PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2004

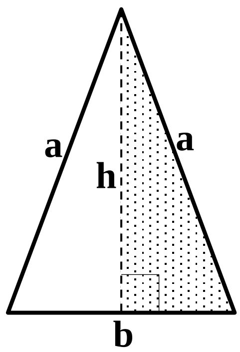
(RESUELTOS) por Antonio Menguiano.

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

REPERTORIO A

1º) Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



$$S = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow Máxima \quad ;; \quad p = 2a + b = 8 \;;\; \underline{a = \frac{8-b}{2}}$$

$$h^2 = \left(\frac{8-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{64 - 16b + b^2 - b^2}{4} = \frac{64-16b}{4} =$$

$$= 16 - 4b = 4(4-b) \;;\; h = \sqrt{4(4-b)} = \underline{2\sqrt{4-b} = h}$$

Sustituyendo el valor de h en la fórmula de la superficie, queda:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot 2\sqrt{4-b}}{2} = b\sqrt{4-b} = \underline{\sqrt{4b^2 - b^3} = S}$$

$$S' = \frac{8b - 3b^2}{2\sqrt{4b^2 - b^3}} = \frac{8b - 3b^2}{2b\sqrt{4-b}} = \frac{8-3b}{2\sqrt{4-b}} = 0 \Rightarrow 8 - 3b = 0 \;;\; \underline{\underline{b = \frac{8}{3}\ unidades}}$$

$$h = 2\sqrt{4-b} = 2\sqrt{4 - \frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{12-8}{3}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{3}\ unidades = h}}$$

****

2º) Se considera la función $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$, se pide:

a) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función f(x).

b) Calcular $\int f(x)\cdot dx$.

----

a)

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\underline{\underline{1=y}}$$

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$4x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x\notin R \;\Rightarrow\; \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Asíntotas oblicuas: No tiene. (Para que tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Máximos y mínimos.

$$f(x)=\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{(8x-4)(4x^2+1)-(4x^2-4x+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{32x^3+8x-16x^2-4-32x^3+32x^2-8x}{(4x^2+1)^2}=\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}=\underline{4\cdot\frac{4x^2-1}{(4x^2+1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 4x^2-1=0 \;;;\; 4x^2=1 \;;;\; x^2=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1=\frac{1}{2}} \\ \underline{x_2=-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$f''(x)=4\cdot\frac{8x\cdot(4x^2+1)^2-(4x^2-1)\cdot 2\cdot(4x^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^4}=$$

$$=4\cdot\frac{8x\cdot(4x^2+1)-16x(4x^2-1)}{(4x^2+1)^3}=4\cdot\frac{8x\cdot(4x^2+1-8x^2+2)}{(4x^2+1)^3}=\underline{32\cdot\frac{x(3-4x^2)}{(4x^2+1)^3}=f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right)=32\cdot\frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2^3}=4>0\Rightarrow\ Mínimo\quad ;;\quad f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{0}{2}=0\Rightarrow\ \underline{\underline{Mín\left(\frac{1}{2},\ 0\right)}}$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=32\cdot\frac{-\frac{1}{2}(3-1)}{2^3}=-4<0\Rightarrow\ Máximo\quad ;;\quad f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^2}{2}=2\Rightarrow\ \underline{\underline{Máx\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)}}$$

b)

$$\int f(x)\cdot dx=\int\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\cdot dx=\int\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+1}-\frac{4x}{4x^2+1}\right)\cdot dx=\int dx-\int\frac{4x}{4x^2+1}\cdot dx=$$

$$=x-\int\frac{4x}{4x^2+1}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}4x^2+1=t\\ 8xdx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow x-\frac{1}{2}\int\frac{8x}{4x^2+1}\cdot dx=x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=x-\frac{1}{2}\cdot Lt+C=$$

$$=x-\frac{1}{2}\cdot L\left(4x^2+1\right)+C=\underline{\underline{x-L\sqrt{4x^2+1}+C}}$$

****

3º) Dado el sistema $\left.\begin{array}{r}(1-a)x-2y+4z=0\\ x-(1+a)y+z=0\\ -x+ay-z=0\end{array}\right\}$, se pide:

a) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema anterior cuando es compatible indeterminado.

