PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permitirá el uso de calculadoras gráficas.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

b) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

c) Para m = -1 calcular, si es posible, la matriz inversa de M.

----

a)

El valor del determinante de la matriz M es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m+2m^2-2m-m=2m^2-2m=2m(m-1)=0 \Rightarrow \underline{m_1=0} \;;;\; \underline{m_2=1}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ matriz\ \ m\ \ es\ \ invertible\ \ \forall m\in R-\{0,\ 1\}}}$$

b)

Teniendo en cuenta la propiedad del determinante del producto de matrices:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B| \Rightarrow |M^{25}|=(|M|)^{25}.$$

Sabiendo que $|A| = m(2m-1) \Rightarrow |M^{25}| = m^{25}(2m-1)^{25}$, lo que implica que M^{25} es invertible para los mismos valores que es invertible la matriz M .

c)

Para m = -1 es $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|M| = -2(-1-1) = 4$. $M^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Adj\left(M^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{L(1+\alpha x)-bx}{x^2} & si\ \ 1+\alpha x>0\ \ y\ \ x\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & si\ \ x=0 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f es continua en x = 0.

b) Para α = b = 1, estudiar si la función f es derivable en x = 0 aplicando la definición de derivada.

----

a)

Para que la función f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0).$$

Teniendo en cuenta que $f(0)=-\frac{1}{2}$, tiene que ser:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{L(1+\alpha x)-bx}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{L(1+\alpha x)-bx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{L(1+0)-0}{0}=\frac{L1}{0}=\frac{0}{0}\ \Rightarrow\ Indet.\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a-b-abx}{2x(1+ax)}=\frac{a-b}{0}\neq -\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix} Para\ \ a=b \\ Indeter. \end{Bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{-ab}{2+4ax}=\frac{-ab}{2}-\frac{1}{2}\ ;;\ ab=1\ \Rightarrow\ a=b\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix} \underline{a=b=1} \\ \underline{a=b=-1} \end{Bmatrix}$$

<u>La función es continua para x = 0 para a = b = 1 y para a = b = - 1.</u>

b)

Una función es derivable en un punto cuando, además de ser continua en ese punto, existen las derivadas por la izquierda y por la derecha y además son iguales.

Para a = b = 1 la función es $f(x)=\begin{cases} \dfrac{L(1+x)-x}{x^2} & si\ \ 1+x>0\ \ y\ \ x\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & si\ \ x=0 \end{cases}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\frac{1-1-x}{2x(1+x)}=\frac{-x}{2x(1+x)}=\frac{-1}{2(1+x)} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f'\left(0^-\right)=f'\left(0^+\right)=f'(0)=-\frac{1}{2}}}$$

<u>La función f(x) es derivable para a = b = 1 y x = 0.</u>

****

3º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}$ y $s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$, determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales las rectas r y s se cortan perpendicularmente.

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ a)$ y $\overrightarrow{v_s} = (b,\ 1,\ -1)$.

Si las rectas r y s son perpendiculares lo tienen que ser sus vectores directores, por lo tanto, el producto escalar de los vectores directores tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1,\ 2,\ a) \cdot (b,\ 1,\ -1) = b + 2 - a = 0 \Rightarrow \underline{b = a - 2}.$$

La rectas r y s, expresadas por unas ecuaciones implícitas, teniendo en cuenta la relación b = α - 2, son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x = y \\ ax = z \end{cases} \;;;\; \underline{r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases}} \qquad s \equiv \begin{cases} x - 3 = by \\ x - 3 = -z + 3 \end{cases} \;;;\; \underline{s \equiv \begin{cases} x - (a-2)y - 3 = 0 \\ x + z - 6 = 0 \end{cases}}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \\ x + (2-a)y - 3 = 0 \\ x + z - 6 = 0 \end{cases}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Según los rangos de A y A' pueden presentarse los casos siguientes:

Rango A = Rango A' = 2 → Coincidentes ;; Rango A = 2 ;; Rango A' = 3 → Paralelas

Rango A = Rango A' = 3 → Secantes ;; Rango A = 3 ;; Rango A' = 4 → Se cruzan

Tiene que cumplirse que Rango A = Rango A' = 3, o sea: $|A'| = 0$.

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{C_1 \rightarrow C_1 + 2C_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 5-2a & 2-a & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 5-2a & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 5-2a & 0 & -3 \\ 1+a & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-2a & -3 \\ 1+a & -6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5-2a & 1 \\ 1+a & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \left(10 - 4a - 1 - a\right) = -3 \cdot \left(9 - 5a\right) = 0 \;\Rightarrow\; 9 - 5a = 0 \;\;;;\;\; 5a = 9 \;\;;;\;\; \underline{\underline{a = \frac{9}{5}}}$$

$$b = a - 2 = \frac{9}{5} - 2 = \frac{9-10}{5} = \underline{\underline{-\frac{1}{5} = b}}$$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$, hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

El haz de planos paralelos a $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ tiene por ecuación general la expresión $\alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0$, con $D \in R$.

