PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

REPERTORIO A

1º) Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2, 0), y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano π', perpendicular al plano π, que pasa por los puntos A y B.

El plano pedido π', tiene como vectores directores a $\overrightarrow{n} = (1,\ -2,\ -1)$, normal al plano π y el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 1) = (-1,\ 2,\ -1)$ y como punto puede tomarse A o B, por ejemplo cogeremos B:

$$\pi'(A;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;;\ \ 2(x-1) + y + 2(z-1) - 2(z-1) + 2(x-1) + y = 0$$

$$4(x-1) + 2y = 0 \ \ ;;\ \ 4x - 4 + 2y = 0 \ \ ;;\ \ \underline{\underline{\pi' \equiv x + y - 2 = 0}}$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano π que las contiene.

----

a)

En primer lugar expresamos las rectas r y s en ecuaciones paramétricas:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = k+\lambda \end{cases}} \;;;\; r \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\mu} \Rightarrow \underline{z = 1-3\mu} \;;;\; x-y+z=3 \;;;$$

$$y = x+z-3 = \mu+1-3\mu-3 = -2-2\mu \quad \Rightarrow \quad \underline{s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-2-2\mu \\ z=1-3\mu \end{cases}}$$

Un vector director y un punto de cada una de las rectas son:

$$r \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u} = (-1,\ 1,\ 1) \\ A(1,\ -1,\ k) \end{cases} \;;;\; s \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v} = (1,\ -2,\ -3) \\ B(0,\ -2,\ 1) \end{cases}$$

Si las rectas están contenidas en el mismo plano, los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ tienen que ser linealmente independiente, o lo que es lo mismo: el rango de la matriz que constituyen tiene que ser menor de 3.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ -2,\ 1) - (1,\ -1,\ k) = \underline{(-1,\ -1,\ 1-k) = \overrightarrow{w}}$$

$$Rango\ \ de\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \;;;\; 2(1-k)-1+3-2+3-(1-k) = 0$$

$$2-2k+3-1+k=0 \;;;\; \underline{\underline{k=4}}$$

b)

El plano π es el que tiene como vectores directores a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, directores de las rectas y como punto puede tomarse cualquier punto que pertenezca a cualquiera de las dos rectas, por ejemplo, el punto B(0, -2, 1) perteneciente a s.

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0\ \ ;;\ \ -3x+(y+2)+2(z-1)-(z-1)+2x-3(y+2)=0\ \ ;;$$

$$-x-2(y+2)+(z-1)=0\ \ ;;\ \ -x-2y-4+z-1=0\ \ ;;\ \ \underline{\underline{\pi\equiv x+2y-z+5=0}}$$

****

3º) Se considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} 3x+4y+3z=9 \\ mx+2y+z=5 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$, se pide:

a) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) Resolver el sistema para m = 1.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;;;$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6+3m+4-6-3-4m=1-m=0 \;;;\; \underline{m=1}$$

$$\underline{Para\ \ m\neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M\ =Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}$$

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ tiene\ \ solución\ \ única\ \ \forall m\in R-\{1\}}}$$

b)

Para m = 1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Por ser $C_1 = C_2$, para estudiar el rango de M’ basta con estudiar el determinante formado por las tres últimas columnas:

$$M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=8+18+15-9-20-12=41-41=0$$

$$Para\ \ m=1 \Rightarrow Rango\ \ M\ =Rango\ \ M'=2<n^{o}\ \ incógnitas \Rightarrow \underline{\underline{Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

Para m = 1 resulta el sistema: $\begin{cases} 3x+4y+3z=9 \\ x+2y+z=5 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y parametrizando una de las incógnitas, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=5 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \underline{y=3} \Rightarrow x=2-y-\lambda=2-3-\lambda=\underline{-1-\lambda=x}$$

$$Solución: \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3 \qquad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}$$

Dando valores a λ se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \;;;\; k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \;;;\; k=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases} \cdots\cdots$$

****

4º) Sea $f(x)=\frac{sen\ x}{2-\cos\ x}$, definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi,\ 2\pi]$, se pide:

a) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

c) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\cdot dx$.

