PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El examen presenta dos opciones, A y B. Se deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

OPCIÓN A

1º) Halla los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$ cuya distancia es 1 al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$.

La expresión de la recta r por paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$.

Los puntos de la recta r tienen por expresión general: $P(3+\lambda,\ 5+\lambda,\ -1-\lambda)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(\pi,\ P_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula anterior al caso que nos ocupa, resulta:

$$d(\pi,\ P) = \frac{|2(3+\lambda) - (5+\lambda) + 2(-1-\lambda) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1 \ ;; \ \frac{|6 + 2\lambda - 5 - \lambda - 2 - 2\lambda + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = 1 \ ;;$$

$$\frac{|-\lambda|}{\sqrt{9}} = 1 \ ;; \ |-\lambda| = 3 \ \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lambda_1 = 3} \Rightarrow \underline{\underline{P_1(6,\ 8,\ -4)}} \\ \underline{\lambda_2 = -3} \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0,\ 2,\ 2)}} \end{cases}$$

****

2º) Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$. Halla la ecuación continua de la recta t que contiene al punto P(2, -1, 2) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Las expresiones de las rectas r y s mediante ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ x + y = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 3 + \lambda \;\;;;\;\; \underline{x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda}$$

$$x + y = \lambda \;\;;;\;\; y = -x + \lambda = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda + \lambda = \underline{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \underline{x = 4 + \lambda} \;\;;;\;\; y = 2x - 7 = 8 + 2\lambda - 7 = \underline{1 + 2\lambda = y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Dos vectores directores de r y s pueden ser $\overrightarrow{u} = (1,\ 1,\ 2)$ y $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ 1)$, respectivamente.

Teniendo en cuenta que el producto vectorial de dos vectores es perpendicular al plano que contiene a los dos vectores, un vector director de la recta t pedida es:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j + 2k - k - 4i - j = -3i + j + k = \underline{(-3,\ 1,\ 1) = \overrightarrow{w}}$$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}}}$$

****

3º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+(k+1)y+2z=-1 \\ kx+y+z=k \\ (k-1)x-2y-z=k+1 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4k+(k+1)(k-1)-2(k-1)+2+k(k+1)=$$

$$=-1-4k+k^2-1-2k+2+2+k^2+k=2k^2-5k+2=0$$

$$k=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow \underline{k_1=2} \ ;; \ \underline{k_2=\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{Para \ \begin{Bmatrix} k\neq 2 \\ k\neq \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ M=Rango \ M'=3=n^{o} \ incóg. \Rightarrow Compatible \ Determinado}}$$

$$Para \ k=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$, cuyo rango es 2 por ser $F_2 = F_1 + F_3$.

$$\underline{\underline{Para \ k=2 \Rightarrow Rango \ M=Rango \ M'=2<n^{o} \ incóg. \Rightarrow Compatible \ Indeterminado}}$$

$$Para \ k=\frac{1}{2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$. Para determinar su rango con mayor facilidad consideramos la matriz 2M’, cuyo rango es el mismo que el de M’:

$$2M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 + 8 - 3 - 4 + 8 - 9 = 28 - 16 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango \ \ M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ k = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ Rango \ M = 2 \ ;; \ Rango \ M' = 3 \ \Rightarrow \ Incompatible}}$$

b)

Resolvemos en el caso de compatible indeterminado para k = 2.

El sistema resulta $\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$; despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando la variable z:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \ \underline{z = \lambda} \ \Rightarrow \ \left.\begin{matrix} x + 3y = -1 - 2\lambda \\ x - 2y = 3 + \lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x + 3y = -1 - 2\lambda \\ -x + 2y = -3 - \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 5y = -4 - 3\lambda \ ;;$$

$$\underline{y = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda} \ ;; \ \left.\begin{matrix} 2x + 6y = -2 - 4\lambda \\ 3x - 6y = 9 + 3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 5x = 7 - \lambda \ ;; \ \underline{x = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda \qquad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****

