PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El examen presente dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

REPERTORIO A

1º) Calcular $I=\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$.

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}=\int_1^2 \frac{dx}{x(x+2)}=\int_1^2 \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}\right)\cdot dx=\int_1^2 \frac{Ax+2A+Bx}{x^2+2x}\cdot dx=\int_1^2 \frac{(A+B)x+2A}{x^2+2x}\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A=1 \end{array}\right\| \Rightarrow \underline{A=\frac{1}{2}} \;;;\; \underline{B=-\frac{1}{2}} \Bigg\} \Rightarrow I=\int_1^2 \left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+2}\right)\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int_1^2 \frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\cdot\int_1^2 \frac{dx}{x+2}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot[L\,x]_1^2-\frac{1}{2}\cdot[L(x+2)]_1^2=\frac{1}{2}\cdot(L2-L1)-\frac{1}{2}\cdot(L4-L3)=\frac{1}{2}L2-\frac{1}{2}L4+\frac{1}{2}L3=$$

$$=\frac{1}{2}(L2-L4+L3)=\frac{1}{2}(L6-L4)=\frac{1}{2}L\frac{6}{4}=\frac{1}{2}L\frac{3}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}L1'5=I}}$$

****

2º) a) Calcular a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \;\; x<0 \\ x^2+2a\cos x & si \;\; 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si \;\; x\ge\pi \end{cases}$ sea continua para todo valor real de x.

b) Estudiar la derivabilidad de f(x) para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

----

a)

Por tratarse de una función definida en tres trozos, cada uno de los cuales es una función continua en su dominio, la función dada es continua en todo R, excepto para los valores de $x=0 \;\; y \;\; x=\pi$, que debemos comprobar.

Para que f(x) sea continua en x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)=\underline{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2a\cos x\right)=\underline{2a}=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; 2=2a \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a=1}}$$

Para que f(x) sea continua en $x=\pi$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi}\left(x^2+2\cos x\right)=\underline{\pi^2-2} \\ \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi}\left(x^2+b\right)=\underline{\pi^2+b}=\underline{f(\pi)} \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; \pi^2-2=\pi^2+b \;\Rightarrow\; \underline{\underline{b=-2}}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \;\; x<0 \\ x^2+2\cos x & si \;\; 0\le x<\pi \\ x^2-2 & si \;\; x\ge\pi \end{cases} \;\Rightarrow\; f'(x)=\begin{cases} 3 & si \;\; x<0 \\ 2x-2\;sen\;x & si \;\; 0\le x<\pi \\ 2x & si \;\; x\ge\pi \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & si \;\; x<0 \\ 2x-2\;sen\;x & si \;\; 0\le x<\pi \\ 2x & si \;\; x\ge\pi \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{cases} f'(0^-)=3 \\ f'(0^+)=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \;\underline{f'(0^-)\ne f'(0^+)} \\ \left.\begin{cases} f'(\pi^-)=2\pi \\ f'(0^+)=2\pi \end{cases}\right\} \Rightarrow \;\underline{f'(\pi^-)=f'(\pi^+)} \end{array}\right.$$

$$\underline{\underline{No \;\; es \;\; derivable \;\; para \;\; x=0 \;\; y \;\; si \;\; es \;\; derivable \;\; para \;\; x=\pi}}$$

****

3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Comprobar que $\det\left(A^2\right)=[\det(A)]^2$ y que $\det(A+I)=\det(A)+\det(I)$.

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple siguiente igualdad: $\det\left(M^2\right)=[\det(M)]^2$? Razonar la respuesta.

c) Encontrar todas las matrices M, de orden 2, tales que $\det(M+I)=\det(M)+\det(I)$.

----

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^2} \;\Rightarrow\; \underline{\det\ A^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1}$$

$$\det\ A=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}=-9+8=-1 \;\Rightarrow\; \underline{(\det\ A)^2=(-1)^2=1}$$

$$\underline{\underline{\det\left(A^2\right)=[\det(A)]^2,\ \ c.q.c.}}$$

$$A+I=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det\ (A+I)=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}=-8+0=\underline{0=\det\ (A+I)}$$

$$\det\ A+\det\ I=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-9+8+1=\underline{0=\det\ A+\det\ I}$$

$$\underline{\underline{\det(A+I)=\det(A)+\det(I),\quad c.q.c.}}$$

b)

Sea $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz cuadrada genérica de orden 2.