----

a)

El denominador de $f(x)$ es $\neq 0,\ \forall x\in R$, por lo cual $f(x)$ es continua en su dominio, que es R.

$$f(-x)=\frac{sen\ (-x)}{2-\cos\ (-x)}=\frac{-sen\ x}{2-\cos\ x}=-\frac{sen\ x}{2-\cos\ x}=-f(x)\ \Rightarrow\ \underline{Simétrica\ \ respecto\ \ a\ \ O.}$$

$$f'(x)=\frac{\cos\ x\cdot(2-\cos\ x)-sen\ x\cdot sen\ x}{(2-\cos\ x)^2}=\frac{2\cos\ x-\cos^2\ x-sen^2\ x}{(2-\cos\ x)^2}=\underline{\frac{2\cos\ x-1}{(2-\cos\ x)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2\cos\ x-1=0\ ;;\ \cos\ x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ En\ [-2\pi,\ 2\pi]\ \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=\frac{\pi}{3}}\ ;;\ \underline{x_2=-\frac{\pi}{3}} \\ \\ \underline{x_3=\frac{5\pi}{3}}\ ;;\ \underline{x_4=-\frac{5\pi}{3}} \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{-2\,sen\ x\cdot(2-\cos\ x)^2-(2\cos\ x-1)\cdot 2(2-\cos\ x)\cdot sen\ x}{(2-\cos\ x)^4}=$$

$$=\frac{-2\,sen\ x\cdot(2-\cos\ x)-(2\cos\ x-1)\cdot 2\,sen\ x}{(2-\cos\ x)^3}=$$

$$=\frac{-4\,sen\ x+2\,sen\ x\ \cos\ x-4\,sen\ x\ \cos\ x+2\,sen\ x}{(2-\cos\ x)^3}=\frac{-2\,sen\ x-2\,sen\ x\ \cos\ x}{(2-\cos\ x)^3}=$$

$$=\underline{\frac{-2\,sen\ x(1+\cos\ x)}{(2-\cos\ x)^3}=f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\frac{-2\,sen\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)}{\left(2-\cos\frac{\pi}{3}\right)^3}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3}<0\ \Rightarrow\ \textit{Máximo}\ \Rightarrow$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\frac{sen\frac{\pi}{3}}{2-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Máximo}:\ P_1\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

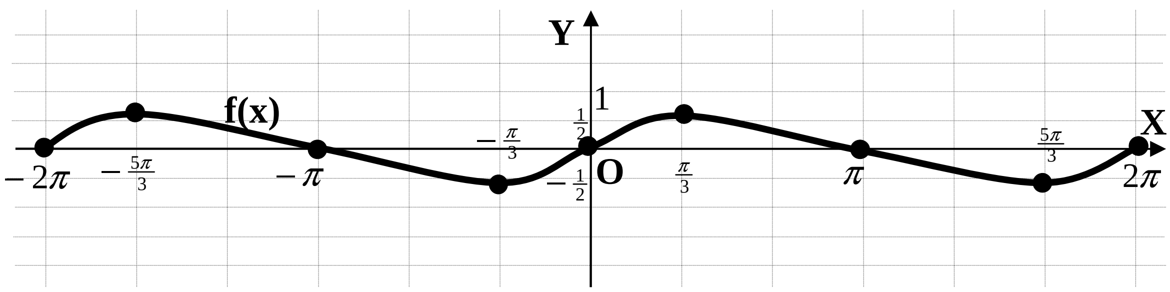
$$f''\left(\tfrac{5\pi}{3}\right)=\frac{-2\,sen\frac{5\pi}{3}\left(1+\cos\frac{5\pi}{3}\right)}{\left(2-\cos\frac{5\pi}{3}\right)^3}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3}>0\ \Rightarrow\ \textit{Mínimo}\ \Rightarrow$$

$$f\left(\tfrac{5\pi}{3}\right)=\frac{sen\frac{5\pi}{3}}{2-\cos\frac{5\pi}{3}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Mínimo}:\ P_2\left(\frac{5\pi}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

$$\text{Por simetría con respecto al origen}\Rightarrow\begin{cases}\underline{\underline{\textit{Mínimo}:\ Q_1\left(-\frac{\pi}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}\\[2ex]\underline{\underline{\textit{Máximo}:\ Q_2\left(-\frac{5\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}\end{cases}$$

b)

