PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

OPCIÓN A

1º) Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la medre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Sean x, y, z las edades actuales de la madre, hijo mayor e hijo menor, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} x-14=5[(y-14)+(z-14)] \\ x+10=(y+10)+(z+10) \\ z+(x-y)=42 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-14=5(y+z-28) \\ x+10=y+z+20 \\ z+x-y=42 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-14=5y+5z-140 \\ x-y-z=20-10 \\ x-y+z=42 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x+y+z=-10 \\ x-y+z=42 \end{array}\right\} \Rightarrow 2z=32 \;;;\; \underline{z=16}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-5y-80=-126 \\ x-y-16=10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-5y=-46 \\ x-y=26 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x+5y=46 \\ x-y=26 \end{array}\right\} \Rightarrow 4y=72 \;;;\; \underline{y=18}$$

$$x-y=26 \;;;\; x=26+y=26+18=\underline{44=z}$$

La madre tiene actualmente 44 años y sus hijos 18 y 16 años.

****

2º) Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro a.

$$\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{vmatrix} = (a+4)\cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (a+4)\cdot(-2+a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = 2} \\ \underline{a_2 = -4} \end{cases}$$

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{vmatrix} = (a+4)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (a+4)\cdot(6+4)=0 \Rightarrow \{\underline{a_2 = -4}$$

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & a & 2 \\ & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (a+4)\cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (a+4)\cdot(3a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_2 = -4} \\ \underline{a_3 = -\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } a \neq -4 \text{ el Rango de A es } 3;\ \text{para cualquier otro valor de a el Rango es } 2.}}$$

Este problema puede resolverse también por el Métodos de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + 2F_2 \\ F_2 \to -F_2 \\ F_3 \to F_3 + 5F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & a+4 & -9 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 8 \\ 0 & a+4 & -9 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \underline{A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & a+4 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & a-2 & 8 \end{pmatrix}}$$

La matriz A tendrá un rango tres para cualquier valor real de a que haga linealmente independientes las filas segunda y tercera, o sea, cuando $a \neq -4$, que como puede apreciarse, son proporcionales:

$$\frac{-9}{-4-2} = \frac{12}{8}\ ;;\ \frac{-9}{-6} = \frac{12}{8} \Rightarrow \underline{\text{Proporcionales}}$$

Como se aprecia, llegamos a la misma conclusión, como cabía esperar.

****

3º) Sean las cónicas $c_1 \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$ y $c_2 \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$.

a) Identificar c_1 y c_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).

b) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica c_1.

----

a)

$$c_1 \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144 \;;\; \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \;;\; \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{Se\ trata\ de\ una\ elipse}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 3 \end{array}\right\} \to a^2 = b^2 + c^2 \;;\; c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \underline{\sqrt{7} = c}$$

$$\underline{\underline{Focos:\ F\left(\sqrt{7},\ 0\right)\ y\ F'\left(-\sqrt{7},\ 0\right)}} \;;\; \underline{\underline{Vérticess:\ A(4,\ 0),\ A'(-4,\ 0)\ ;;\ B(0,\ 3),\ B'(0,\ -3)}}$$

$$Excentricidad:\ e = \frac{c}{a} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{4}}} = e \;;\; Asíntotas:\ \underline{\underline{No\ tiene}}$$

$$y\ c_2 \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144 \;;\; \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \;;\; \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{Se\ trata\ de\ una\ hipérbola}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 3 \end{array}\right\} \to c^2 = a^2 + b^2 \;;\; c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \underline{5 = c}$$

$$\underline{\underline{Focos:\ F(5,\ 0)\ y\ F'(-5,\ 0)}} \;;\; \underline{\underline{Vérticess:\ A(4,\ 0),\ A'(-4,\ 0)\ ;;\ B(0,\ 3),\ B'(0,\ -3)}}$$

$$Excentricidad:\ e = \frac{c}{a} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}} = e \;;\; Asíntotas:\ y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow \underline{\underline{y_1 = \frac{3}{4}x \;;\; y_2 = -\frac{3}{4}x}}$$

b)

La parábola pedida es del tipo de $y = \sqrt{x}$, cuya expresión general es de la forma: $x = ay^2 + by + c$. Los vértices de c_1 son $B(0,\ 3),\ F'\left(-\sqrt{7},\ 0\right)\ y\ B'(0,\ -3)$.

