# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE MADRID

# SEPTIEMBRE – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

## OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=e^{-x}\left(x^2+1\right)$, se pide:

a ) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b ) Calcular: $I=\int_0^1 f(x)\cdot dx$.

----------

a )

Por tratarse de una función racional cuyo numerador y denominador es distinto de cero para cualquier valor real de x, la función está definida en R.

Los puntos de corte con el eje X son los valores que anulan la función; en el caso que nos ocupa no es posible por ser $x^2+1\neq 0,\ \forall x\in R$, por lo cual no corta al eje X.

Los puntos de corte con el eje Y son los valores que toma la función para x = 0:

$$y=f(0)=e^{-0}\left(0^2+1\right)=1\cdot 1=1 \ \Rightarrow\ \underline{A(0,\ 1)}.$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la primera derivada:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x} \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-\left(x^2+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(2x-x^2+1\right)}{e^{2x}}=\underline{\frac{-x^2+2x+1}{e^x}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \ \Rightarrow\ \frac{-x^2+2x+1}{e^x}=0 \ \ ;;\ \ -x^2+2x+1=0 \ \ ;;\ \ x^2-2x-1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow \underline{x_1=1-\sqrt{2}}\ \ ;;\ \ \underline{x_2=1+\sqrt{2}}$$

Por tratarse de una función continua, los dos valores que anulan la primera derivada dividen el dominio en tres intervalos: $\left(-\infty,\ 1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$ $y$ $\left(1+\sqrt{2},\ +\infty\right)$.

Para determinar en qué intervalo es creciente o decreciente consideramos un valor sencillo, por ejemplo x = 0 que pertenece al intervalo $\left(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$:

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{e^x}\ \Rightarrow\ f'(0)=\frac{-0^2+2\cdot 0+1}{e^0}=\frac{1}{1}=1>0\ \Rightarrow\ \underline{Creciente}$$

$$\underline{\underline{f'(x)<0\ \Rightarrow\ Decreciente\ \Rightarrow\ \left(-\infty,\ 1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},\ +\infty\right)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x)>0\ \Rightarrow\ Creciente\ \Rightarrow\ \left(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right)}}$$

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule la segunda derivada para ese punto.

$$f''(x)=\frac{(-2x+2)\cdot e^x-\left(-x^2+2x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(-2x+2+x^2-2x-1\right)}{e^{2x}}=\underline{\frac{x^2-4x+1}{e^x}=f''(x)}$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{x^2-4x+1}{e^x}=0\ \ ;;\ \ x^2-4x+1=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=2-\sqrt{3}}\ \ ;;\ \ \underline{x_2=2+\sqrt{3}}$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente; para que exista punto de inflexión es necesario, además, que no se anule la tercera derivada para los valores que anulen la segunda derivada.

$$f'''(x)=\frac{(2x-4)\cdot e^x-\left(x^2-4x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(2x-4-x^2+4x-1\right)}{e^{2x}}=\underline{\frac{-x^2+4x-5}{e^x}=f'''(x)}$$

$$f'''\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{-\left(2-\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)-5}{e^{2-\sqrt{3}}}=\frac{-\left(4-4\sqrt{3}+3\right)+8-4\sqrt{3}-5}{e^{2-\sqrt{3}}}=\frac{-7+4\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{-3}{e^{2-\sqrt{3}}}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Punto\ \ de\ \ \inf lexión\ \ para\ \ x=2-\sqrt{3}}$$

$$f\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}{e^{2-\sqrt{3}}}=\frac{4-4\sqrt{3}+3+1}{e^{2-\sqrt{3}}}=\frac{8-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}=\frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{e^{2-\sqrt{3}}}\Rightarrow \underline{\underline{P.I.\Rightarrow B\left[2-\sqrt{3},\ \ \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{e^{2-\sqrt{3}}}\right]}}$$

El punto B es, aproximadamente: B(0’27, 0’82).

$$f'''\left(2+\sqrt{3}\right)=\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)-5}{e^{2+\sqrt{3}}}=\frac{-\left(4+4\sqrt{3}+3\right)+8+4\sqrt{3}-5}{e^{2+\sqrt{3}}}=\frac{-7-4\sqrt{3}+3+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{-3}{e^{2+\sqrt{3}}}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Punto\ \ de\ \ \inf lexión\ \ para\ \ x=2+\sqrt{3}}$$

$$f\left(2+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}{e^{2+\sqrt{3}}}=\frac{4+4\sqrt{3}+3+1}{e^{2+\sqrt{3}}}=\frac{8+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}=\frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)}{e^{2+\sqrt{3}}}\Rightarrow \underline{\underline{P.I.\Rightarrow C\left[2+\sqrt{3},\ \ \frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)}{e^{2+\sqrt{3}}}\right]}}$$

El punto C es, aproximadamente: C(3’73, 0’36).