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que la función corta al eje de abscisas para los valores de x: $-2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi\ \ y\ \ 2\pi$, la gráfica es, aproximadamente, la que se indica en la figura siguiente:



c)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sen\ x}{2-\cos\ x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2-\cos\ x=t \\ sen\ x\cdot dx=dt \end{matrix}\right\| \left. \begin{matrix} x=\frac{\pi}{3}\rightarrow t=\frac{3}{2} \\ x=0\rightarrow t=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\cdot dt=\left[L\,t\right]_1^{\frac{3}{2}}=L\frac{3}{2}-L1=L3-L2-0=\underline{\underline{L3-L2=I}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) Hallar el precio de cada tipo de billete.

b) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

----

a)

Llamando x, y, z al precio de cada billete de destinos nacional, comunitario y no comunitario, respectivamente, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 10x+10y+10z=12.000 \\ 10x+\qquad +20z=13.000 \\ 10x+10y\qquad =7.000 \end{array}\right\} \quad Equivalente\ \ a: \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ x+2z=1300 \\ x+y=7000 \end{array}\right\} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$De\ \ (1)-(3)\ \Rightarrow\ \underline{z=500}\ \ ;;\ \ De\ \ (2)\ \Rightarrow\ x+1000=13000\ \ ;;\ \underline{x=300}$$

$$De\ \ (3)\ \Rightarrow\ 300+y=700\ \ ;;\ \underline{y=400}$$

El precio de cada uno de los billetes es el siguiente:

Viajes nacionales: 300 euros.

Viajes extranjeros comunitarios: 400 euros

Viajes extranjeros no comunitarios: 500 euros

b)

Los ingresos obtenidos, antes del descuento, por los billetes vendidos a destinos nacionales y extranjeros comunitarios son:

$$Nacionales: \ (10+10+10)\cdot 300 = 30\cdot 300 = \underline{9000 \ \ euros}$$

$$Extranjeros \ \ no \ \ comunitarios: \ (10+10)\cdot 400 = 20\cdot 400 = \underline{8000 \ \ euros}$$

El descuento en los billetes de destino nacional es el siguiente:

$$Descuento = 20 \ \% \ \ de \ \ 9000 = 0'2\cdot 9000 = \underline{1800 \ \ euros}$$

Este descuento debe repercutirse en los precios de los billetes de destino extranjero comunitarios, o sea, que los ingresos en estos billetes es:

$$Ingresos = 8000+1800 = \underline{9800 \ \ euros}$$

El tanto por ciento de aumento de los billetes de destino extranjero comunitario se puede obtener mediante una sencilla regla de tres:

$$\left.\begin{array}{r} Si \ \ el \ \ 100 \ \% \ \ son \ \ 8000 \ \ euros \\ el \ \ \ x \ \ \% \ \ \ son \ \ 9800 \ \ euros \end{array}\right\} \Rightarrow \ x = \frac{100\cdot 9800}{8000} = \frac{980}{8} = \underline{122'5 \ \% = x}$$

$$\underline{\underline{El \ \ aumento \ \ de \ \ los \ \ billetes \ \ extranjeros \ \ europeos \ \ será \ \ del \ \ 22'5 \ \%}}$$

****

2º) a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=A\cdot B$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula: $(I-B)^{-1}=-B^{-1}\cdot A$, donde I es la matriz identidad.

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, hallar la matriz B la cual se verifica $A+B=A\cdot B$.

----

a)

$$A+B=A\cdot B\ ;;\ A-A\cdot B=-B\ ;;\ A(I-B)=-B$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1}, resulta:

$$A^{-1}\cdot A\cdot(I-B)=-A^{-1}\cdot B\ ;;\ I\cdot(I-B)=-A^{-1}\cdot B\ ;;\ (I-B)=-A^{-1}\cdot B\ ;;$$

$$(I-B)^{-1}=-\left(A^{-1}\cdot B\right)^{-1}=-\left(A^{-1}\right)^{-1}\cdot B^{-1}\ ;;\ \underline{\underline{(I-B)^{-1}=-A\cdot B^{-1}}}\quad \underline{\underline{c.q.c.}}$$

b)

$$A+B=A\cdot B\ ;;\ A=A\cdot B-B=(A-I)\cdot B\ ;;\ B=\frac{A}{A-I}=\underline{A\cdot(A-I)^{-1}=B}\quad (*)$$

$$A-I=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\ ;;\ |A-I|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=4-2=\underline{2}$$

$$(A-I)^T=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\ ;;\ Adj.\ de\ (A-I)^T=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\ ;;\ \underline{(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{pmatrix}}$$

Sustituyendo en (*) resulta:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & \frac{1}{2}-1\\ -2+1 & -1+1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}=B}}$$

****

3º) Sea la función $f(x)=2x\cdot|4-x|$.