Por pasar por B(0, 3) $\Rightarrow\ 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \;;\; \underline{9a + 3b + c = 0}$ (1)

Por pasar por $F'\left(-\sqrt{7},\ 0\right) \Rightarrow -\sqrt{7} = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;;\; \underline{c = -\sqrt{7}}$ (2)

Por pasar por B’(0, -3) $\Rightarrow\ 0 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \;;\; \underline{9a - 3b + c = 0}$ (3)

De las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} 9a + 3b - \sqrt{7} = 0 \\ 9a - 3b - \sqrt{7} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 18a = 2\sqrt{7} \;\; ;; \;\; a = \frac{2\sqrt{7}}{18} = \underline{\frac{\sqrt{7}}{b} = a}$$

$$9a + 3b - \sqrt{7} = 0 \;\; ;; \;\; \sqrt{7} + 3b - \sqrt{7} = 0 \;\; ;; \;\; 3b = 0 \;\; ;; \;\; \underline{b = 0}$$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{9} y^2 - \sqrt{7} = \sqrt{7}\left(\frac{1}{9} y^2 - 1\right) = \sqrt{7}\left(\frac{y^2 - 9}{9}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{9} y^2 = x}}$$

****

4º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$.

a) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

b) Calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje x = 0.

----

a)

La función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, tiene un punto de inflexión en los puntos de abscisa que anulan la segunda derivada:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2} \quad .$$

$$f''(x)=\frac{-2\cdot(x^2+3)^2-(-2x)\cdot[2\cdot(x^2+3)\cdot 2x]}{(x^2+3)^4}=\frac{-2\cdot(x^2+3)+8x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{-2x^2-6+8x^2}{(x^2+3)^3}=$$

$$=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}=\underline{\frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}=f''(x)}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^2}=0 \;\;;;\;\; x^2-1=0 \;\;;;\;\; x_1=1 \;\;;;\;\; x_2=-1$$

Por condición del enunciado del problema, la abscisa única es x = 1.

El punto de tangencia es:

$$f(1)=\frac{1}{1^2+3}=\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{P\left(1,\ \frac{1}{4}\right)}$$

La pendiente es la derivada de la función para el valor de x:

$$m=f'(1)=\frac{-2\cdot 1}{(1^2+3)^2}=\frac{-2}{4^2}=\underline{-\frac{1}{8}=m}$$

La recta tangente pedida es:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}(x-1) \;\;;;\;\; 8y-2=-x+1 \;\;;;$$

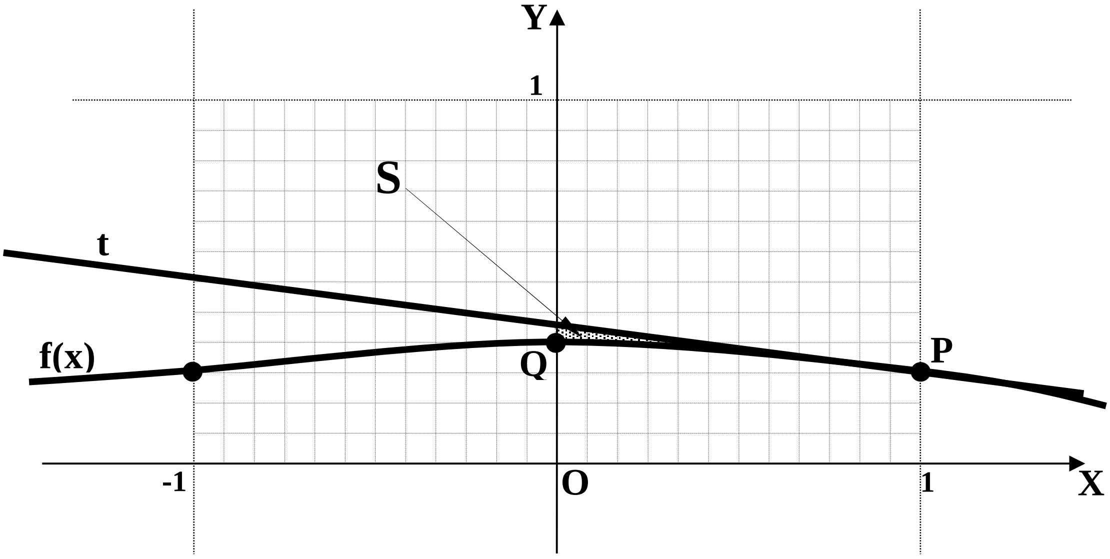
$$\underline{\underline{t\equiv x+8y-3=0}}$$

b)

Teniendo en cuenta que f(x) es simétrica con respecto al eje de ordenadas (es una función par) y que, a medida que aumenta el valor absoluto de x disminuye el valor de f(x), de tal manera que el eje OX es una asíntota de la función $\left(\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \right)$.