$$M^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\det\ M^2=\begin{vmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{vmatrix}=\left(a^2+bc\right)\cdot\left(bc+d^2\right)-(ac+cd)\cdot(ab+bd)=$$

$$=a^2bc+a^2d^2+b^2c^2+bcd^2-a^2bc-abcd-abcd-bcd^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=$$

$$=\underline{(ad-bc)^2=\det\ M^2}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \;\Rightarrow\; \underline{(\det M)^2 = (ad-bc)^2}$$

$$\underline{\underline{En \;\; efecto, \;\; se \;\; puede \;\; afirmar \;\; que \;\; \det\left(M^2\right) = \left[\det(M)\right]^2, \;\; \forall\{a, \; b, \; c, \; d\} \in R}}$$

c)

Considerando la matriz anterior $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sería:

$$M + I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det(M+I) = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(d+1) - bc = \underline{ad + a + d + 1 - bc = \det(M+I)} \\ \\ \det M + \det I = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{ad - bc + 1 = \det M + \det I} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; ad + a + d + 1 - bc = ad - bc + 1 \;\; ;; \;\; a + d = 0 \;\; ;; \;\; \underline{d = -a}$$

Las matrices de orden dos que cumplen que $\det(M+I) = \det(M) + \det(I)$ son de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \;\; \forall\{a, \; b, \; c\} \in R}}$$

****

4º) Se consideran los puntos A(0, 1, 0) y B(1, 0, 1). Se pide:

a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos P(x, y, z) que equidistan de los puntos A y B.

b) Determinar la ecuación que verifica que los puntos P(x, y, z) cuya distancia al punto A es igual a la distancia de A a B.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada r por los puntos C(x, y, z) del plano $\pi \equiv x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo en A.

----

a)

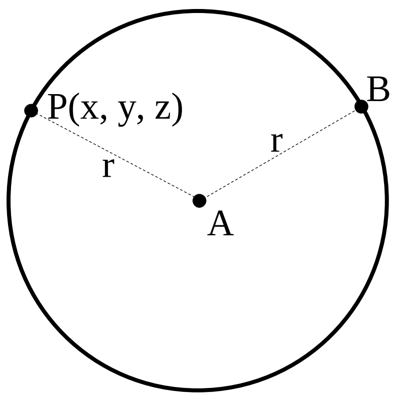
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AP}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}=\underline{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=\overline{AP}} \\ \\ \overline{BP}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2}=\underline{\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}=\overline{BP}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overline{AP}=\overline{BP} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2} \;\;;;\;\; x^2+(y-1)^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \;\;;;$$

$$x^2+y^2-2y+1+z^2=x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1 \;\;;;\;\; -2y=-2x-2z+1 \;\;;;\;\; \underline{\underline{2x-2y+2z=1}}$$

b)

Se trata de una esfera de centro en A y radio $\overline{AB}$.



$$r=\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\underline{\sqrt{3}=r}$$

Sabiendo que la ecuación de una esfera de centro en O'(a, b, c) y radio r viene dada por la fórmula:

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

Aplicada al caso que nos ocupa y conocido el radio es la siguiente:

$$\sqrt{3}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2} \;\;;;\;\; 3=x^2+(y-1)^2+z^2 \;\;;;\;\; 3=x^2+y^2-2y+1+z^2 \;\;;;$$

$$\underline{\underline{x^2+y^2+z^2-2y-2=0}}$$

c)

Los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ tienen que ser perpendiculares, por lo cual, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 1) - (0,\ 1,\ 0) = (1,\ -1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (x,\ y,\ z) - (0,\ 1,\ 0) = (x,\ y-1,\ z)$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow (1,\ -1,\ 1) \cdot (x,\ y-1,\ z) = x - y + 1 + z = 0 \ ;; \ \underline{\alpha \equiv x - y + z = -1}$$

La recta pedida es la intersección del plano α obtenido en el producto de los vectores y el plano dado π, o sea: $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$.

Para obtener unas ecuaciones paramétricas de la recta r se parametriza la variable z, con lo cual resulta finalmente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 3 - \lambda \\ x - y = -1 - \lambda \end{matrix}\right\} \ ;; \ 2x = 2 - 2\lambda \ ;; \ \underline{x = 1 - \lambda}$$

$$y = 3 - \lambda - x = 3 - \lambda - 1 + \lambda = \underline{2 = y}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****

REPERTORIO B

1º) a) Resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases}$.

b) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Los rangos de ambas matrices son dos por lo cual el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema parametrizando una de las incógnitas:

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=3\lambda \\ 2x+3y=5+\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-y=-6\lambda \\ 2x+3y=5+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=5-5\lambda}$$

$$x=3\lambda-y=3\lambda-5+5\lambda=\underline{-5+8\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-5+8\lambda \\ y=5-5\lambda \quad ,\forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

b)

Si la suma de las tres incógnitas tiene que ser 4, el valor del parámetro λ es:

$$x+y+z=-5+8\lambda+5-5\lambda+\lambda=4 \;\;;;\;\; 4\lambda=4 \;\;;;\;\; \underline{\lambda=1} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}}}$$