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

b) Dibujar su gráfica.

c) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y=f(x)$, las rectas x = 0, x = 5, y el eje OX.

----

a)

La función se puede redefinir de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases}2x(4-x) & si\ \ x\le 4\\ -2x(x-4) & si\ \ x>4\end{cases}\quad o\ \ también:\quad f(x)=\begin{cases}-2x^2+8x & si\ \ x\le 4\\ 2x^2-8x & si\ \ x>4\end{cases}$$

Por tratarse de una función polinómica es continua en su dominio, que es R, con la posible excepción del valor x = 4, para el cual estudiamos su continuidad:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4}\left(-2x^2+8x\right)=f(4)=-2\cdot 4^2+8\cdot 4=-32+32=0\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4}\left(2x^2-8x\right)=2\cdot 4^2-8\cdot 4=32-32=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=f(4)=\lim_{x\to 4^+}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{f(x)\ \ es\ \ continua\ \ para\ \ x=4}}$$

Una vez que hemos demostrado la continuidad de la función para x = 4, veamos ahora si es derivable para este valor:

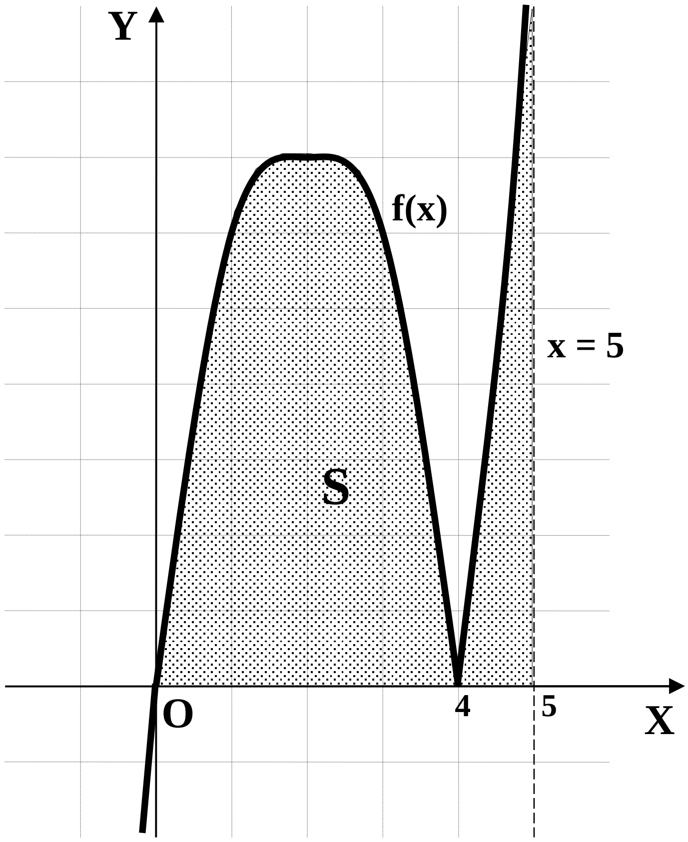
$$f'(x)=\begin{cases}-4x+8 & si\ \ x\le 4\\ 4x-8 & si\ \ x>4\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}f'(4^-)=-4\cdot 4+8=-8\\ f'(4^+)=4\cdot 4-8=8\end{cases}$$

$$f'(4^-)\ne f'(4^+)\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{f(x)\ \ no\ \ es\ \ derivable\ \ para\ \ x=4}}$$

b)

Con los datos obtenidos en el apartado a) se puede hacer una representación gráfica aproximada de la función, teniendo en cuenta que se trata de una parábola cóncava si $x\le 4$ y convexa si $x>4$.