De las observaciones anteriores se deduce que la función está acotada inferiormente, $f(x) > 0,\ \forall x \in R$ y que, como consecuencia, el máximo absoluto se produce para x = 0, $f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow Q\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



La expresión de la tangente como función es: $y = \frac{3-x}{8}$.

Aunque es evidente, vamos a demostrar que el único punto de corte de la curva y la tangente es $P\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$:

$$\frac{1}{x^2+3} = \frac{3-x}{8} \ ;;\ 8 = 3x^2 + 9 - x^3 - 3x \ ;;\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \ ;;\ (x-1)^3 = 0 \ ;;\ \underline{x = 1,\ c.q.c.}$$

Como puede observarse, todas las ordenadas de la tangente son mayores que las de la función en el intervalo del área a determinar, que es la sombreada de la figura, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left(\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx = \frac{3}{8}\int_0^1 dx - \frac{1}{8}\int_0^1 x\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\frac{x^2+3}{3}} = \frac{3}{8}[x]_0^1 - \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{3}{8}(1-0) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - 0\right) - \frac{1}{3}I_1 = \underline{\frac{3}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{3}I_1 = S} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{3}} = t \\ dx = \sqrt{3}\, dt \end{array} \right\| \left. \begin{array}{c} x = 1 \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \sqrt{3}\, \left[arc\ tag\ t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{3} \left[arc\ tag\ \frac{1}{\sqrt{3}} - arc\ tag\ 0 \right] = \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - 0 \right) = \underline{\frac{\pi\sqrt{3}}{6} = I_1}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1, queda:

$$S = \frac{3}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{54 - 9 - 8\pi\sqrt{3}}{16 \cdot 9} = \frac{45 - 8\pi\sqrt{3}}{144} \cong \frac{45 - 43'53}{144} = \frac{1'47}{144} = \underline{\underline{0'01\ u^2 = S}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 2$.

El plano α pedido tiene como vectores directores al vector normal al plano π y al vector director de la recta r y como punto puede tomarse un punto cualquiera de la recta r.

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -1)$.

Un punto y un vector director de r son: $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ 1)$ y $P(1,\ -1,\ 0)$.

La ecuación general del plano α pedido es:

$$\alpha(P;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;;\ \ (x-1) - (y+1) + 4z - z + 2(x-1) - 2(y+1) = 0 \ \ ;;$$

$$3(x-1) - 3(y+1) + 3z = 0 \ \ ;;\ \ x - 1 - y - 1 + z = 0$$

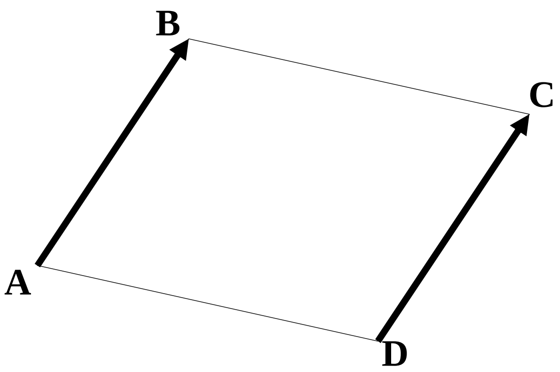
$$\underline{\underline{\alpha \equiv x - y + z - 2 = 0}}$$

****

2º) Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área del paralelogramo.

b) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \;\; ;; \;\; B - A = C - D \;\; ;;$$

$$(2,\ 2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ 3,\ 3) - (x,\ y,\ z) \;;;$$

$$(1,\ 1,\ 1) = (1 - x,\ 3 - y,\ 3 - z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 - x = 1 \rightarrow \underline{x = 0} \\ 3 - y = 1 \rightarrow \underline{y = 2} \\ 3 - z = 1 \rightarrow \underline{z = 2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{D(0,\ 2,\ 2)}}$$

b)

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ 1,\ 1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 1^1 + 1^2} = \underline{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (0,\ 2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (-1,\ 1,\ 1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^1 + 1^2} = \underline{\sqrt{3}}$$

<u>Tiene los cuatro lados iguales.</u>

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (1,\ 1,\ 1) \cdot (-1,\ 1,\ 1) = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ <u>Los lados no son perpendiculares</u>.