****

2º) a) Hallar todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tales que $A^2 = A$.

b) Para una cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado anterior, calcular la matriz $M = A + A^2 + \cdots + A^{10}$.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+0 & a^2+ab \\ 0+0 & 0+b^2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} a^2 & a(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = A^2}$$

$$A^2 = A \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} a^2 & a(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} a^2 = a \to \underline{a = \pm 1} \\ a(a+b) = 0 \to \underline{a = -b} \\ b^2 = b \to \underline{b = \pm 1} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \underline{a_1 = 1 \;;;\; b_1 = -1} \\ \\ \underline{a_2 = -1 \;;;\; b_2 = 1} \end{array}\right.$$

$$\underline{\underline{Soluciones:\; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

b)

Considerando, por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1-1 \\ 0-0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^2}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = \underline{A = A^3} \;;;\; A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = \underline{I = A^4} \;;;\; \cdots\cdots$$

$$M = A + A^2 + \cdots + A^{10} = A + I + A + I + \cdots + A + I = 5A + 5I = 5 \cdot (A + I) =$$

$$= 5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{10\,A = M}}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{2x}$, se pide:

a) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de f(x) entre $-1 \leq x \leq 1$.

----

a)

El dominio de definición es: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$

Para x = 0, y = 0. La función pasa por el origen de coordenadas.

Vamos a estudiar las asíntotas horizontales (verticales no tiene) cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^{2x}\right) = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\frac{\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (Aplicando\ L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = \frac{1}{-2e^{\infty}} = -\frac{1}{2e^{\infty}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}\ (Eje\ \ X)$$

Crecimiento y decrecimiento: máximos y mínimos:

$$y' = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = \underline{e^{2x}(1 + 2x) = y'}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1 + 2x = 0\ ;;\ \underline{x = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \to y' < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente: \left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)}} \\ x > -\frac{1}{2} \to y' > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente: \left(-\frac{1}{2},\ +\infty\right)}} \end{cases}$$

$$y'' = 2e^{2x} \cdot (1 + 2x) + e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}(2 + 2x) = \underline{4e^{2x}(1 + x) = y''} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{e} \cdot \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2e}\right)}}$$

$$y\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-1} = -\frac{1}{2e} \to \to \to \to \to \uparrow$$

Concavidad y convexidad: puntos de inflexión:

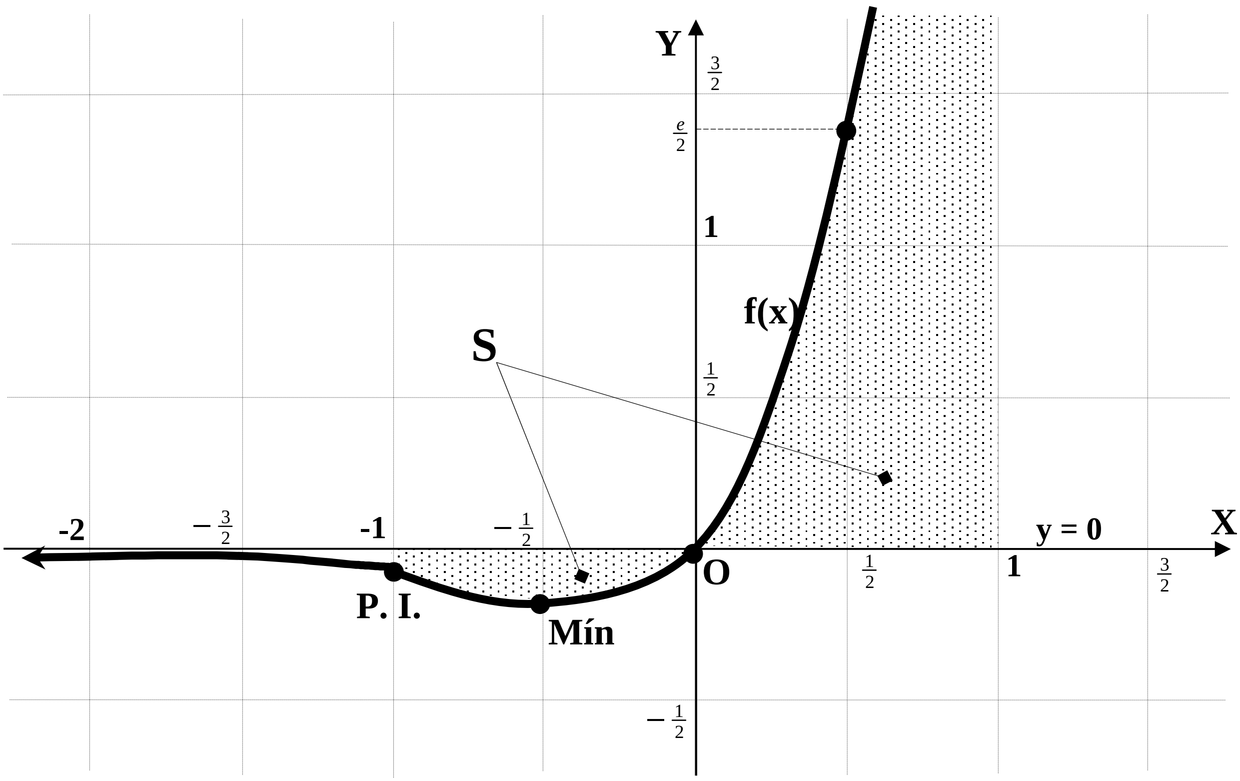
$$y'' = 4e^{2x}(1 + x)\ ;;\ y'' = 0 \Rightarrow 1 + x = 0\ ;;\ \underline{x = -1} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \to y'' < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Convexa: (-\infty,\ -1)}}\ \ (\cup) \\ x > -1 \to y'' > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Cóncava: (-1,\ +\infty)}}\ \ (\cap) \end{cases}$$