b)



c)

$$S=\int_0^4\left(-2x^2+8x\right)\cdot dx+\int_4^5\left(2x^2-8x\right)\cdot dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+4x^2\right]_0^4+\left[\frac{2x^3}{3}-4x^2\right]_4^5=$$

$$=\left(-\frac{2\cdot 64}{3}+4\cdot 16\right)-0+\left(\frac{2\cdot 125}{3}+4\cdot 25\right)-\left(\frac{2\cdot 64}{3}-4\cdot 16\right)=$$

$$=-\frac{128}{3}+64+\frac{250}{3}-100-\frac{128}{3}+64=128-100-\frac{6}{3}=128-102=\underline{\underline{26\ u^2=S}}$$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv x+y+z=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

b) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

----

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}=\lambda \;\; \Rightarrow \;\; \underline{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}}$$

El punto Q, por pertenecer a r y a π, tiene que satisfacer sus ecuaciones, por lo tanto se tiene que cumplir que:

$$\pi \equiv x+y+z=0 \;\Rightarrow\; (1+\lambda)+(2\lambda)+(-1+2\lambda)=0 \;\;;;\;\; 1+\lambda+2\lambda-1+2\lambda=0 \;\;;;$$

$$5\lambda=0 \;\;;;\;\; \underline{\lambda=0} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{Q(1,\; 0,\; -1)}}$$

b)

La ecuación del haz de planos paralelos a π es: $\underline{\pi' \equiv x+y+z+D=0,\;\; \forall D \in R.}$ (*)

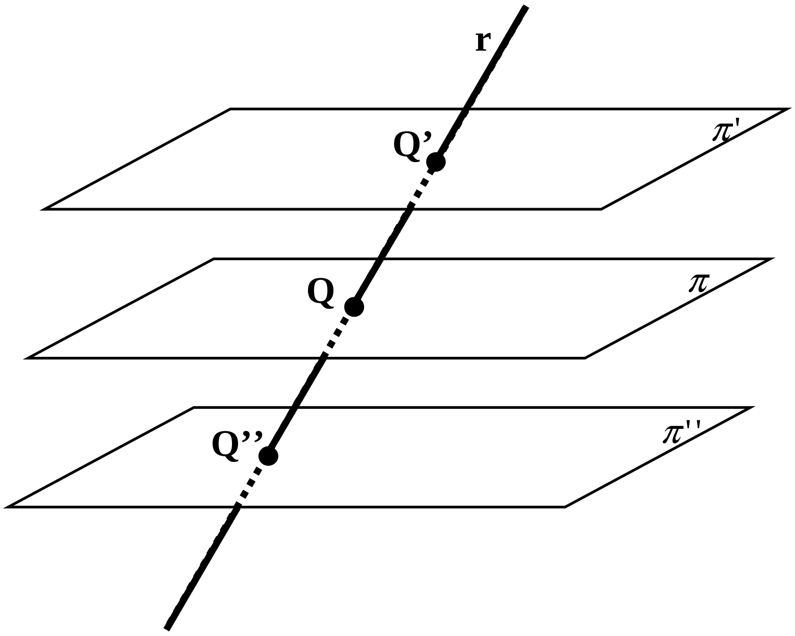
El punto Q' por pertenecer a r y π' es de la forma: $Q'(1+\lambda,\; 2\lambda,\; -1+2\lambda)$.

$$\overline{QQ'}=2 \;\;\Rightarrow\;\; \sqrt{(1+\lambda-1)^2+(2\lambda-0)^2+(-1+2\lambda+1)^2}=2 \;\;;;\;\; \lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2=4 \;\;;;$$

$$9\lambda^2=4 \;\;;;\;\; \lambda^2=\frac{4}{9} \;\;;;\;\; \lambda=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} \underline{\lambda_1=\frac{2}{3}} \;\;\rightarrow\;\; \underline{\underline{Q'\left(\frac{5}{3},\; \frac{4}{3},\; \frac{1}{3}\right)}} \\ \\ \underline{\lambda_2=\frac{2}{3}} \;\;\rightarrow\;\; \underline{\underline{Q''\left(\frac{1}{3},\; -\frac{4}{3},\; -\frac{7}{3}\right)}} \end{cases}$$

Es evidente que existen dos puntos y por supuesto dos planos del haz que cumplen la condición de tener un punto perteneciente a la recta que dista 2 unidades de Q.

Para una mejor comprensión de la situación, hacemos un esquema.



****