PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

REPERTORIO A

1º) Calcular los siguientes límites (donde L significa logaritmo neperiano):

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{L[\cos(3x)]}{L[\cos(2x)]} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{L[\cos(3x)]}{L[\cos(2x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{L[\cos 0]}{L[\cos 0]}=\frac{L1}{L1}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det.\Rightarrow (L'Hopital)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-3sen(3x)}{\cos(3x)}}{\dfrac{-2sen(2x)}{\cos(2x)}}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)\cdot\cos(2x)}{sen(2x)\cdot\cos(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{sen(2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)}{\cos(2x)}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{sen(2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 0}{\cos 0}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{sen(2x)}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{sen(2x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{0}{0}=$$

$$=\frac{0}{0}\Rightarrow (L'Hopital)\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{2\cos(2x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos 0}{\cos 0}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{1}=\underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{4}}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det.\Rightarrow (L'Hopital)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}-\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{4}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4}}}{4}=\frac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}{4}=\frac{\dfrac{1}{2}}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$, se pide:

a) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

---

a)

La función f puede expresarse de la forma: $f(x)=\dfrac{x^5(1-x^3)}{(1-x^3)(1-x^3)}$.

La función f es discontinua para los valores de x que anulan el denominador, por lo tanto:

$$\begin{cases} 1+x^3=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-1 \Rightarrow \textit{Continuidad inevitable de salto } \inf \textit{inito.}}} \\ 1-x^3=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1 \Rightarrow \textit{Continuidad evitable.}}} \quad (*) \end{cases}$$

(*) Para x = 1 la función tiene una discontinuidad evitable porque puede definirse otra función g(x), coincidente con f(x) en su dominio y continua para x =1, de la siguiente forma: $\underline{g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^5}{1+x^3} & si \quad x\neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad x=1 \end{cases}}$

b)

La función tiene una asíntota vertical cuando su discontinuidad es inevitable de salto infinito, por lo tanto, <u>la recta x = -1 es una asíntota vertical de f(x).</u>

****

3º) Se considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{matrix}(m+2)x+(m-1)y-z=3\\ mx-y+z=2\\ x+my-z=1\end{matrix}\right\}$, se pide:

a) Resolverlo para m = 1.

b) Discutirlo para los distintos valores de m.

---

a)

$$m=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}3x-z=3 & (1)\\ x-y+z=2 & (2)\\ x+y-z=1 & (3)\end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1)+(2) \rightarrow 4x-y=5\\ \\ (2)+(3) \rightarrow 2x=3\end{matrix} \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{3}{2}}}$$

$$4x-y=5 \;;;\; y=4x-5=6-5=\underline{\underline{1=y}} \;;;\; (3) \rightarrow z=x+y-1=\frac{3}{2}+1-1=\underline{\underline{\frac{3}{2}=z}}$$

b)

$$M=\begin{pmatrix}m+2 & m-1 & -1\\ m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{pmatrix} \;;; \quad M'=\begin{pmatrix}m+2 & m-1 & -1 & 3\\ m & -1 & 1 & 2\\ 1 & m & -1 & 1\end{pmatrix} \;;;$$

$$|M|=\begin{vmatrix}m+2 & m-1 & -1\\ m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{vmatrix}=m+2-m^2+m-1-1-m(m+2)+m(m-1)=$$

$$=2m-m^2-m^2-2m+m^2-m=-m^2-m=-m(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\underline{m_1=0}\\ \underline{m_2=-1}\end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq -1\end{cases} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ inc\acute{o}g. \Rightarrow Compatible\ Deter\min ado}}$$

$$Para\ m=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2-2+3=1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ m=0 \Rightarrow Rango\ M\neq Rango\ M' \Rightarrow Incompatible.}}$$

$$Para\ \ m=-1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ \ de\ \ M'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1+3-4+3+2-2=1\neq 0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ m=-1\ \Rightarrow\ Rango\ M\neq Rango\ M'\ \Rightarrow\ Incompatible.}}$$

****

4º) Dadas las rectas de ecuaciones $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ y $r' \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$:

a) Hallar la distancia entre r y r'.

b) Determinar la recta s, perpendicular común a r y r'.

---

a)

Un vector director de r es $\vec{u} = (3,\ -2,\ 1)$ y un director de r' es $\vec{v} = (2,\ -1,\ 2)$.

Como puede observarse, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, lo cual significa que las rectas se cruzan o se cortan; para verificar que se cruzan determinamos un tercer vector $\vec{w}$ que tenga como origen un punto de r, A(2, 1, 0) y por extremo un punto de r', B(-1, -2, 1): $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ -2,\ 1) - (2,\ 1,\ 0) = (-3,\ -3,\ 1)$.

