PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

REPERTORIO A

1º) Sea $f(x)$ una función derivable en (0, 1) y continua en [0, 1], tal que $f(1)=0$ y $\int_0^1 2x \cdot f'(x) \cdot dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

$$I = \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \begin{cases} u = f(x) \to du = f'(x) \cdot dx \\ dx = dv \to v = x \end{cases} \Rightarrow \left[f(x) \cdot x - \int x \cdot f'(x) \cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= [f(x) \cdot x]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 2x \cdot f'(x) \cdot dx = [f(1) \cdot 1] - [f(0) \cdot 0] - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 \cdot 1 - 0 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} = I}}$$

****

2º) Calcular un polinomio de tercer grado $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica lo siguiente:

i) Tiene un máximo relativo en x = 1.

ii) Tiene un punto de inflexión en P(0, 1).

iii) Se verifica: $\int_0^1 P(x) \cdot dx = \frac{5}{4}$.

$Por\ \ i\ ) \Rightarrow P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad ;; \quad P'(1) = 0 \Rightarrow \underline{3a + 2b + c = 0} \qquad (1)$

$$Por\ \ ii\ ) \Rightarrow \begin{cases} P(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{d = 1}} \\ \\ P''(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad P''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0\ ;;\ \underline{\underline{b = 0}} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta (1) y que d = 1 y que b = 0 : $\underline{P(x) = ax^3 + cx + 1}$

$$Por\ \ iii\ ) \Rightarrow \int_0^1 P(x) \cdot dx = \frac{5}{4}\ ;;\ \int_0^1 (ax^3 + cx + 1) \cdot dx = \frac{5}{4}\ ;;\ \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{5}{4}\ ;;$$

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1\right) - 0 = \frac{5}{4}\ ;;\ a + 2c + 4 = 5\ ;;\ \underline{a + 2c = 1} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2), teniendo en cuenta que b = 0 :

$$\left.\begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + 2c = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 6a + 2c = 0 \\ -a - 2c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5a = -1\ ;;\ \underline{\underline{a = -\frac{1}{5}}} \quad ;; \quad 3a + c = 0\ ;;\ -\frac{3}{5} + c = 0\ ;;\ \underline{\underline{c = \frac{3}{5}}}$$

$$\underline{\underline{P(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1}}$$

****

3º) Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{c}(m-1)x+y+z=3\\ mx+(m-1)y+3z=2m-1\\ x+2y+(m-2)z=4\end{array}\right\}$. Se pide:

a) Discutirlo según los distintos valores de m.

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

$$M=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1\\ m & m-1 & 3\\ 1 & 2 & m-2\end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 & 3\\ m & m-1 & 3 & 2m-1\\ 1 & 2 & m-2 & 4\end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1\\ m & m-1 & 3\\ 1 & 2 & m-2\end{vmatrix}=(m-1)^2(m-2)+2m+3-(m-1)-6(m-1)-m(m-2)=$$

$$=(m^2-2m+1)(m-2)+2m+3-m+1-6m+6-m^2+2m=$$

$$=m^3-2m^2-2m^2+4m+m-2-3m+10-m^2=m^3-5m^2+2m+8=0$$

$\text{Re}\,solviendo\ \ por\ \ Ruffini:$

	1	-5	2	8
2		2	-6	-8
	1	-3	-4	$\boxed{0}$
-1		-1	4	
	1	-4	$\boxed{0}$	
4		4		
	1	$\boxed{0}$		

$$Para\ \left\{\begin{array}{l} m\neq -1\\ m\neq 2\\ m\neq 4\end{array}\right\}\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas\Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ m=2-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ de\ `M'\Rightarrow \{c_1,\ c_2,\ c_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=16-6-3+6-12+4=20-15=5\neq 0$$

$$Para\ \ m=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ `M' \Rightarrow \{c_1,\ c_2,\ c_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4+12+3-3-6-8=19-17=2 \neq 0$$

$$Para\ \ m=4 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ `M' \Rightarrow \{c_1,\ c_2,\ c_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 36+24+7-9-42-6=67-67=0$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} m=-1 \\ m=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=4 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow\ Cmpatible\ \ In\det erminado}}$$

b) Resolvemos para x = 4. Despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo, la tercera, resultando el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 3x+y+z=3 \\ 4x+3y+3z=7 \end{matrix}\right\}\ Parametrizando\ \ \underline{z=\lambda},\ \ resulta:$$

$$\left.\begin{matrix} 3x+y=3-\lambda \\ 4x+3y=7-3\lambda \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} 9x+3y=9-3\lambda \\ -4x-3y=-7+3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x=2\ \ ;;\ \ \underline{x=\frac{2}{5}}\ \ ;;$$

$$3x+y=3-\lambda\ \ ;;\ \ \frac{6}{5}+y=3-\lambda\ \ ;;\ \ \underline{y=\frac{9}{5}-\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \left\{x=\frac{2}{5}\ \ ;;\ \ y=\frac{9}{5}-\lambda\ \ ;;\ \ z=\lambda\right.}}$$