4º) a) Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

b) Determina una función F(x) tal que su derivada sea f(x) y además F(0) = 4.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{(6x+1)(x^2+1)-(3x^2+x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^3+6x+x^2+1-6x^3-2x^2-6x}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\underline{\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}}=\underline{\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\ ;;\ 1-x^2=0\ ;;\ \underline{x_1=1}\ ;;\ \underline{x_2=-1}$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y si es negativa, de un máximo:

$$f''(1)=\frac{2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo relativo para } x=1}$$

$$f(1)=\frac{3+1+3}{1^2+1}=\frac{7}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Máximo relativo}: P\left(1,\ \frac{7}{2}\right)}}$$

$$f''(-1)=\frac{-2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=-1}$$

$$f(-1)=\frac{3-1+3}{(-1)^2+1}=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}: Q\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)}}$$

b)

F(x) representa a las infinitas funciones primitivas de f(x), o sea:

$$F(x)=\int \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}\cdot dx=\int \frac{(3x^2+3)+x}{x^2+1}\cdot dx=\int\left(3+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot dx=3\int dx+\int \frac{x}{x^2+1}\cdot dx=$$

$$=\underline{3x+I=F(x)\quad (*)}$$

$$I=\int \frac{x}{x^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+1=t \\ 2x\,dx=dt \end{matrix}\right\| \; x\,dx=\frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\,L\;t+C=\underline{\frac{1}{2}\,L\,(x^2+1)+C=I}$$

Sustituyendo el valor de I en la expresión (*): $\underline{F(x)=3x+\frac{1}{2}\,L\,(x^2+1)+C}$

Teniendo en cuenta que tiene que ser F(0) = 4:

$$F(0)=3\cdot 0+\frac{1}{2}\,L\,(0^2+1)+C=4\;\;;;\;\;\frac{1}{2}\,L\,1+C=4\;\;;;\;\;\frac{1}{2}\cdot 0+C=4\Rightarrow \underline{C=4}$$

$$\underline{\underline{F(x)=3x+4+\frac{1}{2}\,L\,(x^2+1)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula una matriz cuadrada X sabiendo que se verifica $X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$.

Una forma de resolver el problema es la siguiente:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{I = A^2}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{2I = B \cdot A}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en la ecuación dada resulta:

$$X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2 \;\Rightarrow\; X \cdot I + 2I = I \;;;\; \underline{\underline{X = -I}}$$

Otra forma de resolver el problema es la siguiente:

$X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$. Multiplicando por la derecha por A^{-1}, queda:

$$X \cdot A^2 \cdot A^{-1} + B \cdot A \cdot A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} \;;;\; X \cdot A + B \cdot I = A \;;;\; X \cdot A + B = A.$$

Multiplicando, de nuevo por la derecha por A^{-1}, resulta:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} + B \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \;;;\; X \cdot I + B \cdot A^{-1} = I \;;;\; X + B \cdot A^{-1} = I \;;;$$

$$\underline{X = I - B \cdot A^{-1}} \qquad (*)$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; |A| = 1 \;;;\; Adj.\ A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Sustituyendo en (*) y operando:

$$X = I - B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I - 2I = \underline{\underline{-I = X}}$$

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax+y+bz=1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

----

a)

El rango de las matrices de coeficientes y ampliada del sistema dado, que es de dos ecuaciones con tres incógnitas es 2, por lo cual resulta compatible indeterminado.

Para que el sistema resultante de añadir la ecuación $ax+y+bz=1$ siga siendo compatible indeterminado es necesario que el rango de las nuevas matrices de coeficientes y ampliada siga siendo dos.

Las nuevas matrices son $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 1 & b \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ a & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$.

Rango de $M=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 1 & b \end{vmatrix}=0$;; $3b-6+2a+9a-1-4b=0$;;

$\underline{11a-b-7=0}$ (1)

Para que el rango de M' sea dos es necesario que todos los determinantes de orden tres que se puedan formar sean nulos:

Por ejemplo:

$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$;; $3+6-10a-9a-5-4=0$;; $-19a=0$;; $\underline{\underline{a=0}}$

Sustituyendo en (1) resulta que $\underline{\underline{b=-7}}$.

b)

Parametrizando una incógnita y resolviendo por Cramer el sistema dado:

$$\left.\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{z=\lambda} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x+2y=3+3\lambda \\ 2x+3y=5-\lambda \end{matrix}\right\}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3+3\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{9+9\lambda-10+2\lambda}{3-4}=\frac{11\lambda-1}{-1}=\underline{1-11\lambda=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+3\lambda \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{-1}=\frac{5-\lambda-6-6\lambda}{-1}=\frac{-1-7\lambda}{-1}=\underline{1+7\lambda=y}$$

