PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

REPERTORIO A

1º) Discutir según los valores del parámetro λ la posición relativa de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv x+y=\lambda,\ \pi_2 \equiv 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2$ y $\pi_3 \equiv 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)z=-\lambda$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que determinan son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) \end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda+6)+2(\lambda+1)(\lambda+2)+4(\lambda+6)=0\ ;;$$

$$-(\lambda^2+6\lambda-2\lambda-12)+2(\lambda^2+2\lambda+\lambda+2)+4\lambda+24=0\ ;;$$

$$-\lambda^2-4\lambda+12+2\lambda^2+6\lambda+4+4\lambda+24=0\ ;;$$

$$\lambda^2+6\lambda+40=0\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{-6\pm\sqrt{36-160}}{2}\Rightarrow \lambda\notin R}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ M=3,\ \forall\lambda\in R}$$

Como los rangos de ambas matrices son iguales e igual al número de incógnitas, es sistema que determinan es compatible y determinado, o sea, que los planos son secantes y tienen un punto en común.

$$\underline{\underline{\textit{Los tres planos se cortan en un punto, independientemente del valor de } \lambda.}}$$

****

2º) Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$:

a) Hallar la recta t, perpendicular a r y s, que pasa por el origen.

b) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a.

----

a)

Si la recta t tiene que ser perpendicular a las rectas r y s, su vector director tiene que ser perpendicular a los vectores directores de las dos rectas. Un vector que es perpendicular a dos vectores dados es su producto vectorial.

Para determinar los vectores directores de r y s las expresamos en forma de ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=3 \\ x+y=\lambda \end{matrix}\right\} \to 2x=3+\lambda \;;;\; \underline{x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda}$$

$$x+y=\lambda \;;;\; y=-x+\lambda=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda+\lambda=\underline{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda=y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\mu} \Rightarrow \underline{x=4+\mu} \;;;\; 2x-y=7 \;;;\; y=2x-7=2(4+\mu)-7=$$

$$=8+2\mu-7 \;;;\; \underline{y=1+2\mu} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=4+\mu \\ y=1+2\mu \\ z=\mu \end{cases}}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 2)$ y uno de s es $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 2,\ 1)$.

Un vector director de t es $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=i+2j+2k-k-4i-j=$

$$=-3i+j+k=\underline{\overrightarrow{w}=(-3,\ 1,\ 1)}$$

La recta t dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x=-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}}}$

b)

El punto de intersección de las rectas s y t tiene que satisfacer las ecuaciones de ambas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \\ \\ t \equiv \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 4 + \mu = -3\alpha \\ 1 + 2\mu = \alpha \\ \mu = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + \mu = -3\mu \ ;; \ 4 = -4\mu \ ;; \ \underline{\mu = \alpha = -1}$$

$$\underline{\underline{P(3,\ -1,\ -1)}}$$

****

3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha \cdot A + \beta \cdot I$.

b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) Hallar todas las matrices X que satisfacen: $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

----

a)

$$A^2 = \alpha \cdot A + \beta \cdot I \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} \alpha+\beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}} \;;;\; \underline{\underline{\beta = -1}}$$

b)

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+4 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}. \quad \underline{En\;\; general:\; A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$Para\;\; n = 5 \;\Rightarrow\; A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^5}}$$

c)

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta que el producto de matrices no tiene, en general, la propiedad conmutativa, sería:

$$(A - X)(A + X) = A^2 - X^2 \;\Rightarrow\; A^2 + A \cdot X - X \cdot A - X^2 = A^2 - X^2 \;;;\; A \cdot X - X \cdot A = 0$$

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a + 2c = a \\ b + 2d = 2a + b \\ d = 2c + d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{c = 0} \;\Rightarrow\; \underline{a = d} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\; \forall a, b \in R}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=\frac{1}{x}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $P[a,\ f(a)]$ para a > 0.

b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en al apartado a) con los ejes de coordenadas.

c) Hallar el valor de a > 0 que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en b) sea mínima.

----

a)

Para x = a, la pendiente de la recta es la derivada de la función para x = a:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ \Rightarrow\ m=f'(a)=\underline{-\frac{1}{a^2}=m}$$

El punto de tangencia es $P\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$ y la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$.

$$t\equiv y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)\ ;;\ a^2y-a=-x+a\ ;;\ \underline{\underline{t\equiv x+a^2y-2a=0}}$$

b)

Los puntos de corte de la tangente con los ejes son los siguientes.

$$Eje\ \ X\ \Rightarrow\ y=0\ \rightarrow\ x-2a=0\ ;;\ x=2a\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A(2a,\ 0)}}$$

$$Eje\ \ Y\ \Rightarrow\ x=0\ \rightarrow\ a^2y-2a=0\ ;;\ ay-2=0\ ;;\ y=\frac{2}{a}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{B\left(0,\ \frac{2}{a}\right)}}$$

c)