$$y''' = 4 \cdot \left[2e^{2x} \cdot (1+x) + e^{2x} \cdot 1\right] = 4e^{2x} \cdot (2x+3) \Rightarrow y'''_{(-1)} = 4 \cdot e^{-2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)}}$$

$$y(-1) = -1 \cdot e^{-2} = -\frac{1}{e^2} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$$

Para la representación gráfica formamos una tabla de valores que nos facilite su ejecución:

x	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$
y	0	$-\frac{1}{2e}$	$-\frac{1}{e^2}$	e^2	$\frac{e}{2}$
		Mín	P. I.		



b)

$$S = \int_0^{-1} f(x) \cdot dx + \int_0^1 f(x) \cdot dx = [F(x)]_0^{-1} + [F(x)]_0^1 = F(-1) - F(0) + F(1) - F(0) =$$

$$= \underline{F(-1) + F(1) - 2F(0) = S} \qquad (*)$$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int x \cdot e^{2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = u \rightarrow dx = du \\ e^{2x} \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} = \underline{\frac{e^{2x}}{4}(2x-1) = F(x)}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de F(x), resulta:

$$S = F(-1) + F(1) - 2F(0) = \left[\frac{e^{-2}}{4}(-2-1)\right] + \left[\frac{e^{2}}{4}(2-1)\right] - 2 \cdot \left[\frac{e^{0}}{4}(0-1)\right] = -\frac{3}{4e^{2}} + \frac{e^{2}}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{e^{4} + 2e^{2} - 3}{4e^{2}} \cong \frac{55'00 + 14'78 - 3}{29'56} = \frac{66'78}{29'56} = \underline{\underline{2'26\ u^{2} = S}}$$

****

4º) Un plano π corta a los ejes en los puntos A(1, 0, 0), $B(0,\ \lambda,\ 0)$ y C(0, 0, 4). Se pide:

a) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro OABC (donde O es el origen), sea 2.

b) Para el valor de λ obtenido es al apartado anterior, calcular la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O.

----

a) El tetraedro lo definen los vectores $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (1,\ 0,\ 0) \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (0,\ \lambda,\ 0) \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = (0,\ 0,\ 4) \end{cases}$.

Sabiendo que el volumen de un paralelepípedo es, en valor absoluto, el producto mixto de los vectores que lo determinan y que el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo, el volumen pedido es el siguiente:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left[\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right] = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |\,4\lambda\,| = \frac{2\lambda}{3} = 2 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\lambda = 3}}$$

b)

La altura pedida es la distancia del plano π que determinan los puntos A, B y C al origen de coordenadas.

Los puntos A(1, 0, 0), $B(0,\ 3,\ 0)$ y C(0, 0, 4) determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 3,\ 0)$ y $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-1,\ 0,\ 4)$.

La ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{p},\ \overrightarrow{q}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 12(x-1) + 3z + 4y = 0 \ ;; \ \underline{\pi \equiv 12x + 4y + 3z - 12 = 0}.$$

Sabiendo que la distancia de un punto genérico $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\ \alpha) = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, tratándose del origen de coordenadas, la fórmula es: $d(O,\ \alpha) = \frac{|\,D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

En el caso que nos ocupa es: $h = d(O,\ \pi) = \frac{|-12|}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{144 + 16 + 9}} = \underline{\underline{\frac{12}{13}\ u = h}}$

****