PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$:

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.

b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

----

a)

$$A = A^{-1} = \frac{I}{A} \Rightarrow A^2 = I;\ \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a = 0};\ \ b^2 = 1 \Rightarrow \underline{b_1 = -1, b_2 = 1}.$$

b)

Para $a = b = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to -\frac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2-1}$.

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

----

a)

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2-1=0;\ \ x_1=-1, x_2=1\ \Rightarrow \underline{D(f)\Rightarrow R-\{-1,1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}=\pm\infty\Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2-1=0\Rightarrow \underline{Las\ rectas\ x=-1\ y\ x=1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ \text{ y }\ n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx], \text{ con } m \text{ finito y } m\neq 0.$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+4}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3-x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x-1}=1.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y=x+1}.$$

b)

Para $x=0$ es $f(0)=\frac{0+4}{0-1}=-4$.

El punto de tangencia es $P(0,-4)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - (x^3+4) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 - 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{x \cdot (x^3 - 3x - 8)}{(x^2-1)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{0 \cdot (0^3 - 3 \cdot 0 - 8)}{(0^2-1)^2} \Rightarrow m = 0$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, -4)$ con $m = 0$ es:

$$y + 4 = 0 \cdot (x - 0) = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv y + 4 = 0.}$$

****

3º) Sea la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & si\ x \le 1 \\ Lx & si\ \ x > 1 \end{cases}$, denotando por L la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in R$ la función $f(x)$ es continua en R.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1\ y\ x = 0$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R para cualquier valor real de a, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - ax) = 1 - a = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(Lx) = L1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}$.

b)

Para $a = 1$ la función resulta $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & si\ x \le 1 \\ Lx & si\ \ x > 1 \end{cases}$, cuya representación gráfica, incluida la superficie a calcular, es la indicada en la figura adjunta.

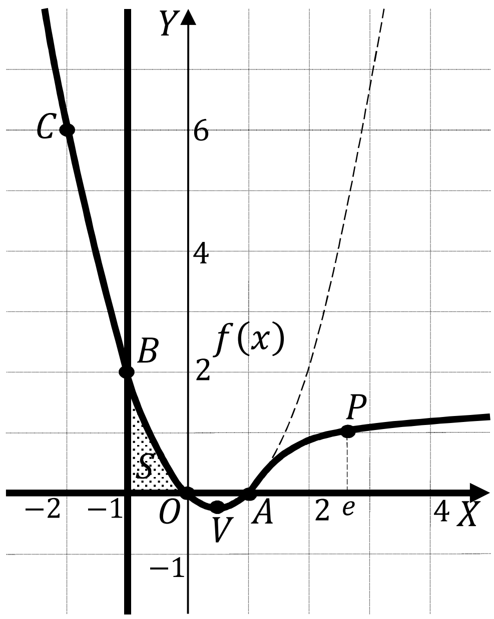
Para la representación gráfica se ha tenido en cuenta que el vértice de la parábola determinada por la función $g(x) = x^2 - x$ es el siguiente:

$$g'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Otros puntos de la parábola son los siguientes: $O(0,0), A(1,0), B(-1,2)\ y\ C(-2,6)$.



Son puntos de la función $f(x)$ los siguientes: $A(1,0)\ y\ P(e, 1)$.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{0}(x^2-x)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}\right]=$$

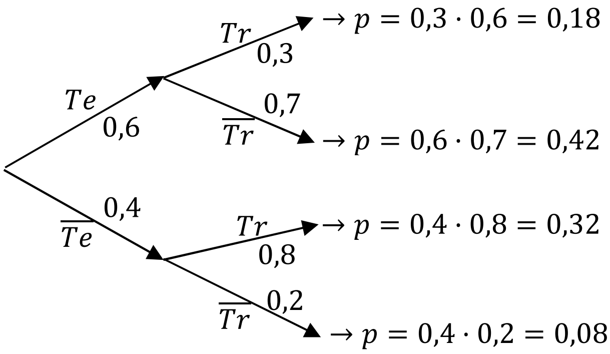
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}\Rightarrow \underline{S=\frac{5}{6}\,u^2\cong 0{,}83\,u^2}.$$

****

4º) El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos de sueño.



a)

$$P = P\left(\overline{Tr} \cap Te\right) = P\left(Te \cap \overline{Tr}\right) = P(Te) \cdot P\left(\overline{Tr}/Te\right) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = \underline{0{,}42}.$$

b)

$$P = P\left(\overline{Te}/\overline{Tr}\right) = \frac{P\left(\overline{Te} \cap \overline{Tr}\right)}{P\left(\overline{Tr}\right)} = \frac{P\left(\overline{Te}\right) \cdot P\left(\overline{Tr}/\overline{Te}\right)}{P(Te) \cdot P\left(\overline{Tr}/Te\right) + P\left(\overline{Te}\right) \cdot P\left(\overline{Tr}/\overline{Te}\right)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}2} =$$

$$= \frac{0{,}08}{0{,}42 + 0{,}08} = \frac{0{,}08}{0{,}50} = \underline{0{,}16}.$$