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0.$$

<u>Asíntota horizontal: y = 0 (Eje X).</u>

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$e^x=0\ \Rightarrow\ x\notin R\ \Rightarrow$ <u>No tiene asíntotas verticales.</u>

Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

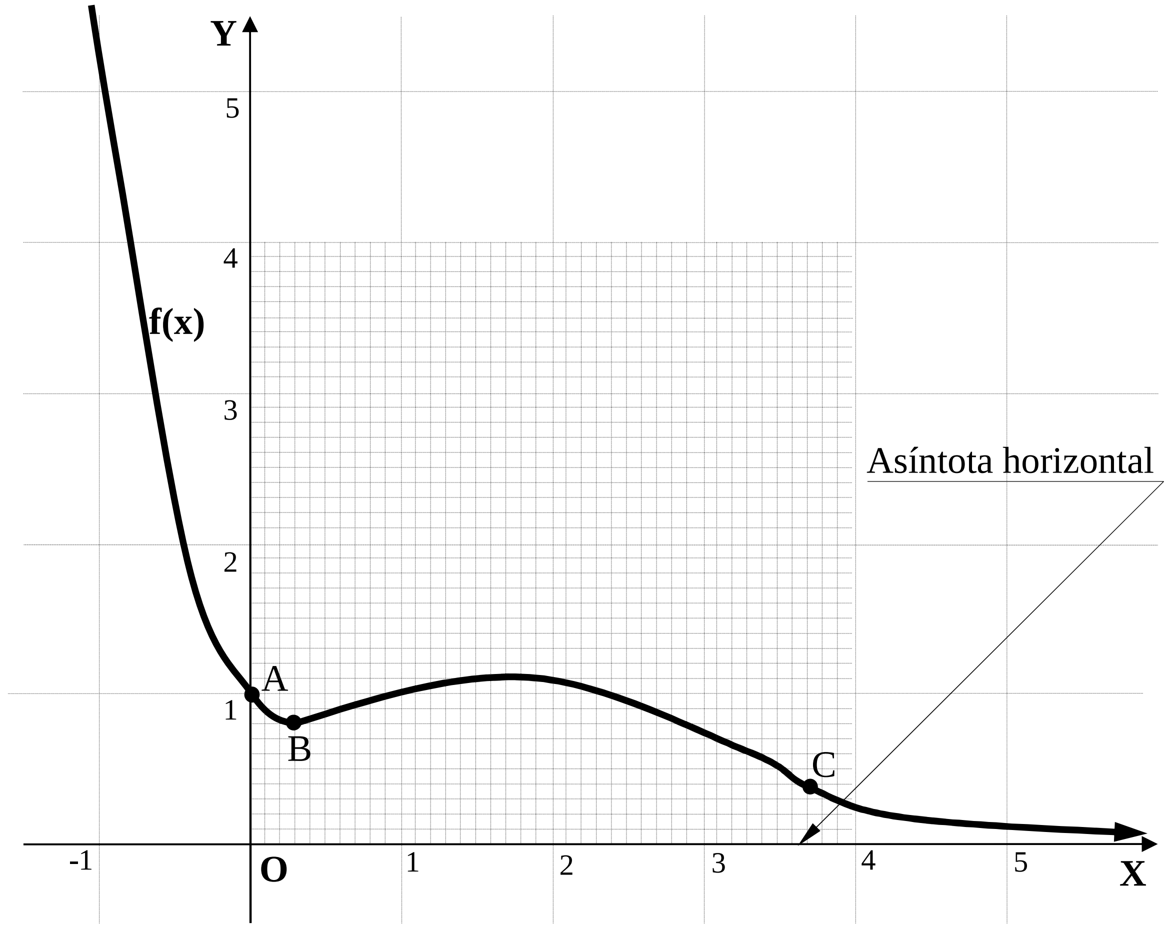
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{e^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x\cdot e^x}=\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x+x\cdot e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x(1+x)}=\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x(1+x)+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x(2+x)}=\frac{2}{\infty}=\underline{0=m}$$

<u>No tiene asíntotas oblicuas</u> por ser la pendiente cero, que sería horizontal.