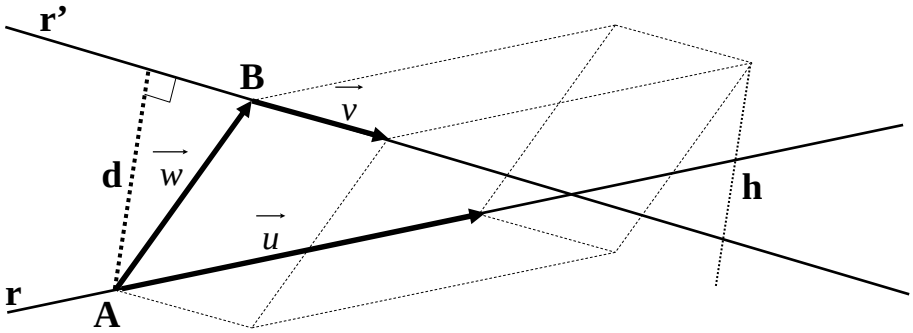
Para que las rectas se crucen es necesario que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ estén en planos diferentes, por lo tanto, el rango de $\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\}$ tiene que ser 3:

$$Rango\ de\ \{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 6 + 12 - 3 + 18 + 4 = 22 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{Rango = 3}}$$

<u>En efecto, las rectas r y r' se cruzan.</u>

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y el vector $\vec{w}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| \cdot h = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right|} = \frac{22}{\left|-4i + 2j - 3k + 4k + i - 6j\right|} = \frac{22}{\left|-3i - 4j - k\right|} =$$

$$= \frac{22}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{22}{\sqrt{9+16+1}} = \frac{22}{\sqrt{26}} = \frac{22\sqrt{26}}{26} = \underline{\underline{\frac{11\sqrt{26}}{13}\ u = d}}$$

b)

La recta s pedida, por ser perpendicular a r y r', tiene como vector director a $\vec{z}$, que es el producto vectorial de los vectores directores de r y r':

$$\vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-3,\ -4,\ -1)$$

La recta s es la intersección de los planos π que tiene como vectores directores al vector director de r y al vector $\vec{z}$, y el plano π' que tiene como vectores directores al vector director de r' y al vector $\vec{z}$:

$$\pi\left(A;\ \vec{u},\ \vec{z}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(x-2) - 3(y-1) - 12z - 6z + 4(x-2) + 3(y-1) = 0$$

$$6(x-2) - 18z = 0\ ;;\ x - 2 - 3z = 0\ ;;\ \underline{\pi \equiv x - 3z - 2 = 0}$$

$$\pi'\left(B;\ \vec{v},\ \vec{z}\right)\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$(x+1)-6(y+2)-8(z-1)-3(z-1)+8(x+1)+2(y+2)=0\ ;;$$

$$9(x+1)-4(y+2)-11(z-1)=0\ ;;\ 9x+9-4y-8-11z+11=0\ ;;$$

$$\underline{\pi'\equiv 9x-4y-11z+12=0}$$

La expresión por dos ecuaciones implícitas de s es:

$$\underline{\underline{s\equiv\begin{cases} x-3z-2=0 \\ 9x-4y-11z+12=0 \end{cases}}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_1 \to C_1 - C_2 \\ C_2 \to C_2 - C_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & b^2 \\ a-b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 \\ a-b & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a-b) = \underline{\underline{(a-b)^3}} \quad \underline{\underline{c.q.c.}}$$

****

2º) Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2 x 2 (distintas de la matriz nula), tales que: $B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

Sea $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $\{a,\ b,\ c,\ d\} \in R$, la matriz pedida.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \;;; \begin{pmatrix} a\lambda + 3b & b \\ c\lambda + 3d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 9b & 3b \\ 3c + 9d & 3d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\lambda + 3b = 3a + 3b \\ c\lambda + 3d = 3c + 9d \\ b = 3b \\ d = 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{b = 0} \\ \\ \underline{d = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\lambda = 3a \\ \\ c\lambda = 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lambda = 3,\ \forall a \in R,\ a \neq 0} \\ \\ 3c = 0 \;;; \underline{c = 0} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}} \quad ;; \quad \underline{\underline{B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

3º) Dados el plano $\pi \equiv x+3y-z-1=0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

b) Escribir unas ecuaciones paramétricas de la recta s, intersección de los planos π y π'.

---

a)

Un vector director de la recta r es $\vec{v}=(6,\ 2,\ 1)$ y un punto de r es A(-2, 1, 0).

Un vector normal o perpendicular al plano π es $\vec{w}=(1,\ 3,\ -1)$.