----

a) Se trata de un sistema homogéneo, por tanto, siempre es compatible ya que, al menos, admite la solución trivial x = 0, y = 0, z = 0.

$$M=M'=\begin{pmatrix}1-a & -2 & 4\\ 1 & -1-a & 1\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}\ ;;\ |M|=\begin{vmatrix}1-a & -2 & 4\\ 1 & -1-a & 1\\ -1 & a & -1\end{vmatrix}=(1-a)(1+a)+4a+$$

$$+2-4(1+a)-2-a(1-a)=1-a^2+4a-4-4a-a+a^2=-3-a=0\ \Rightarrow\ \underline{a=-3}$$

Para a = -3 resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r}4x-2y+4z=0\\ x-2y+z=0\\ -x-3y-z=0\end{array}\right\}$, equivalente a: $\left.\begin{array}{r}2x-y+2z=0\\ x-2y+z=0\\ x+3y+z=0\end{array}\right\}$.

Como puede apreciarse, la primera ecuación es la suma de las otras dos, por lo cual se puede suprimir, resultando, finalmente el sistema: $\left.\begin{array}{r}x-2y+z=0\\ x+3y+z=0\end{array}\right\}$.

$$\underline{\underline{Para\ a\neq -3\ \Rightarrow\ Rango\,M=n^{o}\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$\underline{\underline{La\ \ solución\ \ es\ \ la\ \ trivial:\ x=0\ ;;\ y=0\ ;;\ z=0}}$$

b)

Para a = -3 resulta $\left.\begin{array}{r}x-2y+z=0\\ x+3y+z=0\end{array}\right\}$. Parametrizando $\underline{z=k}$: $\left.\begin{array}{r}x-2y=-k\\ x+3y=-k\end{array}\right\}$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-k & -2\\ -k & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-3k-2k}{3+2}=\frac{-5k}{5}=\underline{\underline{-k=x}}\ ;;\ x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -k\\ 1 & -k\end{vmatrix}}{5}=\frac{-k+k}{5}=\frac{0}{5}=\underline{\underline{0=y}}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = -k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}}}$$

****

4º) Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \;;;\; \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \;;;\; \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0, \text{ se pide:}$$

a) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) Calcular la distancia de r a π_2.

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (-3,\ 2,\ -1)$.

Los vectores normales de los planos son: $\overrightarrow{n_1} = (-3,\ 2,\ -1)$;; $\overrightarrow{n_2} = (2,\ 2,\ -2)$

Como puede observarse, el vector director de la recta es el mismo que el normal del plano π_1, lo cual significa que r es perpendicular al plano π_1.

Con respecto al plano π_2, observamos que el producto escalar del vector director de la recta y el normal al plano es cero: $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n_2} = (-3,\ 2,\ -1) \cdot (2,\ 2,\ -2) = -6 + 4 + 2 = 0$.

Esto significa que la recta r es paralela al plano π_2 o está contenida en él.

Para diferenciar el caso, tomamos dos puntos de la recta r y verificamos si ambos pertenecen al plano; sean los puntos de r, P(2, 1, 4) y Q(-1, 3, 3):

$$\left.\begin{array}{l} P(2,\ 1,\ 4) \\ \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{P \notin \pi_2}$$

$$\underline{\underline{\textit{La recta r es perpendicular a } \pi_1 \textit{ y paralela a } \pi_2}}$$

b)

Por ser los vectores $\overrightarrow{n_1} = (-3,\ 2,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ 2,\ -2)$ linealmente independientes son secantes y por ser el producto de sus vectores normales igual a cero, son perpendiculares.

$$\underline{\underline{\textit{Los planos } \pi_1 \textit{ y } \pi_2 \textit{ son perpendiculares}}}$$

c)

La distancia de r a π_2 es la misma que la de un punto de r al plano:

$$d(P,\ \pi)=\frac{|\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} P(2,\ 1,\ 4) \\ \pi_2 \equiv 2x+2y-2z+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d(r,\ \pi_2)=d(P,\ \pi_2)=\frac{|\ 2\cdot 2+2\cdot 1-2\cdot 4+3|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{|4+2-8+3|}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{6}\ u=d(r,\ \pi_2)}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar A^{-1}.

b) Hallar la matriz X, tal que: $A \cdot X \cdot A^T = B$, donde A^T significa la matriz traspuesta de A.