Con los datos obtenidos tenemos elementos suficientes para realizar el dibujo de la gráfica de la curva con la suficiente precisión, que es la siguiente.




b )

$$I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{e^x} \cdot dx \Rightarrow$$ Resolvemos, en primer lugar, la integral indefinida:

$$A = \int \frac{x^2 + 1}{e^x} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = x^2 + 1 \to du = 2x\,dx \\ \frac{1}{e^x} \cdot dx = dv \to v = -\frac{1}{e^x} \end{Bmatrix} \Rightarrow A = (x^2 + 1) \cdot \left(-\frac{1}{e^x}\right) - \int -\frac{1}{e^x} \cdot 2x\,dx =$$

$$= -\frac{x^2 + 1}{e^x} + 2 \cdot \int \frac{x}{e^x} \cdot dx = \underline{-\frac{x^2 + 1}{e^x} + 2 \cdot A_1 = A} \qquad (*)$$

$$A_1 = \int \frac{x}{e^x} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = x \to du = dx \\ \frac{1}{e^x} \cdot dx = dv \to v = -\frac{1}{e^x} \end{Bmatrix} \Rightarrow A_1 = x \cdot \left(-\frac{1}{e^x}\right) - \int -\frac{1}{e^x} \cdot dx =$$

$$= -\frac{x}{e^x} + \int \frac{1}{e^x} \cdot dx = -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = -\frac{1}{e^x}(x+1) = A_1 \Rightarrow$$ Sustituyendo en (*):

$$A = -\frac{x^2 + 1}{e^x} - 2 \cdot \frac{1}{e^x}(x+1) = -\frac{x^2 + 1}{e^x} - \frac{2x + 2}{e^x} = \underline{-\frac{1}{e^x}(x^2 + 2x + 3) = A}$$

$$I=\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\cdot dx=\left[-\frac{1}{e^x}\left(x^2+2x+3\right)\right]_0^1=\left[-\frac{1}{e^1}(1+2+3)\right]-\left[-\frac{1}{e^0}(0+0+3)\right]=$$

$$=-\frac{1}{e}\cdot 6+\frac{1}{1}\cdot 3=3-\frac{6}{e}=\underline{\underline{\frac{3e-6}{e}\ u^2=I}}$$

**********

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a ) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b ) Decir cuándo la matriz A es inversible. Calcular la inversa para a = 1.

----------

a )

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix}=2(a+1)-2a(a+1)^2=2(a+1)[1-a(a+1)]=2(a+1)(1-a^2-a)=$$

$$=-2(a+1)(a^2+a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \rightarrow \underline{a_1=-1} \\ a^2+a-1=0 \rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow \underline{a_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \;;;\; \underline{a_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Considerando el menor $A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix}=2a+2-2=2a$, cuyo valor es distinto de cero para cualquier valor real de x, excepto para x = 0, podemos concluir que:

$$\underline{\underline{Rango\;\; A=2,\;\; excepto\;\; paara:\; \left\{a\neq -1 \;;;\; a\neq\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \;;;\; a\neq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}\; cuyo\;\; Rango\;\; es\;\; 3}}$$

b )

Sabiendo que una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero:

<u>A es inversible cuando su rango es 3.</u>

$$Para\;\; a=1\;\; es\;\; A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\;\; |A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4-8=\underline{-4} \;;;\; A^T=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Adj\,(M^T)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad {}^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{\left|A\right|} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

**********

3º) Dados los puntos P(1, 1, 3), Q(0, 1, 0), se pide:

a ) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b ) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican: $dist(P,\ S) = 2\,dist(Q,\ S)$.

----------

a )

<u>El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos puntos dados es un plano perpendicular por el punto medio del segmento que determinan.</u>

Los puntos P(1, 1, 3) y Q(0, 1, 0) determinan el vector:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (1,\ 1,\ 3) - (0,\ 1,\ 0) = (1,\ 0,\ 3)$.

El punto medio de P y Q es: $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1+1}{2} = 1 \\ z = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)}$.

El haz de planos paralelos que tienen como vector normal a $\overrightarrow{v} = (1,\ 0,\ 3)$ tiene la siguiente ecuación general: $\alpha \equiv x + 3z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz $\alpha$, el plano $\pi$ buscado es el que contiene al punto medio del segmento:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv x + 3z + D = 0 \\ M\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} + D = 0 \ ;; \ \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + D = 0 \ ;; \ \frac{10}{2} + D = 0 \ ;; \ \underline{D = -5}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + 3z - 5 = 0}}$$

b ) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican: $dist(P,\ S) = 2\,dist(Q,\ S)$.