Dados los planos paralelos $\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$, su distancia viene dada por la fórmula: $d(\pi_1,\ \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + D^2}}$.

Aplicando la fórmula a los planos π y α sabiendo que la distancia es de 3 unidades:

$$d(\pi,\ a) = 3 = \frac{|1 - D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|1 - D|}{\sqrt{4 + 1 + 2}} = \frac{|1 - D|}{\sqrt{9}} = \frac{|1 - D|}{3} = 3 \Rightarrow |1 - D| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 1 - D = 3 \rightarrow \underline{D_1 = -2} \\ \\ -1 + D = 3 \rightarrow \underline{D_2 = 4} \end{cases}\right\} = 3 \Rightarrow \text{ Los planos pedidos son:}$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv 2x - y + 2z - 2 = 0}} \quad y \quad \underline{\underline{\pi_2 \equiv 2x - y + 2z + 4 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Dada la función $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, hallar el punto o los puntos de la gráfica de f(x) en los que la pendiente a la recta tangente sea 1.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto x = 0.

c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0)=0$, $g(2)=2$. Demostrar que existe al menos un punto c en intervalo $(0,\ 2)$ tal que $g'(c)=1$.

----

a)

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1-x^2\right)-x\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}=m=1\ \Rightarrow\ x^2+1=\left(1-x^2\right)^2\ \ ;;$$

$$x^2+1=1-2x^2+x^4\ \ ;;\ \ x^4-3x^2=0\ \ ;;\ \ x^2\left(x^2-3\right)=0\ \ ;;\ \ \underline{x_1=x_2=0}\ \ ;;\ \ \underline{x_3=-\sqrt{3}}\ \ ;;\ \ \underline{x_4=\sqrt{3}}$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(0)=\frac{0}{1-0^2}=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{O(0,\ 0)}}$$

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{1-3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A\left(-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{1-3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{B\left(\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

b)

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la expresión $y-y_0=m(x-x_0)$, aplicada al punto O(0, 0) y m = 1:

$$y-0=1\cdot(x-0)\ \ ;;\ \ y=x\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\text{Recta tangente}:\ t\equiv x-y=0}}$$

c)

Para demostrar que siendo g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0)=0$, $g(2)=2$ tiene al menos un punto c en intervalo $(0,\ 2)$ tal que $g'(e)=1$, no hay más que aplicar el Teorema del Valor Medio o de Lagrange, que dice que: " si f(x) es una función continua en [α, b] y derivable en (α, b), entonces existe al menos un punto $\alpha\in(a,b)$ que cumple que $f'(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Aplicando el mencionado teorema a la función g(x) dada:

$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$, con lo cual, queda demostrado lo pedido.

****

2º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Este ejercicio se puede hacer de varias formas; la que nosotros vamos a emplear es la siguiente: obtener dos puntos de la recta r y los correspondientes puntos simétricos con respecto al plano; la recta pedida es la que pasa por los puntos simétricos; si la recta es secante al plano, facilita el problema porque el punto de corte coincide con su simétrico con respecto al plano.

En primer lugar determinamos la posición relativa de la recta r y del plano π.

El vector director de r es $\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 1)$ y el vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -2)$, que son linealmente independientes y además no son perpendiculares por cumplirse que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, (en caso de haber sido perpendiculares, la recta pedida hubiera sido ella misma), lo cual significa que la recta r y el plano π son secantes.

Para determinar el punto de corte de r y π expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda) + (-\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \ ;; \ 1 + \lambda - \lambda - 2\lambda + 1 = 0 \ ;; \ 2\lambda = 2 \ ;; \ \underline{\lambda = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(2,\ -1,\ 1)}$$

Otro punto de r es, por ejemplo, para λ = 0, Q(1, 0, 0).

El punto Q’ simétrico de Q con respecto al plano π es el siguiente:

En primer lugar vamos a determinar una recta p perpendicular al plano π y que contenga al punto Q.

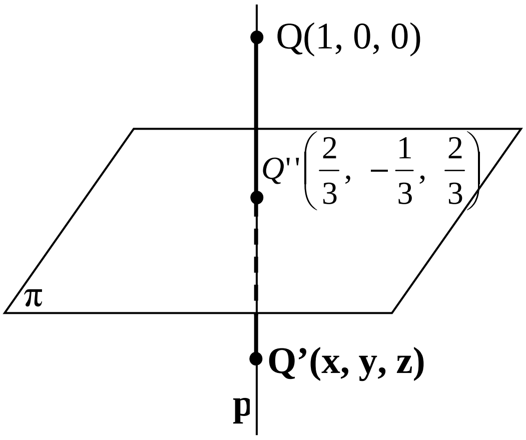
Un vector director de p puede ser el vector normal del plano: $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -2)$.

