PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El examen presenta dos opciones, A y B. Se deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

OPCIÓN A

1º) Estudiar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

Restando la tercera fila a las otras dos, resulta: $A=\begin{pmatrix} 0 & m-2 & (m-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & m-2 & (m-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & m-2 \\ m & 1 \end{vmatrix}=-m(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1=0} \\ \underline{m_2=2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \ \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \ Rango \ \ A=3}}$$

Para m = 0 $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Para \ \ m=0 \ \Rightarrow \ Rango \ \ A=2}}$.

Para m = 2 $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Para \ \ m=2 \ \Rightarrow \ Rango \ \ A=2}}$.

****

2º) Hallar una matriz X tal que $X \cdot A \cdot X^{-1} = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Multiplicando por la derecha por X la expresión $X \cdot A \cdot X^{-1} = B$, resulta:

$$X \cdot A \cdot X^{-1} \cdot X = B \cdot X \;\;;;\;\; X \cdot A \cdot I = B \cdot X \;\;;;\;\; \underline{X \cdot A = B \cdot X}$$

Siendo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y operando en la última expresión:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} 2a = 8a-9c \\ 2c = 6a-7c \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6a = 9c \;;;\; \underline{2a = 3c} \\ \left.\begin{matrix} -b = 8b-9d \\ -d = 6b-7d \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8b = 8d \;;;\; \underline{b = d} \end{cases} \Rightarrow \textit{Por ejemplo, para} \begin{cases} a = 3 \\ c = 2 \\ b = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

<u>Nota</u>: El problema tiene infinitas soluciones, basta con que cumplan las relaciones encontradas entre sus elementos.

****

3º) Dados el plano $\pi \equiv x - 2y - 3z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,\ -2,\ -3)$, se pide:

a) Ecuación del plano α que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) Ecuación de la recta s que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

----

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$y = \lambda \ ;;\ x = -1 - \lambda \ \Rightarrow\ r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (-1,\ 1,\ 0)$.

Un vector normal (perpendicular) al plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -2,\ -3)$.

El plano α pedido tiene como vectores directores a $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{n}$ y contiene al punto A(1, -2, -3):

$$\alpha\left(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -3(x-1) + 2(z+3) - (z+3) - 3(y+2) = 0 \ ;;$$

$$-3x + 3 + z + 3 - 3y - 6 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\alpha \equiv 3x + 3y - z = 0}}$$

b)

El haz de planos paralelos a π tiene por ecuación $\pi \equiv x - 2y - 3z + D = 0$ y de ellos el π' que contiene al punto A es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y - 3z + D = 0 \\ A(1,\ -2,\ -3) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 4 + 9 + D = 0 \ ;;\ D = -14 \ \Rightarrow\ \underline{\pi' \equiv x - 2y - 3z - 14 = 0}.$$

El punto P de intersección de π' con r es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \\ \pi' \equiv x - 2y - 3z - 14 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1-\lambda-2\lambda-14=0 \;\;;;\;\; 3\lambda=-15 \;\;;;\;\; \lambda=-5 \Rightarrow \underline{P(4,\ -5,\ 0)}.$$

La recta s pedida es la que pasa por los puntos A y P, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente al vector:

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AP} = P - A = (4,\ -5,\ 0) - (1,\ -2,\ -3) = (3,\ -3,\ 3),$$ por ejemplo: $\underline{\overrightarrow{u} = (1,\ -1,\ 1)}$.

Considerando, por ejemplo, el punto $A(1,\ -2,\ -3)$, la recta s expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2-\lambda \\ z = -3+\lambda \end{cases}}}$$

****

4º) Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde m > 0 es una constante.

a) Para cada valor de m hallar el valor de a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P[a,\ f(a)]$ pase por el origen de coordenadas.

b) Hallar el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de f(x).