<u>El cuadrilátero que tratamos es un rombo.</u>

****

3º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-y=2 \\ ax+y+2z=0 \\ x-y+az=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro a.

Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema para a = -1.

c) Resolver el sistema para a = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a-2+2+a^2=0 \;;;\; a^2+a=0 \;;;\; a(a+1)=0 \;;;\; \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=-1}$$

$$\underline{\underline{Para \;\begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ \ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \ Veámos\ cuál\ es\ el\ rango\ de\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=0 \Rightarrow Rango\ M \neq Rango\ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para \;\; a=-1 \Rightarrow \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\; Veámos \;\; cuál \;\; es \;\; el \;\; rango \;\; de \;\; M' \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1=-C_2\} \Rightarrow \{C_1,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2-4=0 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{Rango \;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=-1 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = Rango \;\; M'=2 < n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}}$$

b)

Para a = -1 resulta un sistema compatible indeterminado, por lo cual, despreciamos una de las ecuaciones y parametrizamos una de las incógnitas:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ ax+y+2z=0 \\ x-y+az=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; a=-1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x-y=2 \\ -x+y+2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2z=2 \;\;;;\;\; \underline{z=1}$$

$$\underline{x=\lambda} \;\;;;\;\; x-y=2 \;\;;;\;\; y=x-2=\underline{\lambda-2=y}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda-2 \quad \forall \lambda \in R \\ z=1 \end{cases}}}$$

.c)

Para a = 2 resolvemos aplicando la Regla de Cramer: $a=2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y+2z=0 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{4-2+4}{2-2+2+4}=\frac{6}{6}=\underline{\underline{1=x}} \quad ;; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{4-2-8}{6}=\frac{-6}{6}=\underline{\underline{-1=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{1-4-2+2}{6}=\frac{-3}{6}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}=z}}$$

****

4º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & si \ \ x \geq -1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & si \ \ x < -1 \end{cases}$.

a) Estudiar el dominio y la continuidad de f. b) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas de ecuaciones y = 0, x = 1 y x = 2.

----

a)

Para una mejor comprensión de izquierda a derecha expresamos adecuadamente la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & si \ \ x < -1 \\ \\ \dfrac{x^2+3x+1}{x} & si \ \ x \geq -1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el valor que anula el denominador de la expresión $\frac{2x}{x-1}$ (x = 1) no pertenece al intervalo que representa,

La función está definida para cualquier valor real de x, excepto para x = 0.

Para el estudio de la continuidad, los puntos a estudiar son para x = -1 y x = 0:

Para que una función sea continua en un punto tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$x=-1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{-2}{-1-1} = \underline{1} \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+1}{x} = \dfrac{1-3+1}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = \underline{1} = \underline{f(-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \Rightarrow \underline{\underline{La \ \ función \ \ es \ \ continua \ \ para \ \ x=-1}}$$

$$x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+3x+1}{x} = \underline{-\infty} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x} = \underline{+\infty} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ es\ \ discontinua\ \ para\ \ x=0}}$$

(salto infinito)

b)

Asíntotas verticales: Son los valores que anulan el denominador (en el intervalo que determinen, tratándose de funciones racionales definidas a trozos, como es el caso que nos ocupa).

Según el párrafo anterior y el estudio realizado para el dominio y la continuidad se deduce que la recta $x = 0$, (eje OY) es asíntota vertical de la función.

Asíntota vertical: x = 0.

Asíntotas horizontales: Son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito y a menos infinito:

$$y = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) \frac{2x}{x-1} = \underline{\underline{2 = y}}$$

$$y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \frac{x^2+3x+1}{x} = +\infty \Rightarrow \underline{No\ \ tiene}$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$.

Los valores de m y n son: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$.