La expresión de p por unas ecuaciones paramétricas es $p \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

El punto Q’’, intersección del plano π con la recta p, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+y-2z+1=0 \\ p \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+\lambda+4\lambda+1=0 \;;;\; 6\lambda+2=0 \;;;\; 3\lambda+1=0 \;;;\; \underline{\lambda=-\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q''\left(\frac{2}{3},\; -\frac{1}{3},\; \frac{2}{3}\right)}.$$



Para que Q’ sea el punto simétrico de Q con respecto al plano π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{QQ''}=\overrightarrow{Q''Q'} \Rightarrow Q''-Q=Q'-Q'' \;;;$$

$$\left(\frac{2}{3},\; -\frac{1}{3},\; \frac{2}{3}\right)-(1,\; 0,\; 0)=(x,\; y,\; z)-\left(\frac{2}{3},\; -\frac{1}{3},\; \frac{2}{3}\right) \;;;$$

$$\left(-\frac{1}{3},\; -\frac{1}{3},\; \frac{2}{3}\right)=\left(x-\frac{2}{3},\; y+\frac{1}{3},\; z-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3} \;\rightarrow\; \underline{x=\frac{1}{3}} \\ y+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3} \;\rightarrow\; \underline{y=-\frac{2}{3}} \\ z-\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \underline{z=\frac{4}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q'\left(\frac{1}{3},\; -\frac{2}{3},\; \frac{4}{3}\right)}$$

La recta s pedida es la que pasa por los puntos P(2, -1, 1) y $Q'\left(\frac{1}{3},\; -\frac{2}{3},\; \frac{4}{3}\right)$, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{Q'P}$:

$$\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{Q'P}=P-Q'=(2,\; -1,\; 1)-\left(\frac{1}{3},\; -\frac{2}{3},\; \frac{4}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\; -\frac{1}{3},\; -\frac{1}{3}\right).$$

Un vector director de s es $\overrightarrow{w}=(5,\; -5,\; -1)$ y $\underline{\underline{s \equiv \frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}}}$.

****

3º) Dado el sistema $\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de x = y = z = 0.

b) Resolver el sistema para λ = 5.

----

a)

Si el sistema tiene soluciones distintas de x = y = z = 0 es compatible indeterminado, por lo que, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el determinante de coeficientes tiene que ser de rango menor que 3, o sea: tiene que valer cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda - \lambda^2 + 4 + 1 + 2\lambda^2 - 4\lambda = 0 \;\;;;\;\; \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \;\;;;\;\; \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$$= \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2 \;\Rightarrow\; \underline{\lambda_1 = 1} \;\;;;\;\; \underline{\lambda_2 = 5}$$

<u>El sistema tiene infinitos grupos de soluciones para λ = 1 y para λ = 5.</u>

b)

Para λ = 5 el sistema es $\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera y, parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo z = λ:

$$\left.\begin{matrix} 5x + 2y = -\lambda \\ 5x - y = -2\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 5x + 2y = -\lambda \\ 10x - 2y = -4\lambda \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; 15x = -5\lambda \;\;;;\;\; 3x = -\lambda \;\;;;\;\; \underline{x = -\frac{1}{3}\lambda}$$

$$5x - y = -2\lambda \;\;;;\;\; y = 5x + 2\lambda = -\frac{5}{3}\lambda + 2\lambda = \underline{\frac{1}{3}\lambda = y}$$

$$\underline{\underline{Solución:\; x = \frac{1}{3}\lambda \;\;;;\;\; y = \frac{1}{3}\lambda \;\;;;\;\; z = \lambda, \quad \forall \lambda \in R}}$$

****

4º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial A · X · B = A + B.

Siendo $S = A+B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

La ecuación queda de la forma: A · X · B = S.

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por B^{-1} y, teniendo en consideración la propiedad asociativa del producto de matrices, resulta:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1} \;\;;;\;\; \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1} \;\;;;$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1} \;\;;;\;\; \underline{X = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1}}.$$

Calculamos ahora las matrices inversas de A y B por los siguientes procedimientos diferentes:

La matriz inversa de A, por el Método de Gauss-Jordan es la siguiente:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 4F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{6}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{6} & \tfrac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{6} & \tfrac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{3} \\ -\tfrac{1}{6} & \tfrac{2}{3} \end{pmatrix}}.$$

La matriz inversa de B la hallamos por la matriz adjunta:

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \;\;;;\;\; B^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;\;;;\;\; Adj\left(B^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} & -1 \\ -\tfrac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de X:

$$X = A^{-1} \cdot S \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{3} \\ -\tfrac{1}{6} & \tfrac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} & -1 \\ -\tfrac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{4}{3}-\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{4}{3}-\tfrac{4}{3} & \tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} & -1 \\ -\tfrac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-0 & -\frac{2}{3}-0 \\ \frac{4}{3}-3 & \frac{8}{3}-4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = X}}$$

****