La distancia entre los puntos A y B es:

$$d=\overline{AB}=\sqrt{(2a-0)^2+\left(0-\frac{2}{z}\right)^2}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{a^2}}=2\sqrt{\frac{a^4+1}{a^2}}=\underline{\frac{2}{a}\sqrt{a^4+1}=d}$$

La distancia es mínima cuando su derivada sea nula:

$$d'=-\frac{2}{a^2}\cdot\sqrt{a^4+1}+\frac{2}{a}\cdot\frac{4a^3}{2\sqrt{a^4+1}}=\frac{4a^2}{\sqrt{a^4+1}}-\frac{2\sqrt{a^4+1}}{a^2}=\frac{4a^4-2(a^4+1)}{a^2\sqrt{a^4+1}}=$$

$$=\frac{4a^4-2a^4-2}{a^2\sqrt{a^4+1}}=\frac{2a^4-2}{a^2\sqrt{a^4+1}}=\underline{\frac{2(a^4-1)}{a^2\sqrt{a^4+1}}=d'}$$

$$d' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2\left(a^4 - 1\right)}{a^2\sqrt{a^4+1}} = 0 \;\;;;\; a^4 - 1 = 0 \;\;;;\; Por\;\; ser\;\; a > 1 \Rightarrow Solución\;\; única:\; \underline{a = 1}$$

Vamos a justificar que se trata de un mínimo para a = 1:

$$d'' = \frac{8a^3 \cdot \left(a^2\sqrt{a^4+1}\right) - 2\left(a^4-1\right) \cdot \left[2a \cdot \sqrt{a^4+1} + a^2 \cdot \frac{4a^3}{2\sqrt{a^4+1}}\right]}{a^4\left(a^4+1\right)} =$$

$$= \frac{8a^5\sqrt{a^4+1} - 2\left(a^4-1\right) \cdot \left[\frac{4a\left(a^4+1\right) + 4a^5}{2\sqrt{a^4+1}}\right]}{a^4\left(a^4+1\right)} = \frac{8a^5\sqrt{a^4+1} - \frac{2\left(a^4-1\right)\left(8a^5+4a\right)}{2\sqrt{a^4+1}}}{a^4\left(a^4+1\right)} =$$

$$= \frac{8a^5\left(a^4+1\right) - 2\left(8a^9 + 4a^5 - 8a^5 - 4a\right)}{2a^4\left(a^4+1\right)\sqrt{a^4+1}} = \frac{8a^9 + 8a^5 - 16a^9 + 8a^5 + 8a}{2a^4\left(a^4+1\right)\sqrt{a^4+1}} = \frac{-8a^9 + 16a^5 + 8a}{2a^4\left(a^4+1\right)\sqrt{a^4+1}} =$$

$$= \underline{\frac{-4a^8 + 8a^4 + 4}{a^3\left(a^4+1\right)\sqrt{a^4+1}} = d''} \quad \Rightarrow d''_{(1)} = \frac{-4+8+4}{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo,\;\; c.q.j.}$$

Siendo $d = \overline{AB} = \frac{2}{a}\sqrt{a^4+1}$, para a = 1 resulta, finalmente:

$$\underline{\underline{d = \overline{AB} = 2\sqrt{2}\;\; u}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Dada la función $f(x) = L\frac{x^2}{x-1}$ donde L significa logaritmo neperiano, definida para x > 1, hallar un punto $P[a,\ f(a)]$ tal que la recta tangente a la gráfica de f(x) en ese punto sea paralela al eje OX.

La recta tangente tiene como pendiente la derivada de la función en ese punto y, como tiene que ser paralela al eje OX, su valor tiene que ser cero, con lo cual se tiene:

$$f(x) = L\frac{x^2}{x-1} = L\,x^2 - L(x-1) = 2L\,x - L(x-1)\ ;;$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2-x}{x(x-1)} = \underline{\frac{x-2}{x(x-1)} = f'(x)}\ ;;\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x-2=0\ ;;\ \underline{x=2}$$

$$f(2) = L\frac{2^2}{2-1} = L\,2^2 = 2L\,2 \quad \Rightarrow \quad \underline{P(2,\ 2L\,2)}$$

$$y - y_0 = m(x-x_0) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} P(2,\ 2L\,2) \\ m=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow t \equiv y - 2L\,2 = 0 \cdot (x-2)\ ;;\ \underline{\underline{t \equiv y - 2L\,2 = 0}}$$

****

2º) Se considera la función $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, se pide:

a) Calcular los extremos locales y/o globales de la función f(x).

b) Determinar el valor del parámetro a tal que: $\int_0^a f(x)\cdot dx=\frac{1}{4}$.

----

a)

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(1+e^x)^2-e^x\cdot 2(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4}=\frac{e^x\cdot(1+e^x)-2e^{2x}}{(1+e^x)^3}=\frac{e^x\cdot(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^3}=$$

$$=\underline{\frac{e^x\cdot(1-e^x)}{(1+e^x)^3}=f'(x)}$$

La función tiene un máximo o un mínimo relativos cuando la derivada es cero.

