PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$:

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invetible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -2 + a^2 - 2a = 0; \;\; a^2 - 2a - 2 = 0; \;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 1 - \sqrt{3}, a_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}}.$$

b)

Para $a = 1$ la matriz resulta $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2 = -3. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}}{-3} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de un euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Sean x e y el número de litros de leche y chocolate que se utilizan, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x \leq 2y \\ y \leq 1{,}6x \\ x + y \leq 45 \\ 30 \geq x \geq 0;\, 20 \geq y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y \geq 0{,}5x \\ y \leq 1{,}6x \\ x + y \leq 45 \\ 30 \geq x \geq 0;\, 20 \geq y \geq 0 \end{array}\right\}.$

1 $\Rightarrow y \geq 0{,}5x \Rightarrow P(10, 0) \rightarrow No.$

x	0	40
y	0	20

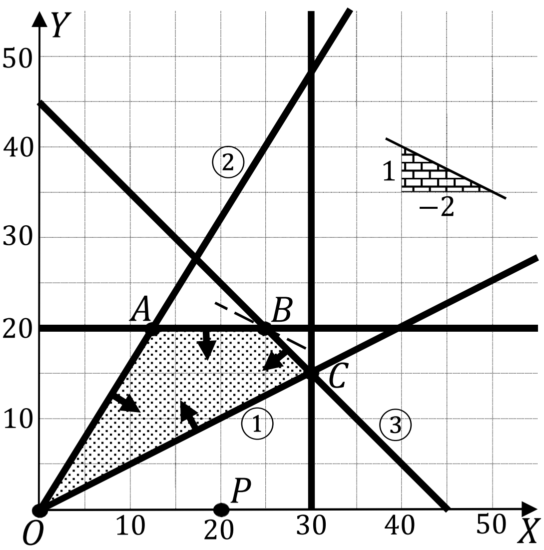
2 $\Rightarrow y \leq 1{,}6x \Rightarrow P(10, 0) \rightarrow Si.$

x	0	25
y	0	40

3 $\Rightarrow x + y \leq 45 \Rightarrow y \leq 45 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	45
y	45	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1{,}6x \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{20}{1{,}6} = 12{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(12'5, 20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 45 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow B(25, 20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 45 \\ x = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow C(30, 15).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = x + 2y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(12'5, 20) = 1 \cdot 12{,}5 + 2 \cdot 20 = 12{,}5 + 20 = 32{,}5.$

$B \Rightarrow f(25, 20) = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 20 = 25 + 40 = 65.$

$C \Rightarrow f(30, 15) = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 15 = 30 + 30 = 60.$

El máximo se produce en el punto $B(25, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

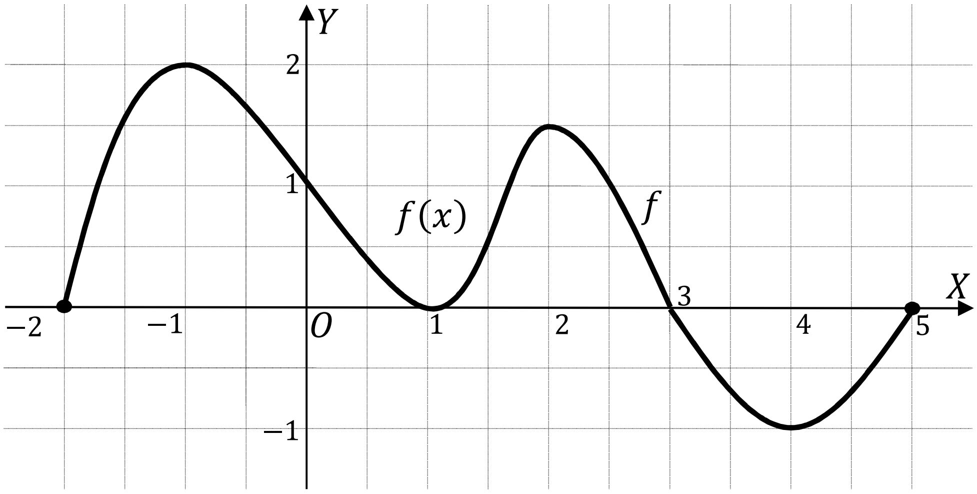
$f(x, y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ mezclando\ 25\ litros\ de\ leche\ y\ 20\ de\ chocolate.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 65\ euros.}$$

****

3º) La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1, x = 1, x = 2$ y $x = 4$.