Dando valores a λ se obtienen tantos grupos de soluciones como se deseen, por ejemplo:

$$Para\ \ \lambda=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=\frac{2}{5};\ y=\frac{9}{5};\ z=0}}\ \ ;;\ \ Para\ \ \lambda=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=\frac{2}{5};\ y=\frac{4}{5};\ z=1}}\ \ ;;\ \ \cdots\cdots$$

****

4º) Dado el punto P(1, 3, -1), se pide:

a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos X(x, y, z) cuya distancia a P sea igual a 3.

b) Calcular los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$ cuya distancia a P es igual a 3.

P(1, 3, -1) ;; X(x, y, z).

$$\overline{PX} = 3 \ \Rightarrow \ \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = 3 \ ;; \ (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 = 9 \ ;; \ \underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 2 = 0}}$$

Se trata de una esfera de radio 3 y centro el punto P(1, 3, -1).

b) Los puntos de la recta r que equidistan del punto P(1, 3, -1) 3 unidades son la intersección de la recta r con la esfera obtenida en el apartado anterior, o sea:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (1-4\lambda)^2 - 2 \cdot (3\lambda) - 6(1+\lambda) + 2(1-4\lambda) + 2 = 0 \ ;;$$

$$9\lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 8\lambda + 16\lambda^2 - 6\lambda - 6 - 6\lambda + 2 - 8\lambda + 2 = 0 \ ;;$$

$$26\lambda^2 - 26\lambda = 0 \ ;; \ 26\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lambda_1 = 0} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P_1(0,\ 1\ 1)}} \\ \underline{\lambda_2 = 1} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P_2(3,\ 2,\ -3)}} \end{cases}$$

****

REPERTORIO B

1º) a) Resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\}$.

b) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación $5x+y+\alpha z=\beta$, el sistema sea compatible indeterminado.

----

a)

Parametrizando la variable z, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=1-3\lambda \\ 2x+y=2+\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -x-2y=-1+3\lambda \\ 4x+2y=4+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=3+5\lambda \;\;;;$$

$$\underline{x=1+\frac{5}{3}\lambda} \;\;;;\;\; 2x+y=2+\lambda \;;;\; y=2+\lambda-2-\frac{10}{3}\lambda \;;;\; \underline{y=-\frac{7}{3}\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=1+\frac{5}{3}\lambda \;\;;;\;\; y=-\frac{7}{3}\lambda \;\;;;\;\; z=\lambda \end{cases}}}$$

Dando valores a λ se obtienen tantos grupos de soluciones como se deseen, por ejemplo:

$$Para\;\; \lambda=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1;\;\; y=0;\;\; z=0}} \;;;\; Para\;\; \lambda=3 \Rightarrow \underline{\underline{x=6;\;\; y=-7;\;\; z=3}} \;;;\; \cdots\cdots$$

b)

El sistema resultante es $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 5x+y+\alpha z=\beta \end{array}\right\}$

Para que la el sistema sea compatible indeterminado basta con que la tercera ecuación satisfaga las soluciones obtenidas en el apartado anterior, es decir:

$$5x+y=\beta-\alpha z \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\frac{5}{3}\lambda \\ y=-\frac{7}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5+\frac{25}{3}\lambda+\left(-\frac{7}{3}\lambda\right)=\beta-\alpha\lambda \;;;\; 5+6\lambda=\beta-\alpha\lambda \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\alpha=-6}} \;;;\; \underline{\underline{\beta=5}}$$

****

2º) Hallar una matriz X tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \;;;\; Adj.\ de\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \;;;\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda por A y por la derecha por A^{-1} en $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, resulta:

$$A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \;;;\; I \cdot X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1} \;;;\; \underline{X = A \cdot B \cdot A^{-1}} \;\Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & -3+1 \\ -2-2 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & 5+6 \\ -4-2 & -4-3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} = X}}$$

****

3º) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$ b) $\lim_{x \to \infty} \left[x \cdot \left(arc\ \ tag\ \ e^x - \frac{\pi}{2} \right) \right]$

----

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right)\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} \right)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} \right)^2 - \left(\sqrt{x^2 - x} \right)^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

b) $\lim_{x \to \infty} \left[x \cdot \left(arc\ \ tag\ \ e^x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \Rightarrow \infty \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \infty \cdot 0 \Rightarrow Ind. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{arc\ \ tag\ \ e^x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'\,Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{e^x}{1 + e^{2x}} - 0}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'\,Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x}{2 \cdot e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\ e^x (2 + x)}{2 \cdot e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x (2 + x)}{2 \cdot e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'\,H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2 + 2x}{2 \cdot e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'\,Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