La recta r que pasa por P(1, 1, 3) y Q(0, 1, 0) tiene a $\overrightarrow{v} = (1,\ 0,\ 3)$ como vector director; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es, por ejemplo, $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{array} \right.$.

Un punto genérico de la recta r es $S(\lambda,\ 1,\ 3\lambda)$ .

Tiene que cumplirse que $dist(P,\ S)=2\,dist(Q,\ S)$:

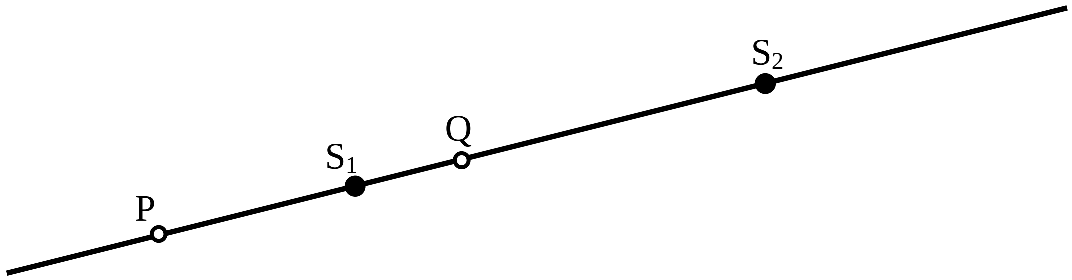
$$dist(P,\ S)=\sqrt{(\lambda-1)^2+(1-1)^2+(3\lambda-3)^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+9(\lambda-1)^2}=\sqrt{10(\lambda-1)^2}=\underline{\sqrt{10}\,(\lambda-1)}$$

$$dist(Q,\ S)=\sqrt{(\lambda-0)^2+(1-1)^2+(3\lambda-0)^2}=\sqrt{\lambda^2+9\lambda^2}=\sqrt{10\lambda^2}=\underline{\sqrt{10}\,\lambda}$$

<u>Observación importante:</u> la siguiente continuación no es correcta por despreciar una de las soluciones de la ecuación planteada:

$$dist(P,\ S)=2\,dist(Q,\ S)\ \Rightarrow\ \sqrt{10}\,(\lambda-1)=2\cdot\sqrt{10}\,\lambda\ \ ;;\ \ \lambda-1=2\lambda\ \ ;;\ \ \underline{\lambda=-1}$$

El punto solución sería $S_1(-1, 1, -3)$ cumple lo pedido, pero existe otro punto, como se puede observar en el gráfico siguiente:




La forma correcta de proceder es la siguiente:

$$dist(P,\ S)=2\,dist(Q,\ S)\ \Rightarrow\ \sqrt{10}\,(\lambda-1)=2\cdot\sqrt{10}\,\lambda\ \Rightarrow\quad \text{Elevando al cuadrado:}$$

$$10(\lambda-1)^2=4\cdot 10\cdot\lambda^2\ \ ;;\ \ \lambda^2-2\lambda+1=4\lambda^2\ \ ;;\ \ 3\lambda^2+2\lambda-1=0$$

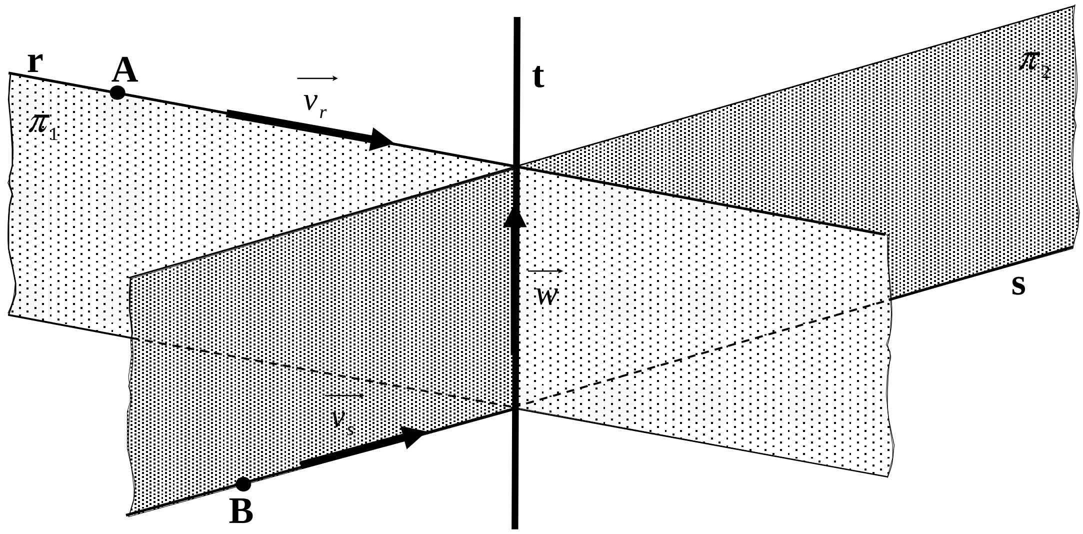
$$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{-2\pm 4}{6}=\frac{-1\pm 2}{3}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda_1=-1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{S_1(-1,\ 1,\ -3)}}\\ \lambda_2=\dfrac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{S_2\left(\dfrac{1}{3},\ 1,\ 1\right)}}\end{cases}$$