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de $\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx$.

----

a)

Un función $f(x)$ es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-2, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-1, 1) \cup (2, 4).}$$

b)

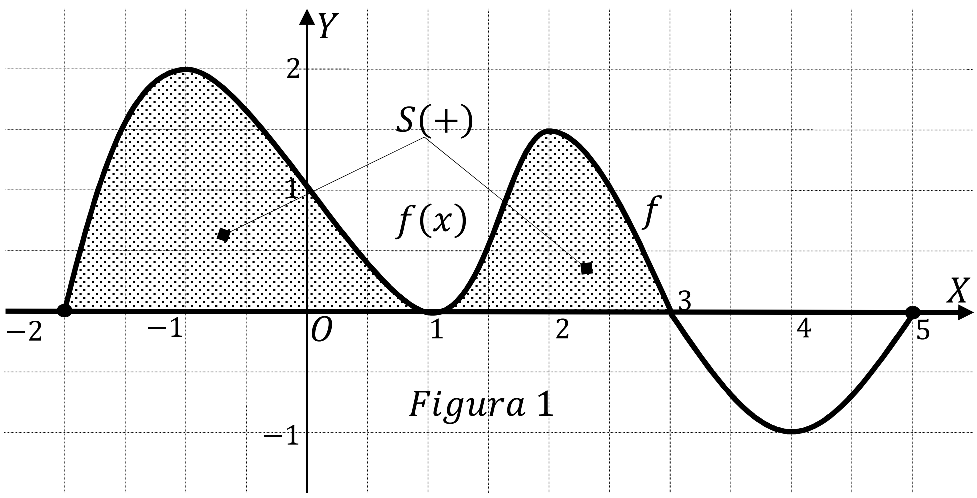
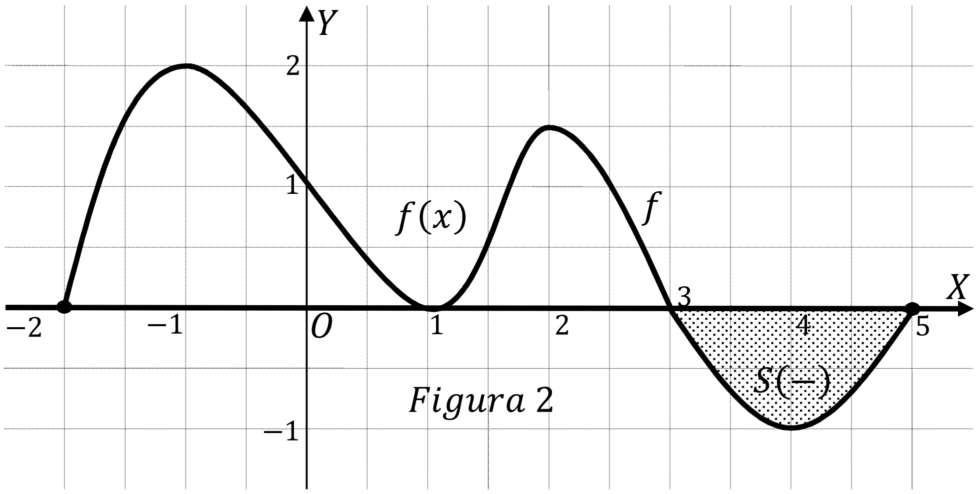


Figura 1

Nótese que una integral definida no es, necesariamente, el área de la zona limitada por la función y el eje de abscisas en el intervalo que determinan los límites de integración ya que, cuando todas las ordenadas de la función son positivas el valor de la integral definida es positiva y cuando las ordenadas de la función son negativas, el valor de la integral definida es negativa.