----

a)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \;;;\; |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=\underline{1=|A|} \;;;$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Adj\,(A^T)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=A^{-1}}}$$

b)

$A \cdot X \cdot A^T = B$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por $\left(A^{-1}\right)^T$, teniendo en cuenta que $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$, queda:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A^T\cdot\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^{-1}\right)^T \;;;\; I\cdot X\cdot I=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^{-1}\right)^T \;;;$$

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot\left(A^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}=X}}$$

****

2º) a) Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

----

a)

La solución de un sistema de ecuaciones no se altera si se añade o elimina una ecuación que sea combinación lineal de dos de las ecuaciones. Así pues, basta con añadir, por ejemplo, la ecuación suma de las dos dadas:

$$\underline{\underline{\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \\ 4x+y=3 \end{array}\right\}}}$$

Geométricamente significan lo siguiente: las dos ecuaciones que forman el sistema son las ecuaciones de dos rectas en el plano que, por ser linealmente independientes, se cortan en un punto (que es la solución del sistema); la tercera ecuación, por compartir la solución, también pasa por el punto de corte. Las posibles infinitas soluciones constituyen el haz de rectas del plano que definen las dos rectas dadas.

b)

Con el mismo razonamiento del apartado anterior, resulta:

$$\underline{\underline{\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=1 \\ 3x+3y+z=2 \end{array}\right\}}}$$

Geométricamente significan lo siguiente: las ecuaciones dadas representan a dos planos que, por ser linealmente independientes, se cortan en una recta (que es la solución del sistema); la tercera ecuación, por compartir la solución, representa a un plano que también contiene a la recta que definen las ecuaciones primitivas. Las posibles infinitas soluciones constituyen el haz de planos que definen los dos planos que representan las ecuaciones dadas.

****

3º)

a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+kz=3 \\ \pi_2 \equiv x+ky-z=-1 \\ \pi_3 \equiv 3x+y-3z=-k \end{cases}$.

b) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & k & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -k \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & k & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-6k+k-9-3k^2+2+9=-3k^2-5k+2=0 \;;;\; 3k^2+5k+2=0$$

$$k=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6} \Rightarrow \begin{cases} \underline{k_1=\frac{1}{3}} \\ \underline{k_2=-2} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} k\neq\frac{1}{3} \\ k\neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M = Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ \det er\min ado}$$

$$\underline{\underline{Los\ tres\ planos\ se\ cor\tan\ en\ un\ punto}}$$

$$Para\ k=\frac{1}{3}\ el\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 3 & 1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{9}\cdot(-2+27-81-27+18+9)=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot(27-83)=-\frac{56}{9}\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M'=3}$$

$$Para\ k=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Rango\, M=2 \\ Rango\ M'=3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{Incompatible}$$

$$\underline{\underline{No\ hay\ planos\ paralelos.\ Los\ planos\ se\ cor\tan\ dos\ a\ dos}}$$

Para k = -2 resultan los planos: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y-2z=3 \\ \pi_2 \equiv x-2y-z=-1 \\ \pi_3 \equiv 3x+y-3z=2 \end{cases}$.

Observemos que $\pi_3 = \pi_1 + \pi_2$, lo cual significa que:

$$\underline{\underline{\textit{Para } k=-2 \textit{ los tres planos se cortan en una recta.}}}$$

b)

La recta r que determinan los planos se obtiene tomando dos cualesquiera de ellos, por ejemplo, los dos primeros: $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ x-2y-z=-1 \end{cases}$.