**********

4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$, hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

----------

Para determinar la recta t, perpendicular común vamos a seguir el siguiente procedimiento, que además se ilustra con el gráfico adjunto:




1.- Determinamos los puntos $A \in r$ y $B \in s$: A(-1, 2, 0) y B(0, 1, 0).

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,\ 3,\ 4)$.

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8i + 6j + 3k - 4k - 9i - 4j = -i + 2j - k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (-1,\ 2,\ -1)}$$

4.- Determinamos los planos $\pi_1$ y $\pi_2$, de la forma siguiente:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -2(x+1) - 3(y-2) + 2z + 2z - 6(x+1) + (y-2) = 0 \ ;;$$

$$-8(x+1) - 2(y-2) + 4z = 0 \ ;;\ 4(x+1) + (y-2) - 2z = 0 \ ;;\ 4x + 4 + y - 2 - 2z = 0$$

$$\underline{\pi_1 \equiv 4x + y - 2z + 2 = 0}$$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -3x - 4(y-1) + 4z + 3z - 8x + 2(y-1) = 0 \ ;;$$

$-11x-2(y-1)+7z=0$ ;; $-11x-2y+2+7z=0$

$$\underline{\pi_2 \equiv 11x+2y-7z-2=0}$$

La recta pedida t, es la que determinan los planos $\pi_1$ $y$ $\pi_2$ en su intersección:

$$t \equiv \begin{cases} 4x+y-2z+2=0 \\ 11x+2y-7z-2=0 \end{cases}$$

**********

OPCIÓN B

1º) a ) Calcular $I=\int x^3 \cdot Lx \cdot dx$, donde Lx es el logaritmo neperiano de x.

b ) Utilizar el cambio de variable $x=e^t-e^{-t}$ para calcular $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \cdot dx$. Para deshacer el cambio de variable utilizar $t=L\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

----------

a )

$$I=\int x^3 \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=Lx \rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ x^3 \cdot dx=dv \rightarrow v=\frac{x^4}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow I=Lx \cdot \frac{x^4}{4}-\int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^4}{4} \cdot Lx-\frac{1}{4}\int x^3 \cdot dx=\frac{x^4}{4} \cdot Lx-\frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4}+C=\underline{\underline{\frac{x^4}{16}(4Lx-1)+C=I}}$$

b )

Para una mejor comprensión del ejercicio conviene saber lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} senh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \cosh^2 x-senh^2 x=1 \Rightarrow \cosh x=\sqrt{1+senh^2 x} \Rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=e^t-e^{-t} \\ dx=\left(e^x+e^{-x}\right)dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{4+\left(e^t-e^{-t}\right)^2}} \cdot dt=\int \frac{e^t+e^{-t}}{2\sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}} \cdot dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{e^t+e^{-t}}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}} \cdot dt=\int dt=t+C=\underline{\underline{L\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}+C}}$$

**********

2º) Dados el plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$, se pide:

a ) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con $\pi_1$.

b ) Hallar un plano $\pi_2$, paralelo a $\pi_1$ y tal que el segmento de la recta r comprendida entre los planos $\pi_1$ $y$ $\pi_2$ tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades.

----------

a )

El punto P de intersección de la recta y el plano es la solución del sistema que forman.

