{-t} = \underline{-e^{-t}(t+1)} = I \Rightarrow \text{Sustituyendo el valor de } I \text{ en } (**):$$

$$F(x) = \left[-t^2 e^{-t} - 2e^{-t}(t+1) \right]_0^x = \left[-e^{-t}(t^2 + 2t + 2) \right]_0^x = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) - \left[-e^{-0}(0^2 + 2 \cdot 0 + 2) \right] =$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^0 \cdot (2) = 2 - \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} = \underline{\underline{F(x)}}$$

OPCIÓN B

1º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralela a s .

b) Determinar la distancia entre las rectas r y s .

c) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por O corta a la recta s .

a)

El plano π tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas, que son $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, 1)$. Considerando, por ejemplo, el punto $P(1, 2, 0)$ perteneciente a la recta r , la ecuación general de π es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{v}_r, \vec{v}_s) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 3(x-1) + 2(y-2) + 2z - 6z - (x-1) - 2(y-2) = 0 \quad ;;$$

$$2(x-1) - 4z = 0 \quad ;; \quad x - 1 - 2z = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 2z - 1 = 0}}$$

b)

La distancia entre las rectas r y s es la misma que existe entre la recta s y el plano π , o sea, la distancia que existe entre cualquier punto de s y π .

Un punto de s es $Q(-2, 0, 2)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0)$ al plano genérico $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la formula al plano $\pi \equiv x - 2z - 1 = 0$ y al punto $Q(-2, 0, 2)$:

$$d(s, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2 + 0 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 0 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{5}}{5} \text{ unidades} = d(s, \pi)}}$$

c)

La ecuación de la recta t , paralela a r y que pasa por O , tiene por ecuaciones continuas, por ejemplo, las siguientes: $t \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

Para comprobar si las rectas s y t se cortan, en primer lugar, las expresamos por unas ecuaciones implícitas:

$$s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} x+2=2y \\ x+2=2z-4 \end{cases} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x-2z+6=0 \end{cases}}$$

$$t \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ x=2z \end{cases} \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} 3x-2y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}}$$

Las rectas se cortan si el sistema formado por las ecuaciones que determinan ambas rectas es compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de M es igual o mayor de 2 por ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Veamos si su rango es 3, teniendo en cuenta que $L_2 = L_4$:

$$\{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (3-1) = 8 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 3}$$

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible determinado es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tengan el mismo rango; es decir, que el rango de M' tiene que ser tres, para lo cual es necesario que se anule su determinante:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 - F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (4+12) =$$

$$6 \cdot 16 = 96 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 4}$$

Las rectas s y t no se cortan (como no son paralelas, se cruzan).

2º) Si la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obtener:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

a)

Una función es creciente o decreciente según que su derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \ ; \ ; \ x_2 = 5.$$

Por ser $f(x)$ una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$.

Las raíces que anulan la primera derivada dividen el dominio de f en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento, por lo cual, basta con estudiar uno cualquiera de ellos, por ejemplo el intervalo $(-\infty, 1)$. Considerando el valor más sencillo, $x = 0$:

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = (0-1)^3(0-5) = -1 \cdot (-5) = 5 > 0 \Rightarrow \text{Creciente.}$$

$$\underline{\underline{\text{Crecimiento: } (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{\text{Decrecimiento: } (1, 5)}}$$

b)

Sabiendo que las condiciones de máximo relativo, mínimo relativo, respectivamente, son:

$$\text{Máximo relativo} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases} \ ; \ ; \ \text{Mínimo relativo} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases} \ ; \ ; \ P. I. \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'''(x) \neq 0 \end{cases}.$$

No obstante lo anterior, en algunos casos sucede que para $x = a$ se anulan las derivadas segunda, tercera y así sucesivamente.

En estos casos se debe seguir derivando la función hasta hallar una derivada que no se anule en ese punto. Si el orden de esa derivada es par y además $f'(a) = 0$, la función tiene un extremo relativo; si es impar, la función tiene un punto de inflexión para el valor $x = a$.

$$f''(x) = 3(x-1)^2(x-5) + (x-1)^3 = (x-1)^2[3(x-5) + (x-1)] = (x-1)^2(3x-15+x-1) =$$

$$= (x-1)^2(4x-16) = \underline{4(x-1)^2(x-4) = f''(x)}$$

$$f''(1) = 4(1-1)^2(1-4) = 0 \Rightarrow \text{En principio no hay máximo ni mínimo relativo para } x = 1.$$

$$f''(5) = 4(5-1)^2(5-4) = 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo para } x=5}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4(x-1)^2(x-4) = 0 \Rightarrow \underline{x_1=1} \ ; \ ; \ ; \ \underline{x_2=4}$$

$$f'''(x) = 8(x-1)(x-4) + 4(x-1)^2 = 4(x-1)[2(x-4) + (x-1)] = 4(x-1)(2x-8+x-1) =$$

$$= 4(x-1)(3x-9) = \underline{12(x-1)(x-3) = f'''(x)}$$

$$f^{IV}(x) = 12[(x-3) + (x-1)] = 12(2x-4) = 24(x-2) = \underline{24(x-2) = f^{IV}(x)}$$

$$f'''(1) = 12(1-1)(1-4) = 0$$

$$f^{IV}(1) = 12(1-2) = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{Por ser } f^{IV}(x) \text{ de orden par} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo para } x=1}}}$$

Se entiende que es un máximo relativo por varias razones: una es que una función polinómica que tiene dos extremos relativos no puede tener dos máximos o dos mínimos; otra razón para asegurar que es un máximo se deduce de los periodos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'''(4) = 24(4-2) = 48 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Punto de inflexión para } x=4}}}$$

c)

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x-1) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x - 5x^3 + 15x^2 - 15x + 5 =$$

$$= \underline{x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5 = f'(x)}$$

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5) \cdot dx = \frac{x^5}{5} - \frac{8x^4}{4} + \frac{18x^3}{3} - \frac{16x^2}{2} + 5x + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C = f(x)}}$$

Teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, la función es $\underline{\underline{f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x .}}$

3º) Dado el sistema $\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resolver el sistema cuando sea posible.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \lambda & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

El rango de M es dos, $\forall \lambda \in R$, por ser $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

El rango de M' en función de λ es el siguiente:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - \lambda^2 - 12 + 6\lambda + 8 + 2\lambda = -\lambda^2 + 8\lambda - 12 = 0 \quad ; \quad \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0.$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2} \quad ; \quad \underline{\lambda_2 = 6}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} \lambda \neq 2 \\ \lambda \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \quad ; \quad \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$$\text{Para } \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

b)

$$\text{Para } \lambda = 2 \text{ el sistema es } \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

De las ecuaciones primera y tercera se deduce la solución: $x = 0, y = -2$.

$$\text{Para } \lambda = 6 \text{ el sistema es } \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}, \text{ equivalente a } \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}, \text{ cuya solución es la}$$

siguiente:

$$\begin{cases} -2x + y = -6 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = -4}} \;; \; y = 3x - 2 = -12 - 2 = \underline{\underline{-14 = y}}$$

4º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) Obtener la matriz inversa de A para a = -1.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 1 - a - 1 - a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{a=1}$$

Para a = 1 el rango de A es 2 y para a distinto de uno el rango es 3.

b)

Para a = -1 la matriz es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuya matriz inversa es la siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1)^2 = \underline{4=|A|} \quad ; \quad A^T = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}}}$$