El plano π' pedido es el que tiene como vectores directores a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y contiene al punto A:

$$\pi'\left(A;\ \vec{v},\ \vec{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(x+2)+18z+(y-1)-2z-3(x+2)+6(y-1)=0\ ;;$$

$$-5(x+2)+7(y-1)+162z=0\ ;;\ -5x-10+7y-7+16z=0\ ;;\ \underline{\underline{\pi'\equiv 5x-7y-16z+17=0}}$$

b)

$$s\equiv\begin{cases} x+3y-z-1=0 \\ 5x-7y-16z+17=0 \end{cases}\Rightarrow \underline{z=\lambda}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3y=1+\lambda \\ 5x-7y=-17+16\lambda \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -5x-15y=-5-5\lambda \\ 5x-7y=-17+16\lambda \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -22y=-22+11\lambda\ ;;\ \underline{y=1-\frac{1}{2}\pi}\ ;;\ x=1+\lambda-3y=1+\lambda-2+\frac{3}{2}\lambda=\underline{-2+\frac{5}{2}\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{s\equiv\begin{cases} x=-2+\dfrac{5}{2}\lambda \\ y=1-\dfrac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

4º) a) Dibujar la gráfica de la función $g(x)=e^x-x$.

b) Calcular el dominio de la función $f(x)=\dfrac{1}{e^x-x}$ y su comportamiento para $x\to 8$ y para $x\to -8$.

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de f(x) en su dominio de definición.

En este ejercicio, por coherencia, no se diferencian los apartados.

Dominio: Por tratarse de una función compuesta por la suma algebraica de dos funciones continuas cuyo dominio es R, el domino de g(x) es R.

Recorrido: $[1,\ +\infty)$. (Se justifica en el apartado de máximos y mínimos relativos).

Como consecuencia de lo anterior, la función no tiene ningún valor de x para el cual es negativa.

Corte con los ejes: $\begin{cases} Eje\ \ X \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow e^x-x=0\ ;;\ e^x=x \Rightarrow x\notin R \Rightarrow \textit{No corta a } X. \\ Eje\ \ Y \ \Rightarrow\ g(0)=e^0-0=1\ ;;\ P(0,\ 1) \end{cases}$

Crecimiento: Máximos y Mínimos:

$$g'(x)=e^x-1=0\ \Rightarrow\ e^x=1\ \Rightarrow\ x=0\ \Rightarrow \begin{cases} x>0 \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow \textit{Creciente} \\ x<0 \Rightarrow g'(x)<0 \Rightarrow \textit{Decreciente} \end{cases}$$

$g''(x)=e^x>0,\ \forall x\in R\ \Rightarrow\ \textit{Míni.}\ P(0,\ 1)$

Puntos de inflexión: $g''(x)=0\ \Rightarrow e^x=0,\ x\notin R\ \Rightarrow\ \textit{No tiene P. I.}$

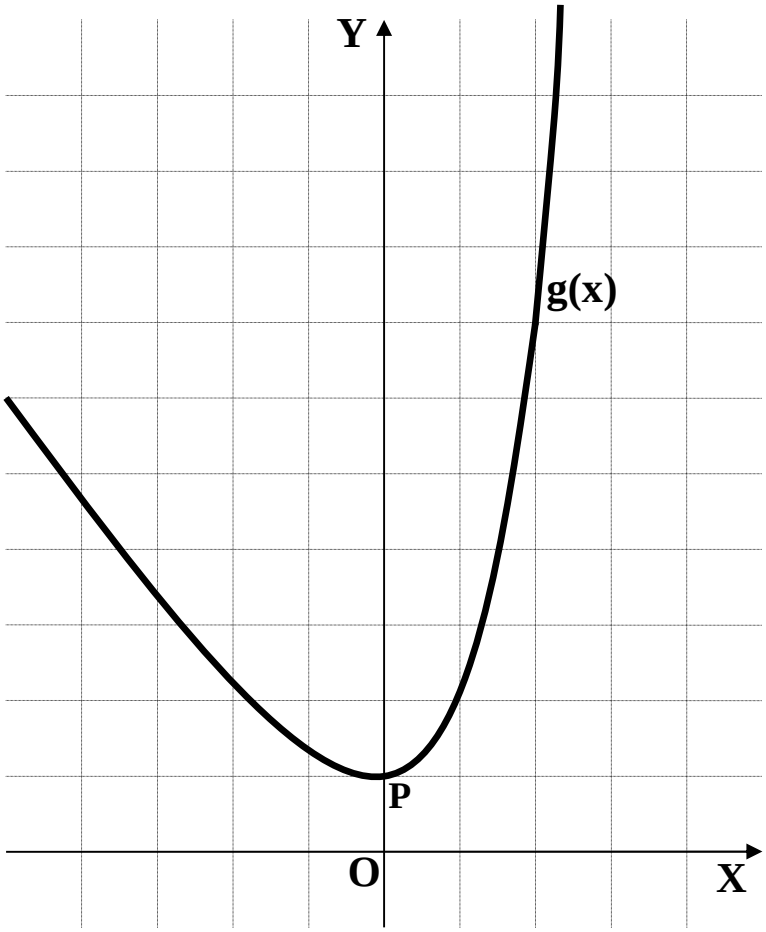
Concavidad y convexidad:

$g''(x)=e^x>0,\ \forall x\in R\ \Rightarrow\ g(x)\ \textit{es convexa}\ (\cup)\ \textit{en su dominio}$

Asíntotas : No tiene.

Tabla de valores	x	0	1	-1	2	-2	3	-3	-4
	y	1	1’72	1’36	6’39	2’14	19’08	3’05	4’02

Representación gráfica :



****