Como la suma de las soluciones tiene que ser 4:

$$x+y+z=4 \Rightarrow (1-11\lambda)+(1+7\lambda)+\lambda=4 \ ;; \ 2-3\lambda=4 \ ;; \ 3\lambda=-2 \ ;; \ \underline{\lambda=-\frac{2}{3}}$$

$$Solución: \begin{cases} x=1-11\lambda=1+\frac{22}{3}=\underline{\underline{\frac{25}{3}=x}} \\ y=1+7\lambda=1-\frac{14}{3}=\underline{\underline{-\frac{11}{3}=x}} \\ z=\lambda=\underline{\underline{-\frac{2}{3}=z}} \end{cases}$$

****

3º) Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$:

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) Calcula la distancia entre el plano π y la recta s.

----

a)

Un punto y un vector director de r son P(0, 1, 2) y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ 2)$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=8+3\lambda}\ ;;\ x-2y-5=0\ ;;\ y=\frac{x-5}{2}=\frac{8+3\lambda-5}{2}=$$

$$=\frac{3+3\lambda}{2}=\underline{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda=y} \quad \Rightarrow \quad \underline{s \equiv \begin{cases} x=8+3\lambda \\ y=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un vector director de s puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{w} = \left(3,\ \frac{3}{2},\ 1\right)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (6,\ 3,\ 2)$.

El plano π pedido tiene como vectores directores a los de las rectas y, por contener a r, contiene a todos sus puntos y por consiguiente a P.

La ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_x},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$-2x+3(z-2)+12(y-1)+6(z-2)-6x-2(y-1)=0\ ;;$$

$$-8x+10(y-1)+9(z-2)=0\ ;;\ -8x+10y-10+9z-18=0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 8x-10y-9z+28=0}}$$

b)

La distancia de un plano a una recta (lógicamente paralela a él; en caso contrario la distancia sería 0) es la misma que la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

Un punto de la recta s es, por ejemplo para $\lambda = 1$, Q(11, 3, 1).

La distancia de un punto $Q_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(\pi,\ Q_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv 8x - 10y - 9z + 28 = 0$ y al punto Q(11, 3, 1):

$$d(\pi,\ Q) = \frac{|8 \cdot 11 - 10 \cdot 3 - 9 \cdot 1 + 28|}{\sqrt{8^2 + (-10)^2 + (-9)^2}} = \frac{|88 - 30 - 9 + 28|}{\sqrt{64 + 100 + 81}} = \frac{|77|}{\sqrt{245}} = \frac{77\sqrt{245}}{245} = \frac{11\sqrt{245}}{35}$$

$$\underline{\underline{d(\pi,\ s) = \frac{11\sqrt{245}}{35}\ \textit{unidades}}}$$

****

4º) Sea g(x) una función continua y derivable para todo el valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0 \;\; \forall \;\; x \in (-\infty,\; 0) \cup (2,\; +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0 \;\; \forall \;\; x \in (0,\; 2)$.

ii) $g''(x) > 0 \;\; \forall \;\; x \in (1,\; 3) \;\; y \;\; g''(x) < 0 \;\; \forall \;\; x \in (-\infty,\; 1) \cup (3,\; +\infty)$.

iii) $g(-1) = 0,\;\; g(0) = 2,\;\; g(2) = 1$.

iv) $\underset{x \to -\infty}{lím}\, g(x) = -\infty \;\; y \;\; \underset{x \to +\infty}{lím}\, g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función g(x).

c) Si $G(x) = \int_0^x g(t) \cdot dt$, encontrar un valor x_0 tal que $G'(x_0) = 0$.

----

a)

La función g(x) no puede tener asíntotas verticales por el propio enunciado de la misma: “continua y derivable en R”.

La recta y = 3 es una asíntota horizontal por ser $\underset{x \to +\infty}{lím}\, g(x) = 3$.