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador, como ocurre en nuestro caso en el intervalo $(-1, +\infty)$.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2} = \underline{\underline{1 = m}}$$

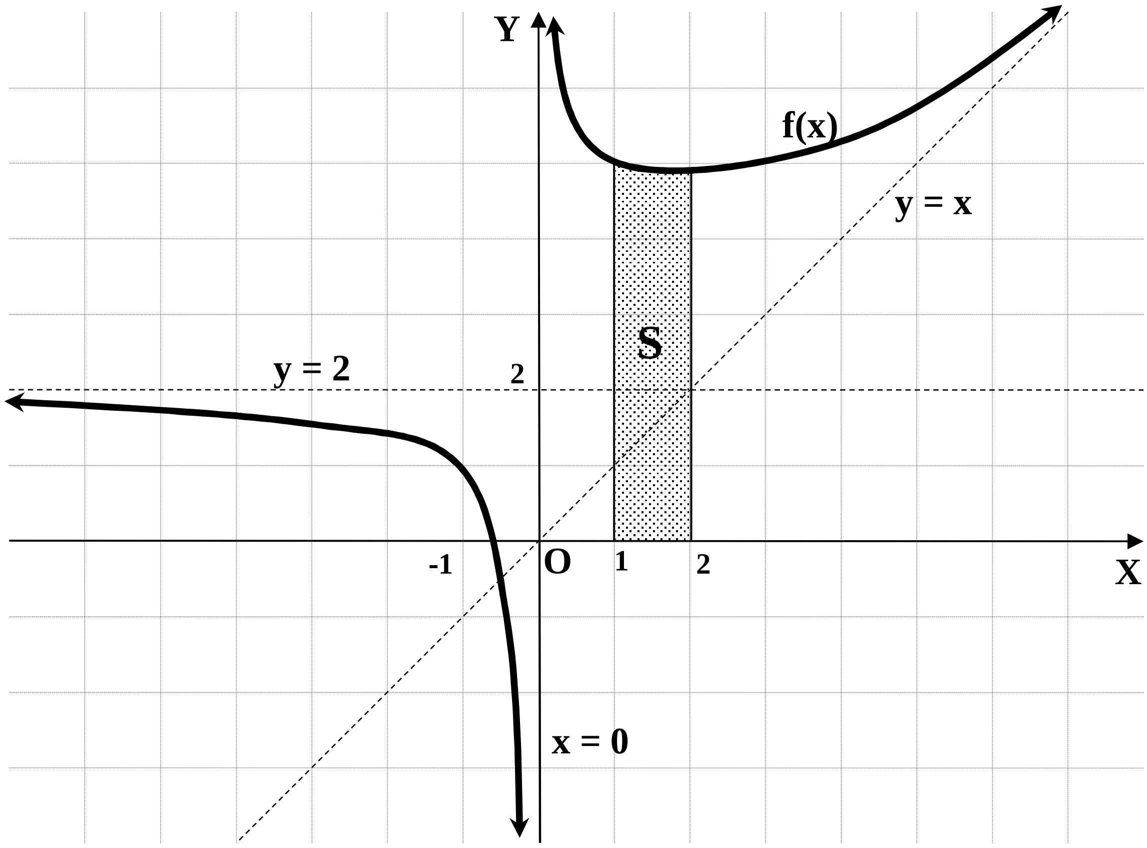
$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+1-x^2}{x^2} = \underline{\underline{0 = n}}$$

$$Asíntota\ \ oblicua\ \ en\ \ (-1, +\infty):\ \underline{\underline{y = x}}$$

c)

Para calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas de ecuaciones y = 0, x = 1 y x = 2, hacemos una representación aproximada de la situación:

La superficie a calcular está sombreada.



En el intervalo en que está la superficie a calcular la función es $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x}$.

$$S = \int_1^1 f(x)\, dx = \int_1^1 \frac{x^2 + 3x + 1}{x}\, dx = \int_1^2 \left(x + 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + L\, x \right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{4}{2} + 6 + L\,2 \right) - \left(\frac{1}{2} + 3 + L\,1 \right) = 8 + L\,2 - \frac{7}{2} - 0 = \frac{9}{2} + L\,2 \cong 4'5 + 0'69 = \underline{\underline{5'19\ u^2 = S}}$$

****