****

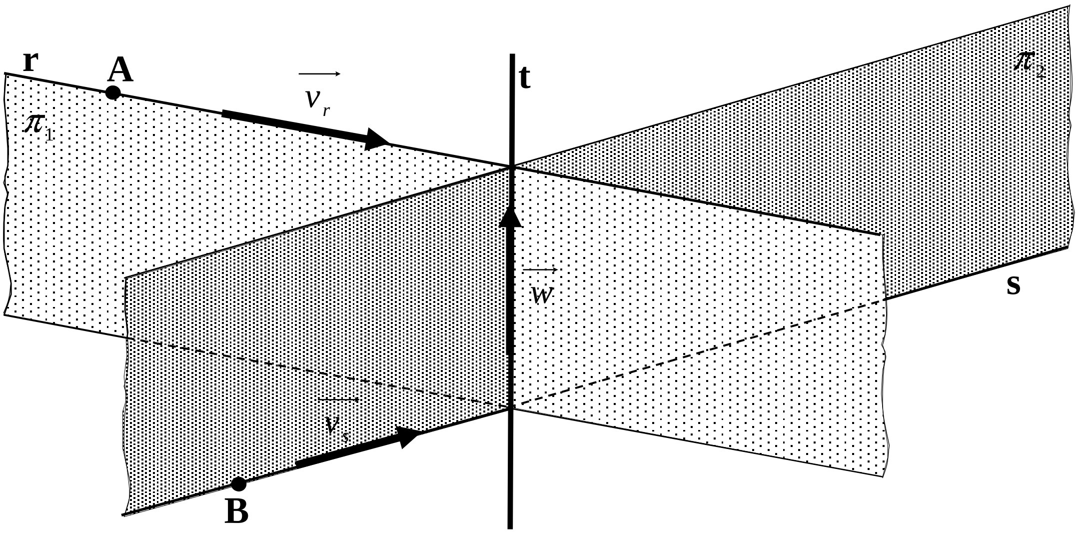
4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ y $s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$:

a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) Calcular la mínima distancia entre r y s.

----

a)



La situación del problema se refleja en el gráfico anterior.

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta t es el siguiente:

1.- Determinamos los puntos $A \in r$ y $B \in s$: A(1, 1, 1) y B(-1, 2, 0).

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 3,\ 4)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ -1,\ 2)$.

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6i - 2k + 4j - 3k + 4i - 4j = 10i - 5k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (2,\ 0,\ -1)}$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-3(x-1) + 8(y-1) - 6(z-1) + 2(y-1) = 0 \ ;; \ -3(x-1) + 10(y-1) - 6(z-1) = 0$$

$$-3x + 3 + 10y - 6z - 1 = 0 \quad ;; \quad \underline{\pi_1 \equiv 3x - 10y + 6z + 1 = 0}$$

$$\pi_2(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (x+1)+4(y-2)+2z+(y-2)=0 \ ;;$$

$$x+1+5y-10+2z=0 \quad ;; \quad \underline{\pi_2 \equiv x+5y+2z-9=0}$$

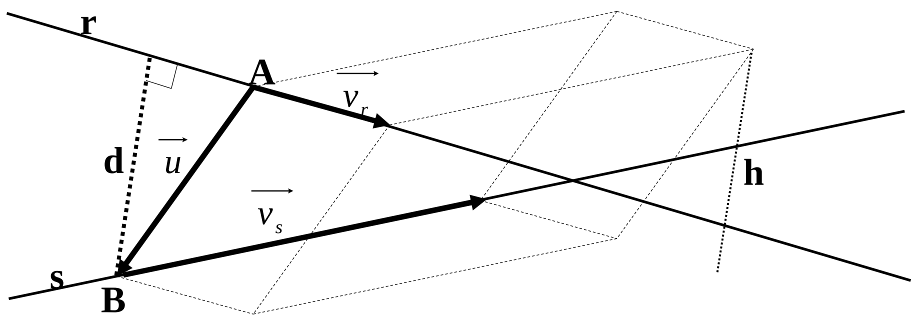
La recta pedida, t, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$t \equiv \begin{cases} 3x-10y+6z+1=0 \\ x+5y+2z-9=0 \end{cases}$$

b)

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen el punto A de r y final otro punto B de la recta s, tal como se observa en la figura.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right|}$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 2,\ 0) - (1,\ 1,\ 1) = (-2,\ 1,\ -1)$$

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-2 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{matrix}\right\|}=\frac{\left|-12+2+4+3-8-4\right|}{\left|6i-2k+4j-3k+4i-4j\right|}=\frac{\left|9-24\right|}{\left|10i-5k\right|}=$$

$$=\frac{15}{\sqrt{10^2+0^2+5^2}}=\frac{15}{\sqrt{100+0+25}}=\frac{15}{\sqrt{125}}=\frac{15}{5\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u=d}}$$

****