No existen asíntotas oblicuas por ser excluyente la existencia de asíntotas horizontales y oblicuas, es decir: si existe asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua y viceversa.

b)

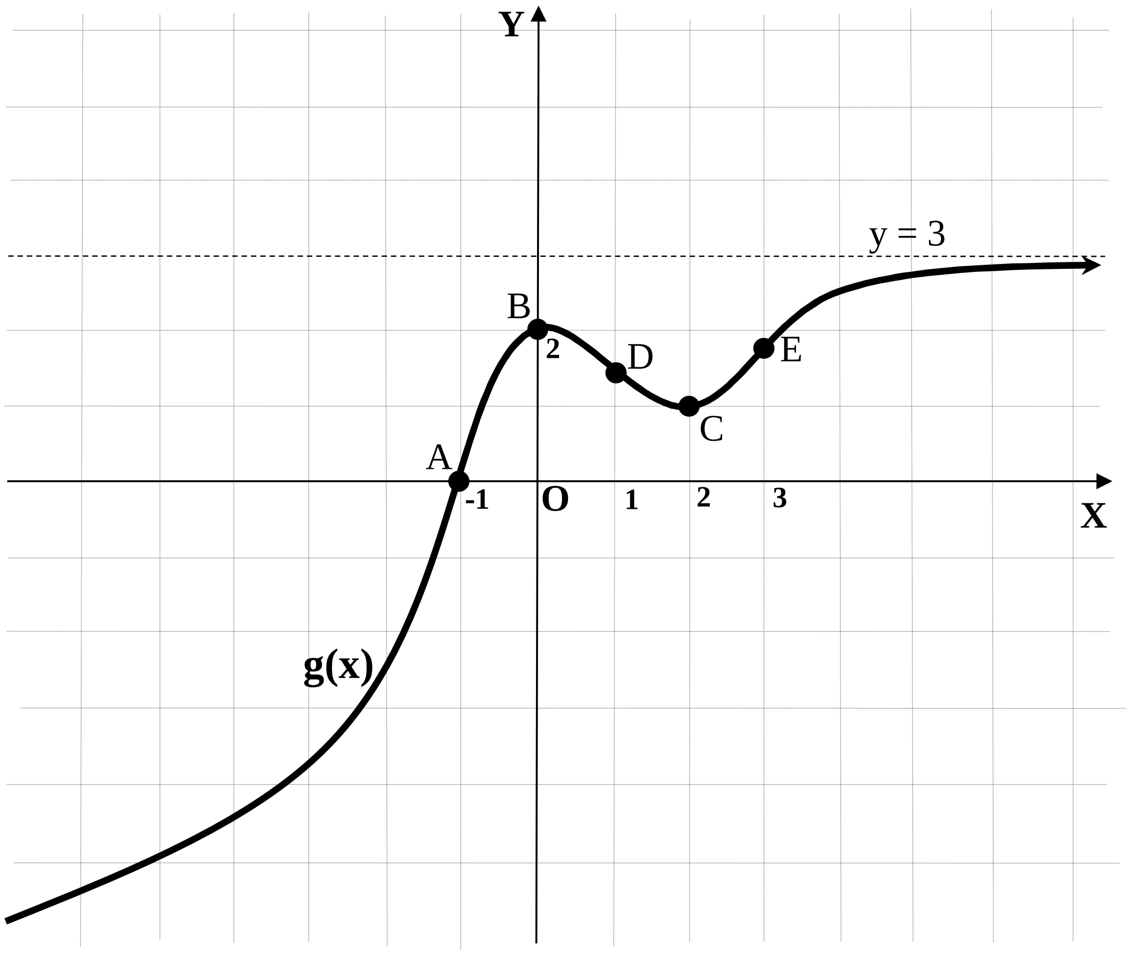
De los datos del ejercicio se deducen algunas consecuencias, como son:

1.- Los puntos de corte con los ejes son A(-1, 0) y B(0, 2).

2.- La función es creciente en $(-\infty,\; 0) \cup (2,\; +\infty)$ y decreciente en $(0,\; 2)$, lo cual implica, por ser continua la función, que existe un máximo relativo en B(0, 2) y un mínimo relativo en C(2, 1).

3.- Del apartado ii) se deduce que la función tiene puntos de inflexión en D y E que son los puntos que tienen como abscisas los valores x = 1 y x = 3.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede hacer un esbozo de la función, que es el siguiente:



c)

$$G(x)=\int_0^x g(t)\cdot dt=[g(t)]_0^t=G(x)-G(0)\ \Rightarrow\ \underline{G(0)=0}$$

Teniendo en cuenta que $G'(x)=g(x)$, tiene que ser $g(x_0)=0$ y, de la observación de la gráfica anterior se deduce que $\underline{\underline{x_0=-1}}$.

****