Para obtener un vector director, expresamos r en unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ x-2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=t} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=3+2t \\ x-2y=-1+t \end{cases} \;;;\; \begin{cases} 2x+3y=3+2t \\ -2x+4y=2-2t \end{cases} \Rightarrow 7y=5 \;;;\; \underline{y=\frac{5}{7}}$$

$$x-2y=-1+t \;;;\; x=-1+t+2\cdot\frac{5}{7}=-1+\frac{10}{7}+t=\underline{\frac{3}{7}+t=x} \;\Rightarrow\; r \equiv \begin{cases} x=\frac{3}{7}+t \\ y=\frac{5}{7} \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}=(1,\,0,\,1)}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=1-x^2$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P[a,\ f(a)]$, donde $0<a<1$.

b) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal, respectivamente.

c) Determinar el valor de a perteneciente al intervalo (0, 1) para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P[a,\ f(a)]$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P[a,\ f(a)]$.

----

a)

$$f(x)=1-x^2 \Rightarrow f(a)=1-a^2 \Rightarrow \underline{P(a,\ 1-a^2)}$$

Sabiendo que la pendiente a una función en un punto es la derivada de la función en ese punto:

$$f(x)=1-x^2 \ ;;\ f'(x)=-2x \ ;;\ m=f'(a)=\underline{-2a=m}$$

La ecuación de una recta conocida la pendiente es: $y-y_0=m(x-x_0)$, así queda:

$$y-(1-a^2)=-2a(x-a) \ ;;\ y-1+a^2=-2ax+2a^2 \ ;;\ Tangente:\ \underline{\underline{t \equiv y+2ax-(1+a^2)=0}}$$

b)

Una forma rápida de hallar los puntos de corte con los ejes es expresando la recta en forma canónica o segmentaria:

$$t \equiv y+2ax-(1+a^2)=0 \ \Rightarrow\ \frac{x}{\frac{1+a^2}{2a}}+\frac{y}{1+a^2}=1 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{B\left(\frac{1+a^2}{2a},\ 0\right)}} \ ;;\ \underline{\underline{A(0,\ 1+a^2)}}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} A(0,\ 1+a^2) \\ \\ B\left(\dfrac{1+a^2}{2a},\ 0\right) \\ \\ P(a,\ 1-a^2) \end{array}\right\} \Rightarrow\ \overline{AP}=2\cdot\overline{BP}$$

$$\overline{AP}=\sqrt{(a-0)^2+\left[\left(1-a^2\right)-\left(1-a^2\right)\right]^2}=\sqrt{a^2+\left(1-a^2-1-a^2\right)^2}=\sqrt{a^2+\left(-2a^2\right)}=\sqrt{a^2+4a^4}=$$

$$=\sqrt{a^2\left(1+4a^2\right)}=\underline{a\sqrt{1+4a^2}=\overline{AP}}$$

$$\overline{BP}=\sqrt{\left(a-\frac{1+a^2}{2a}\right)^2+\left[\left(1-a^2\right)-0\right]^2}=\sqrt{\left(\frac{2a^2-1-a^2}{2a}\right)^2+\left(1-a^2\right)^2}=\sqrt{\frac{\left(a^2-1\right)^2}{4a^2}+\left(1-a^2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1-a^2\right)^2}{4a^2}+\left(1-a^2\right)^2}=\left(1-a^2\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{4a^2}+1}=\left(1-a^2\right)\cdot\sqrt{\frac{1+4a^2}{4a^2}}=\underline{\frac{1-a^2}{2a}\cdot\sqrt{1+4a^2}=\overline{BP}}$$

$$\overline{AP}=2\cdot\overline{BP}\quad\Rightarrow\quad a\cdot\sqrt{1+4a^2}=2\cdot\frac{1-a^2}{2a}\cdot\sqrt{1+4a^2}\;\;;;\;\;a=\frac{1-a^2}{a}\;\;;;\;\;a^2=1-a^2\;\;;;$$

$$2a^2=1\;\;;;\;\;a^2=\frac{1}{2}\;\;;;\;\;a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{a=\frac{\sqrt{2}}{2},\;a\in(0,1)}}$$

****