****

5º) Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) Suponiendo que la proporción es $p = 0{,}5$, determine el tamaño mínimo de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

----

a)

Para un nivel de confianza del 96 %;

$\alpha = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055.$
$(1 - 0{,}02 = 0{,}9800 \rightarrow z = 2{,}055).$

Datos: $n = 500;\ \ p = \frac{320}{500} = 0{,}64;\ \ q = 1 - 0{,}64 = 0{,}36;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}64 - 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{500}};\ 0{,}64 + 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{500}}\right);$$

$(0{,}64 - 2{,}055 \cdot 0{,}0215;\ 0{,}64 + 2{,}155 \cdot 0{,}0205);\ (0{,}64 - 0{,}0441;\ 0{,}64 + 0{,}0441).$

$$\underline{I.C._{96\,\%} = (0{,}5959;\ 0{,}6841).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $p = 0{,}5;\ \ q = 0{,}5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \ E = 0{,}05.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$: $E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} =$

$= 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}05^2} = 3{,}8416 \cdot \frac{0{,}25}{0{,}0025} = \frac{0{,}8851}{0{,}0025} = 384{,}16.$

$$\underline{El\ número\ mínimo\ de\ menores\ a\ consultar\ es\ de\ 385.}$$

****

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y+a^2z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$, dependiente del parámetro real a.

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a=1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1+1+2a^2-2+a^2-1=0;\ \ 3a^2-3=0;$$

$a^2-1=0 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a=-1 \\ a=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=-C_2\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-4+1+6-2+3-4=0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=-1 \\ a=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y-z=-1 \\ x-y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado; para su resolución se tiene en cuenta que de la suma de las dos primeras ecuaciones se deduce que $x=1$. Haciendo $y=\lambda$; $z=2+\lambda$.

$$\underline{Solución: x=1, y=\lambda, z=2+\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

****

7º) Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mistas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 euros y un kg de avellanas de 2 euros, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Sean x e y el número kilos de almendras y avellanas que vende el almecén, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 0 \leq x \leq 50 \\ 0 \leq y \leq 25 \\ x \geq 1{,}5y \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 70 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 0 \leq x \leq 50 \\ 0 \leq y \leq 25 \\ 2x-3y \geq 0 \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 70 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow 2x-3y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{2x}{3} \Rightarrow P(20,0) \rightarrow Si.$

x	0	60
y	0	40

$(2) \Rightarrow x+y \geq 60 \Rightarrow y \geq 60-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	20	40
y	40	20

$(3) \Rightarrow x+y \leq 70 \Rightarrow y \leq 70-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	40	50
y	30	20

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

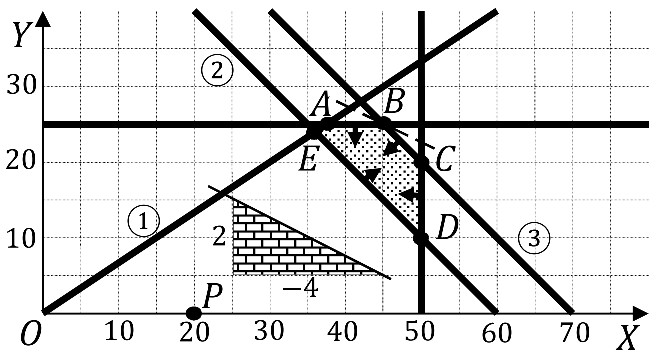
Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=25 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-75=0;$

$x=75:2=37{,}5 \Rightarrow A(37{,}5;\ 25).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=25 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow x+25=70;$

$x=45 \Rightarrow B(45,25).$



$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=50 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow 50+y=70;\ \ y=20 \Rightarrow C(50,20).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=50 \\ x+y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 50+y=60;\ \ y=10 \Rightarrow D(50,10).$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 60 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + 3y = 180 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 180; \;\; x = 36; \;\; y = 24 \Rightarrow E(36, 24).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(37{,}5; 25) = 37{,}5 + 2 \cdot 25 = 37{,}5 + 50 = 87{,}5.$

$B \Rightarrow f(45, 25) = 45 + 2 \cdot 25 = 45 + 50 = 95.$

$C \Rightarrow f(50, 20) = 50 + 2 \cdot 20 = 50 + 40 = 90.$

$D \Rightarrow f(50, 10) = 50 + 2 \cdot 10 = 50 + 20 = 70.$

$E \Rightarrow f(36, 24) = 36 + 2 \cdot 24 = 36 + 48 = 84.$

El valor máximo se produce en el punto $B(45, 25)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x = -\frac{2}{4}x \Rightarrow m = -\frac{2}{4}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ mezclando\ 45\ kg\ de\ almendras\ y\ 25\ de\ avellanas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 95\ euros.}$

****

8º) Se considera la función real de variable real, definida por $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$.