La figura 1 expresa superficie que resulta positiva al resolver la integral definida entre sus extremos, es decir: $S(+) = \int_{-2}^{3} f(x) \cdot dx$.



La figura 2 expresa la superficie donde las ordenadas de la función son negativas y el valor de la integral sería: $S(-) = \int_{3}^{5} f(x) \cdot dx$.

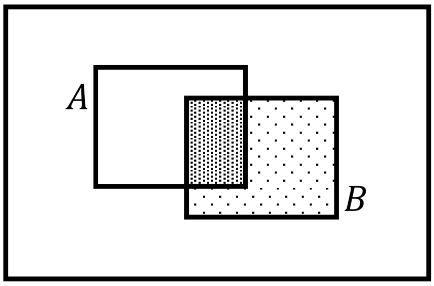
De la observación de las figuras se deduce que la superficie positiva es bastante mayor que la negativa y, en consecuencia:

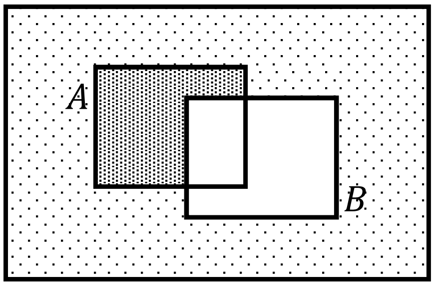
$$\underline{\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx > 0.}$$

****

4º) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatoria tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(A/B) = 0{,}4$ y $P(A/B^c) = 0{,}8$, siendo B^c el suceso complementario de B.

$a)$ Calcule $P(B)$. $b)$ ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.





$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}4. \quad (1) \qquad P(A/B^c) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} = 0{,}8. \quad (2)$$

$a)$

De la expresión (1): $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot P(B)$.

Sustituyendo en (2) el valor obtenido $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot P(B)$ y teniendo en cuanta que $P(B^c) = 1 - P(B)$:

$$\frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} = 0{,}8; \;\; \frac{0{,}6 - 0{,}4 \cdot P(B)}{1 - P(B)} = 0{,}8; \;\; 0{,}6 - 0{,}4 \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot [1 - P(B)].$$

Multiplicando los dos términos por 5: $3 - 2 \cdot P(B) = 4 \cdot [1 - P(B)]$;.

$$3 - 2 \cdot P(B) = 4 - 4 \cdot P(B); \;\; 2 \cdot P(B) = 1; \;\; P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P(B) = 0{,}5}.$$

$b)$

A y B son independientes cuando se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Del apartado anterior: $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}2 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}5$.

$\underline{\textit{Por lo expuesto anteriormente los sucesos A y B no son independientes.}}$

****

5º) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kg, con un nivel de confianza del 90 %.

----

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $n=20;\ \ \overline{x}=50;\ \ \sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(50-2{,}575\cdot\frac{2}{\sqrt{20}};\ 50+2{,}575\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\right);$

$(50-2{,}575\cdot 0{,}4472;\ 50+2{,}575\cdot 0{,}4472);\ \ (50-1{,}1516;\ 50+1{,}1516) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{I.C._{99\,\%}=(48{,}8484;\ 51{,}1516)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$
$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $\sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645;\ \ E=1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}645\cdot\frac{2}{1}\right)^2=$

$=(1{,}645\cdot 2)^2=3{,}29^2=10{,}82.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 11\ sacos.}$$

****

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a \\ ax-y-az=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$.

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a=2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+a-a^2+1+a-a^2=0;\ \ 2a^2-2a=0;$$

$a^2-a=0;\ \ a(a-1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=1.$

$$\underline{Para\ \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-2-4+1+4}{-1+2-4+1+2-4}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{2-4+2-4}{-4}=\frac{-4}{-4}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{-1+4+2-4}{-4}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{1}{4},\ y=1,\ z=-\frac{1}{4}.}$$

****

7º) Considere la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$:

a) Determine sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx], \text{ con } m \text{ finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2-x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x}.$$