La expresión de la recta por dos ecuaciones implícitas es como sigue:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4} \Rightarrow \left. \begin{cases} 3x - 3 = 2y + 2 \\ -2x + 2 = z \end{cases} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Es sistema que forman la recta y el plano es $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

De la segunda ecuación se tiene: $z = 2 - 2x$. Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + y + (2 - 2x) = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + y + 2 - 2x = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ -x + y = -1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ -2x + 2y = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x = 3}$$

$$-x + y = -1 \;\;;;\;\; y = x - 1 = 3 - 1 = \underline{2 = y} \;\;;;\;\; z = 2 - 2x = 2 - 6 = \underline{-4 = z} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P(3,\ 2,\ -4)}}$$

b )

El plano $\pi_2$ es de la forma $\pi_2 \equiv x + y + z + D = 0$.

El punto Q de corte de la recta r y el plano $\pi_2$, en función de D, es el siguiente:

Es sistema que forman la recta r y el plano $\pi_2$ es $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \\ x + y + z = -D \end{cases}$.

De la segunda ecuación se tiene: $z = 2 - 2x$. Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + y + (2 - 2x) = -D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + y + 2 - 2x = -D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ -x + y = -2 - D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ -2x + 2y = -4 - 2D \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x = 1 - 2D}$$

$$-x+y=-2-D \quad ;; \quad y=x-2-D=1-2D-2-D=\underline{-1-3D=y} \quad ;;$$

$$z=2-2x=2-2(1-2D)=2-2+4D=\underline{4D=z} \quad \Rightarrow \quad \underline{Q(1-2D,\ -1-3D,\ 4D)}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{29} \ \Rightarrow \ \sqrt{(1-2D-3)^2+(-1-3D-2)^2+(4D+4)^2} \quad ;;$$

$$29=(-2-2D)^2+(-3-3D)^2+(4D+4)^2 \quad ;; \quad 29=(2+2D)^2+(3+3D)^2+(4D+4)^2 \quad ;;$$

$$29=4(1+D)^2+9(1+D)^2+16(1+D)^2 \quad ;; \quad 29=29(1+D)^2 \quad ;; \quad 1=(1+D)^2 \quad ;; \quad 1=1+2D+D^2 \quad ;;$$

$$2D+D^2=0 \ ;; \ D(2+D)=0 \ \Rightarrow \begin{cases} \underline{D_1=0} \quad \rightarrow \quad \underline{Q_1(1,\ -1,\ 0)} \\ \\ \underline{D_1=-2} \quad \rightarrow \quad \underline{Q_2(5,\ 5,\ -8)} \end{cases}$$

Existen dos planos que cumplen la condición, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{\pi_2 \equiv x+y+z=0 \quad y \quad \pi'_2 \equiv x+y+z-2=0}}$$

**********

3º) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x-2y+z-3v=-4 \\ x+2y+z+3v=4 \\ 2x-4y+2z-6v=-8 \\ 2x+2z=0 \end{cases}$.

----------

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. Observando que la tercera ecuación es linealmente dependiente de la primera, el sistema es equivalente al siguiente: $\begin{cases} x-2y+z-3v=-4 \\ x+2y+z+3v=4 \\ x+z=0 \end{cases}$.

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuyas segunda, tercera, cuarta y quinta columnas son linealmente dependientes, por lo cual los rangos de de la matriz de coeficientes y ampliada es dos. El sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Parametrizando dos incógnitas, por ejemplo, $\underline{z=\lambda}$ $y$ $\underline{v=\mu}$ y despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, resulta:

$$\left.\begin{matrix} x-2y=-4-\lambda+3\mu \\ \underline{x=-\lambda} \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}(x+4+\lambda-3\mu)=\frac{1}{2}(-\lambda+4+\lambda-3\mu)=\underline{2-\frac{3}{2}\mu=y}.$$

$$Solución:\ \begin{cases} x=-\lambda \\ y=2-\dfrac{3}{2}\mu \\ z=\lambda \\ v=\mu \end{cases},\ \forall\{\lambda,\ \mu\}\in R$$

**********

4º) El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

----------

Llamando x, y, z al número de billetes de 50, 20 y 10 euros, respectivamente, es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=225 \\ 50x+20y+10z=7.000 \\ x+z=2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=225 \\ 5x+2y+z=700 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{x=2y-z} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} (2y-z)+y+z=225 \\ 5(2y-z)+2y+z=700 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2y-z+y+z=225 \\ 10y-5z+2y+z=700 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3y=225 \\ 12y-4z=700 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \underline{y=75} \\ 3y-z=175 \end{array}\right\} \rightarrow 225-z=175 \;\;;;\;\; z=225-175=\underline{50=z}$$

$$x=2y-z=150-50=\underline{100=x}$$

<u>En el cajero hay 100 billetes de 50 euros, 75 de 20 euros y 50 de 10 euros.</u>

**********