----

a)

La recta que pasa por el punto $P[a,\ f(a)]$ y por el origen de coordenadas tiene como pendiente $m = \frac{f(a)}{a}$. Por otra parte, a recta tangente a una función en un punto tiene como pendiente la derivada de la función en ese punto:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow x = a \Rightarrow m = 2a$$

$$\frac{f(a)}{a} = 2a \ ;; \ \frac{a^2 + m}{a} = 2a \ ;; \ a^2 + m = 2a^2 \ ;; \ a^2 = m \ ;; \ a = \pm\sqrt{m} \ \Rightarrow \ a > 0 \ \Rightarrow \ \underline{a = \sqrt{m}}$$

$$\underline{\underline{a = +\sqrt{m} \ \ \forall m \in (0,\ +\infty)}}$$

b)

En el caso particular de ser la recta tangente y = x, resulta que m = 1, por lo cual:

$$m = 2a = 1 \ ;; \ \underline{a = \frac{1}{2}} \ \Rightarrow \ m = a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} = m}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2-12}{x^2+4}$, calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Se trata de una función par, por lo cual es simétrica con respecto al eje Y.

Teniendo en cuenta que $x^2+4>0,\ \forall x\in R$, el dominio de la función es R y los valores de f(x) serán positivos o negativos cuando lo sean los valores de x^2-12.

Los puntos de corte de la función con el eje X son los siguientes:

$$\frac{x^2-12}{x^2+4}=0\ ;;\ x^2-12=0\ ;;\ x^2=12\ ;;\ x=\pm\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-2\sqrt{3}}\ ;;\ \underline{x_2=2\sqrt{3}}.$$

En el intervalo $\left(-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\right)$ los valores de la función son negativos, por lo que el área pedida es la siguiente: $S=-2\cdot\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}\cdot dx=2\cdot\int_{2\sqrt{3}}^{0}\frac{x^2-12}{x^2+4}\cdot dx$.

El valor de la integral indefinida es el siguiente:

$$I=\int\frac{x^2-12}{x^2+4}\cdot dx=\int\frac{x^2+16-16-12}{x^2+4}\cdot dx=\int\left(1+\frac{-16}{x^2+4}\right)\cdot dx=\int dx-16\cdot\int\frac{1}{x^2+4}\cdot dx=$$

$$x-16\cdot\int\frac{\frac{1}{4}}{\frac{x^2+4}{4}}\cdot dx=x-4\cdot\int\frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\cdot dx=\underline{x-I_1=I}\ ;;\ I_1=4\cdot\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\cdot dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2}=t\\ dx=2dt\end{array}\right\}\Rightarrow I=8\cdot\int\frac{1}{t^2+1}\cdot dt=8\ arc\ tag\ t=\underline{8\ arc\ tag\ \frac{x}{2}=I_1}\ \Rightarrow\ \underline{I=x-8\ arc\ tag\ \frac{x}{2}}$$

Sustituyendo en el área el valor de la integral obtenido, resulta:

$$S=\left[2\cdot\left(x-8\ arc\ tag\ \frac{x}{2}\right)\right]_{2\sqrt{3}}^{0}=\left[2\cdot\left(0-8\ arc\ tag\ \frac{0}{2}\right)\right]-\left[2\cdot\left(2\sqrt{3}-8\ arc\ tag\ \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)\right]=$$

$$=2\cdot(-8\ arc\ tag\ 0)-2\cdot\left(2\sqrt{3}-8\ arc\ tag\ \sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}+16\cdot\frac{\pi}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)u^2=S}}$$

****

2º) Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\frac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

La función dada puede expresarse de la forma $f(x)=\begin{cases} \frac{-x}{2-x} & si \;\; x \le 0 \\ \frac{x}{2-x} & si \;\; x > 0 \end{cases}$.

El dominio de la función es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador, o sea: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R-\{2\}}}$.