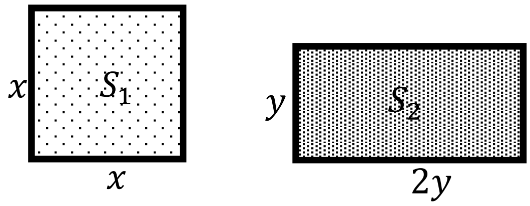
b)

$$f'(x) = \frac{(2x-1)\cdot(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}.$$

$$f'(2) = \frac{2\cdot(2-2)}{(2-1)^2} = \frac{2\cdot 0}{1} \Rightarrow \underline{f'(2) = 0}.$$

****

8º) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm^2 para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 decimales para realizar cálculos.



$$4x + 2y + 4y = 450; \;\; 4x + 6y = 450;$$

$$2x + 3y = 225 \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{225-2\mathrm{x}}{3}.$$

$$S = S_1 + S_2 = x^2 + y \cdot 2y = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{225-2x}{3}\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{2}{9}(225 - 2x)^2.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = 2x + \frac{4}{9} \cdot (225 - 2x) \cdot (-2) = 0; \;\; x - \frac{4}{9}(225 - 2x) = 0;$$

$$9x - 4(225 - 2x) = 0; \;\; 9x - 900 + 8x = 0; \;\; 17x = 900; \;\; x = \frac{900}{17} \Rightarrow x = 52{,}94.$$

$$y = \frac{225-2\mathrm{x}}{3} = \frac{225-2\cdot 52{,}94}{3} = \frac{225-105{,}88}{3} = \frac{119{,}12}{3} \Rightarrow y = 39{,}71.$$

$$\underline{La\ superficie\ es\ mínima\ cuando\ los\ trozos\ son\ de\ 52{,}94\ cm\ y\ 39{,}71\ cm.}$$

****

9º) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Se considera la carta eliminada como $C1$ y la carta observada como $C2$.

a)

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que la carta eliminada sea de diamantes o no sea de diamantes:

$$P = P(D1) \cdot P(D2) + P\left(\overline{D1}\right) \cdot P(D2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} + \frac{3}{4} \cdot \frac{13}{51} = \frac{12+39}{4 \cdot 51} = \frac{51}{4 \cdot 51} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = \frac{1}{4} = 0{,}25}.$$

b) Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

$$P = P\left(\overline{D1}/\overline{D2}\right) = \frac{P\left(\overline{D1} \cap \overline{D2}\right)}{P\left(\overline{D2}\right)} = \frac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{\frac{39}{52}} = \frac{38}{51} \Rightarrow \underline{P = 0{,}7451}.$$

****

10º) Considere la población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58{,}2; 73{,}8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcule $P\left(-10 < \overline{X} - \mu < 10\right)$.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Datos: $n = 10$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

$$\left(\overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}};\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right) = (58{,}2; 73{,}8) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 58{,}2 \\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 73{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \overline{x} = 132 \Rightarrow \overline{x} = 66. \qquad 66 - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 58{,}2;\ 7{,}8 = 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{7{,}8 \cdot \sqrt{10}}{1{,}96} = \frac{24{,}6658}{1{,}96} \Rightarrow \underline{\sigma = 12{,}58}.$$

b)

Datos: $n = 10$; $\sigma = 20$.

$X \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu, 6{,}32)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X - \mu}{6{,}32}$.

$$P\left(-10 < \overline{X} - \mu < 10\right) = P\left(-10 + \mu < \overline{X} - \mu + \mu < 10 + \mu\right) =$$

$$= P\left(-10 + \mu < \overline{X} < 10 + \mu\right) = P\left(\frac{-10 + \mu - \mu}{6{,}32} < Z < \frac{10 + \mu - \mu}{6{,}32}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-10}{6{,}32} < Z < \frac{10}{6{,}32}\right) = P(-1{,}58 < Z < 1{,}58) = P(Z < 1{,}58) - P(Z < -1{,}58) =$$

$$= P(Z < 1{,}58) - [1 - P(Z < 1{,}58)] = P(Z < 1{,}58) - 1 + P(Z < 1{,}58) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}9429 - 1 = 1{,}8858 - 1 = \underline{0{,}8858}.$$

****