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule $I = \int_1^2 e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x - 3).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0; \;\; x^2 + 2x - 3 = 0; \;\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1.$$

Por ser $e^x > 0, \forall x \in R$, y teniendo en cuenta que el dominio de la función es la recta real, la función es creciente o decreciente según que la expresión $(x^2 + 2x - 3)$ sea positiva o negativa, respectivamente.

Los valores de las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento, que son $(-\infty, -3), (-3, 1)$ y $(1, +\infty)$. Por ejemplo, para $x = 0 \in (-3, 1)$ es $f'(0) < 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0, x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0, x \in (-3, 1)}.$$

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x - 3).$$

$$f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) + e^x \cdot (2x + 2) = e^x \cdot (x^2 + 4x - 1).$$

$$f''(-3) = e^{-3} \cdot [(-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 1] = e^{-3} \cdot (9 - 12 - 1) = -\frac{4}{e^3} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -3.$$

$f(-3) = [(-3)^2 - 3] \cdot e^{-3} = (9-3) \cdot \frac{1}{e^3} = \frac{6}{e^3}.$

$$\underline{Máximo\ relativo: P\left(-3, \frac{6}{e^3}\right).}$$

$f''(1) = e^1 \cdot (1^2 + 4 \cdot 1 - 1) = 4e > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = (1^2 - 3) \cdot e^1 = -2e.$

$$\underline{Mínimo\ relativo: Q(1, -2e).}$$

$b)$

$I = \int_1^2 e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^2 e^{-x} \cdot [(x^2-3) \cdot e^x] \cdot dx = \int_1^2 (x^2-3) \cdot dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1\right) =$

$= \frac{8}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 \Rightarrow \underline{I = \int_1^2 e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = -\frac{2}{3}}.$

****

9º) Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que: $P(A) = 0{,}5$; $P(\overline{B}/A) = 0{,}4$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$.

a) Calcule $P(B/\overline{A})$.

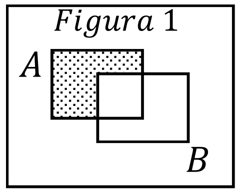
b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

----

a)

Siendo $P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} \Rightarrow P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\overline{B} \cap A) = 0{,}4 \cdot P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2.$



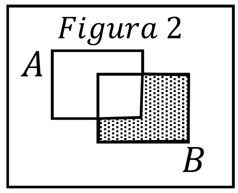
$\overline{B} \cap A = A - (A \cap B)$

De la observación de la figura 1: $P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}2 = 0{,}5 - P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}9 = 0{,}5 + P(B) - 0{,}3;$

$P(B) = 0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}7.$



$B \cap \overline{A} = B - (A \cap B)$

Teniendo en cuanta, ahora, la figura 2:

$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}7 - 0{,}3}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \underline{0{,}8}.$

b)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35 \neq P(A \cap B) = 0{,}3.$

$\underline{\textit{Por lo expuesto anteriormente los sucesos } A \textit{ y } B \textit{ no son independientes}.}$

****

10º) El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117{,}3444; 124{,}6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que obtuvo dicho intervalo.

----

a)

$Datos$: $\mu = 120;\ \ n = 36 \Rightarrow \sigma = 20.$

$$\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(120, \frac{20}{\sqrt{36}}\right) = N\left(120, \frac{10}{3}\right).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-120}{\frac{10}{3}}$.

$$P = P\left(\overline{X} < 125\right) = P\left(Z < \frac{125-120}{\frac{10}{3}}\right) = P\left(Z < \frac{5\cdot 3}{10}\right) = P(Z < 1{,}5) =$$

$= \underline{0{,}9332}$.

b)

$$E = \frac{124{,}6556-117{,}3444}{2} = \frac{7{,}3112}{2} = 3{,}6556.$$

Datos: $n = 81;\ \ \sigma = 20;\ \ E = 3{,}6556.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3{,}6556\cdot\sqrt{81}}{20} = \frac{3{,}6556\cdot 9}{20} = \frac{32{,}9004}{20} = 1{,}645.$$

Buscando en la tabla $N(0,1)$, al valor 1,645 le corresponde el valor, aproximadamente: $0{,}9500$, por lo tanto:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95;\ \ 2 - \alpha = 1{,}9 \Rightarrow \alpha = 0{,}1. \qquad 1 - \alpha = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 90\ \%}$.

****