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento determinamos su derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{-1\cdot(2-x)-(-x)\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{-2+x-x}{(x-2)^2}=\frac{-2}{(x-2)^2} & si \;\; x \le 0 \\ \frac{1\cdot(2-x)-x\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{2-x+x}{(x-2)^2}=\frac{2}{(x-2)^2} & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el denominador es positivo para cualquier valor real de x y teniendo en cuenta el dominio de la función, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{Decrecimiento:\; f'(x)<0 \;\Rightarrow\; (-\infty,\; 0)}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{Crecimiento:\; f'(x)>0 \;\Rightarrow\; (0,\; 2)\cup(2,\; +\infty)}}$$

Por tener el mismo grado el numerador y el denominador, la función no tiene asíntotas oblicuas.

<u>Asíntotas horizontales</u>: son de la forma y = k, o sea: son los valores finitos que toma la función para los valores infinitos (positivo y negativo) de la variable independiente:

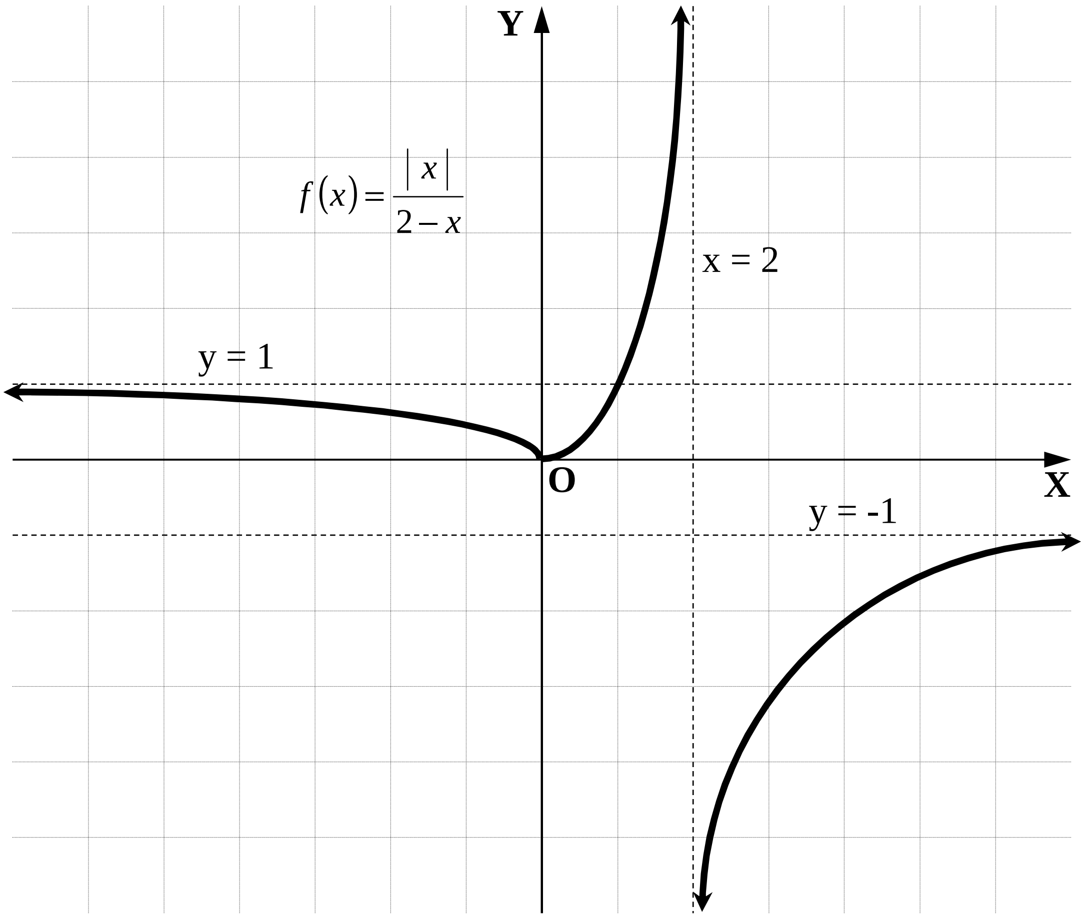
$$k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2-x}=1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Asíntota\;\; horizontal:\; y=1}}$$

$$k=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-x}=-1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Asíntota\;\; horizontal:\; y=-1}}$$

<u>Asíntotas verticales</u>: son los valores finitos que anulan el denominador:

$$\underline{\underline{Asíntota\;\; vertical:\; x=2}}$$

Teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas y con los datos obtenidos anteriormente, se puede esbozar una gráfica de la función, que es la que se indica a continuación:



Nota: Conviene observar que la función es continua para x = 0 y sin embargo, no es derivable.