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{e^x\cdot(1-e^x)}{(1+e^x)^3}=0\ ;;\ 1-e^x=0\ ;;\ e^x=1\ ;;\ \underline{x=0}$$

$$f''(x)=\frac{\left[e^x\cdot(1-e^x)+e^x\cdot(-e^x)\right]\cdot(1+e^x)^3-e^x\cdot(1-e^x)\cdot\left[3\cdot(1+e^x)^2\cdot e^x\right]}{(1+e^x)^6}=$$

$$=\frac{e^x(1-e^x-e^x)\cdot(1+e^x)-3e^{2x}\cdot(1-e^x)}{(1+e^x)^4}=\frac{e^x\left[(1-2e^x)(1+e^x)-3e^x(1-e^x)\right]}{(1+e^x)^4}=$$

$$=\frac{e^x(1+e^x-2e^x-2e^{2x}-3e^x+3e^{2x})}{(1+e^x)^4}=\underline{\frac{e^x(1-4e^x+e^{2x})}{(1+e^x)^4}=f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{e^0(1-4e^0+e^0)}{(1+e^0)^4}=\frac{1\cdot(1-4+1)}{(1+1)^4}=\frac{-2}{2^4}=-\frac{1}{8}<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo para } x=0}$$

$$f(0)=\frac{e^0}{(1+e^0)^2}=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Máx.}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)}}$$

b)

$$\int_0^a f(x)\cdot dx=\frac{1}{4}\ ;;\ \int_0^a\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}1+e^x=t\\ e^x\,dx=dt\end{array}\right\|\begin{array}{c}x=a\rightarrow t=1+e^a\\ x=0\rightarrow t=2\end{array}\Bigg\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_2^{1+e^a} \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_2^{1+e^a} = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^{1+e^a} = -\frac{1}{1+e^a} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4} \;\; ;; \;\; \frac{1+e^a-2}{2(1+e^a)} = \frac{1}{4} \;\; ;;$$

$$\frac{e^a-1}{1+e^a} = \frac{1}{4} \;\; ;; \;\; 1+e^a = 4e^a - 4 \;\; ;; \;\; 3e^a = 5 \;\; ;; \;\; e^a = \frac{5}{3} \;\; ;; \;\; a = L\frac{5}{3} = \underline{\underline{L5 - L3 = a}}$$

****

3º) Se considera la familia de planos $mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$, se pide:

a) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto P(1, 1, 0).

c) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$.

----

a)

Teniendo en cuanta que un haz de planos se puede determinar por dos de ellos y que una recta se define como intersección de dos planos, para determinar la recta común o eje del haz de planos, basta con dar a m dos valores distintos, por ejemplo, para m = 0 y m = 1:

$$mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \rightarrow -2y+3z+1=0 \\ \\ m=1 \rightarrow x-y+6z+2=0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} 2y-3z-1=0 \\ x-y+6z+2=0 \end{cases}}}$$

b)

El plano del haz que contiene al punto P(1, 1, 0) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0 \\ \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow m+(m-2)+(m+1)=0\ ;;\ 3m=1\ ;;\ \underline{m=\frac{1}{3}}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de haz se obtiene el plano pedido:

$$\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}-2\right)y+3\left(\frac{1}{3}+1\right)z+\left(\frac{1}{3}+1\right)=0\ ;;\ \frac{1}{3}x-\frac{5}{3}y+4z+\frac{4}{3}=0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-5y+12z+4=0}}$$

c)

El plano del haz que es paralelo a la recta r es el que tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas r y s y contiene un punto de la recta s (eje). Para determinar estos elementos expresamos ambas rectas en su forma de ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases} \rightarrow \underline{z=\lambda} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{x=-1+2\lambda} \\ \underline{y=1+\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(2,\ 1,\ 1)}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2y - 3z - 1 = 0 \\ x - y + 6z + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{z = \mu} \rightarrow \left. \begin{matrix} 2y = 1 + 3\mu \\ x - y = -2 - 6\mu \end{matrix} \right\} \rightarrow \underline{y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu} \quad \rightarrow \quad x = y - 2 - 6\mu =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu - 2 - 6\mu = \underline{= x} \quad \Rightarrow \quad \underline{s \equiv \begin{cases} x = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\mu \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ z = \mu \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{v_s} = (-9,\ 3,\ 2) \\ \mu = 1 \rightarrow\ P(-6,\ 2,\ 1) \end{matrix} \right\}}$$

El plano pedido es el siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+6 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$2(x+6) - 9(y-2) + 6(z-1) + 9(z-1) - 3(x+6) - 4(y-2) = 0 \ ;;$$

$$-(x+6) - 13(y-2) + 15(z-1) = 0 \ ;; \ -x - 6 - 13y + 26 + 15z - 15 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + 13y - 15z + 5 = 0}}$$

****

4º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar A^{10}.

b) Hallar la matriz inversa de B.

c) En el caso particular de k = 0, hallar B^{10}.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+k^2+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\underline{A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;; \ |B| = 1 \ ;; \ B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ t & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj\left(B^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 1 \\ t & k \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & k \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}}}$$

c)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & t+0+t \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****