****

3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique AB = BA.

b) Para a = b = c = 1, calcular B^{10}.

----

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2c&5b+2c&0\\2a+5c&2b+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\2c+5c&2c+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\7c&7c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow\begin{pmatrix}5a+2c&5b+2c&0\\2a+5c&2b+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\7c&7c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}2c=2b\\2a=2c\end{matrix}\right\}\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{a=b=c}}$$

b)

Para a = b = c = 1 es $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&1+1&0\\1+1&1+1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2&2+2&0\\2+2&2+2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&0\\4&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 & 4+4 & 0 \\ 4+4 & 4+4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se deduce lógicamente que:

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Sean los puntos $A(\lambda,\ 2,\ \lambda),\ B(2,\ -\lambda,\ 0)\ y\ C(\lambda,\ 0,\ \lambda+2)$.

a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C estén alineados?

b) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

----

a)

Los puntos A, B y C estarán alineados si los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes, o sea, que sus componentes sean proporcionales:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ -\lambda,\ 0) - (\lambda,\ 2,\ \lambda) = (2-\lambda,\ -\lambda-2,\ -\lambda)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (\lambda,\ 0,\ \lambda+2) - (\lambda,\ 2,\ \lambda) = (0,\ -2,\ 2)$$

$$\frac{0}{2-\lambda} = \frac{-2}{-\lambda-2} = \frac{2}{-\lambda}\ ;;\ \frac{0}{2-\lambda} = \frac{1}{\lambda+2} = \frac{1}{-\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2-\lambda} = \frac{1}{\lambda+2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda = 2} \\ \frac{1}{\lambda+2} = \frac{1}{-\lambda} \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda = -1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ puntos\ \ A,\ B\ \ y\ \ C\ \ no\ \ están\ \ alineados\ \ \forall \lambda \in R}}$$

b)

Para que el triángulo ABC sea isósceles es necesario que dos de los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$ tengan el mismo módulo:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC} = C - B = (\lambda,\ 0,\ \lambda+2) - (2,\ -\lambda,\ 0) = (\lambda-2,\ \lambda,\ \lambda+2).$$

Los módulos de los vectores son los siguientes:

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (-\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{4 - 4\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 + \lambda^2} = \underline{\sqrt{4\lambda^2 + 8}}$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \underline{2\sqrt{2}}$$

$$\left|\overrightarrow{w}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(\lambda-2)^2 + \lambda^2 + (\lambda+2)^2} = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda + 4} = \underline{\sqrt{4\lambda^2 + 8}}$$

Como se acaba de comprobar los lados AB y BC son iguales y diferentes del lado AC, lo cual indica que:

El triángulo ABC es isósceles, como teníamos que demostrar.

c)

Para $\lambda = 0$ los puntos son $A(0,\ 2,\ 0),\ B(2,\ 0,\ 0)\ y\ C(0,\ 0,\ 2)$ y los vectores que determinan son $\overrightarrow{u} = (2,\ -2,\ 0),\ \overrightarrow{v} = (0,\ -2,\ 2)\ y\ \overrightarrow{w} = (-2,\ 0,\ 2)$.

El plano π que los contiene puede obtenerse por uno cualquiera de los puntos y dos cualesquiera de los vectores, por ejemplo:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -x - z - (y-2) = 0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y + z - 2 = 0}}$$

Sabiendo que la distancia de un plano $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ al origen de coordenadas viene dada por la fórmula $d(O,\ \alpha) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, en el caso que nos ocupa es:+

$$d(O,\ \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades = d(O,\ \pi)}}$$

****