**PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**

**UNIVERSIDAD DE MADRID**

**EXTRAORDINARIA – 2021**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

1º) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$a$) Calcule los valores del parámetro real $a$ para los cuales la matriz A tiene inversa.

$b$) Para $a = 2$, calcule, si existe la matriz $X$ que satisface $A \cdot X = B$.

----------

$a$)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 = 0;\ -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1.$$

$$\underline{La\ matriz\ a\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{-1\}}.$$

$b$)

Para $a = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 1 = -3. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}}{-3} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}.$$

**********

2º) Una empresa tecnológica se planea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6.000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5.000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8.000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

$a$) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

$b$) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

----------

$a$)

Sean $x$ $e$ $y$ el número de cables de fibra óptica de los tipos A2020 y B2020 que se producen, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\geq 6.000 \\ y\leq 5.000 \\ x+y\leq 8.000 \\ y\geq x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\geq 6.000 \\ x+y\leq 8.000 \\ x-y\leq 0 \\ y\leq 5.000 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x+y\geq 6.000 \Rightarrow y\geq 6.000-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

| x | 6.000 | 0 |
|---|---|---|
| y | 0 | 6.000 |

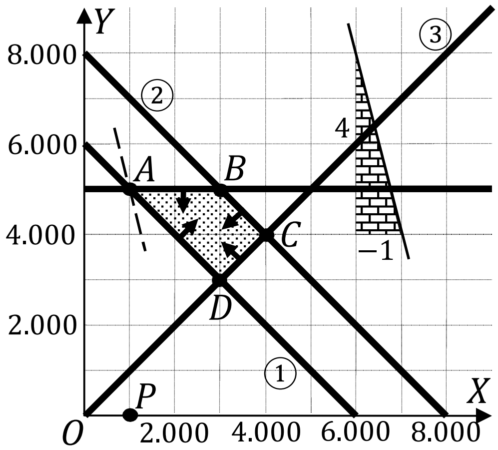
② $\Rightarrow x+y\geq 8.000 \Rightarrow y\geq 8.000-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

| x | 8.000 | 0 |
|---|---|---|
| y | 0 | 8.000 |

③ $\Rightarrow x-y\leq 0 \Rightarrow y\geq x \Rightarrow P(1.000,0)\rightarrow No.$

| x | 0 | 6.000 |
|---|---|---|
| y | 0 | 6.000 |

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.




los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=5.000 \\ x+y=6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(1.000, 5.000)}.$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=5.000 \\ x+y=8.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(3.000, 5.000)}.$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=8.000 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y;\ \ 2x=8.000;\ \ x=4.000 \Rightarrow \underline{C(4.000, 4.000)}.$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 6.000 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y;\;\; 2x = 6.000;\;\; x = 3.000 \Rightarrow \underline{D(3.000, 3.000)}.$$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 2x + 0{,}5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1.000, 5.000) = 2 \cdot 1.000 + 0{,}5 \cdot 5.000 = 2.000 + 2.500 = 4.500.$

$B \Rightarrow f(3.000, 5.000) = 2 \cdot 3.000 + 0{,}5 \cdot 5.000 = 6.000 + 2.500 = 8.500.$

$C \Rightarrow f(4.000, 4.000) = 2 \cdot 4.000 + 0{,}5 \cdot 4.000 = 8.000 + 2.000 = 10.000.$

$D \Rightarrow f(3.000, 3.000) = 2 \cdot 3.000 + 0{,}5 \cdot 3.000 = 6.000 + 1.500 = 7.500.$

El valor mínimo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto a por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 2x + 0{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{0{,}5}x = -\frac{4}{1}x \Rightarrow m = -\frac{4}{1}.$$

$$\underline{Mínimo\ coste: elaborando\ 1.000\ metros\ de\ A2020\ y\ 3.000\ metros\ de\ B2020}.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 4.500\ euros}.$$

**********

3º) Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si\ x\leq 3 \\ \frac{3a}{x} & si\ \ x>3 \end{cases}$:

$a$) Determine el valor del parámetro real $a$ para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de $a$ es $f(x)$ derivable?

$b$) Para $a=1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

----------

$a$)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x-1)=9-3-1=5=f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{3a}{x}=\frac{3a}{3}=a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \Rightarrow \underline{a=5}.$$

La función resulta: $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si\ x\leq 3 \\ \frac{15}{x} & si\ \ x>3 \end{cases}$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=3$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x\leq 3 \\ -\frac{15}{x^2} & si\ \ x>3 \end{cases} \Rightarrow f'(3)=\begin{cases} 2\cdot 3-1=5 & si\ x\leq 3 \\ -\frac{15}{3^2}=-\frac{5}{3} & si\ \ x>3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(3^-)\neq f'(3^+) \Rightarrow \underline{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x=3}.$$

$b$)

La tangente a la función $f(x)$ para $x=1$ no depende del valor de $a$, por lo que es extraño el dato de $a=1$.

Para $x=1$ la función es $f(x)=x^2-x-1$.

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow P(1, -1)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow m = f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 \Rightarrow m = 1$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, -1)$ con $m = 1$ es:

$y + 1 = 1 \cdot (x - 1) = x - 1$.

$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x - y - 2 = 0}$.

**********

4º) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$; $P(\overline{B}) = 0,8$ $y$ $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$.

$a)$ Estudie si los sucesos A y B son independientes. $b)$ Calcule $P(\overline{A}/\overline{B})$.

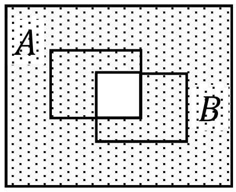
----------

$a)$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,9;$$

$$P(A \cap B) = 1 - 0,9 = 0,1.$$



$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

Dos sucesos A y B son independientes cuando se cumple:

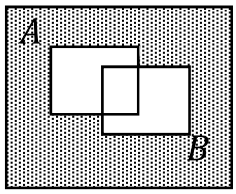
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0,1 = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1.$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ son\ independientes}.$

$b)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6.$$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0,6}{1 - 0,2} = \frac{0,4}{0,8} = \underline{0,5}.$$

**********

5º) El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable de distribución normal de media $\mu$ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

$a$) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para $\mu$.

$b$) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

----------

$a$)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 20;\;\; \overline{x} = 60;\;\; \sigma = 8;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\; y\; n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(60 - 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}};\; 60 + 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}\right);\; (60 - 1{,}96 \cdot 1{,}7889;\; 60 + 1{,}96 \cdot 1{,}7889);$

$(60 - 3{,}5062;\; 60 + 3{,}5062)$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (56{,}4938;\; 63{,}5062)}.$$

$b$)

$Datos$: $\mu = 59;\;\; \sigma = 8;\;\; n = 10.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(59;\; \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(59;\; 2{,}53).\qquad Z = \frac{X-59}{2{,}53}.$

$P = P(57 < X < 61) = P\left(\frac{57-59}{2{,}53} < Z < \frac{61-59}{2{,}53}\right) = P\left(\frac{-2}{2{,}53} < Z < \frac{2}{2{,}53}\right) =$

$= P(-0{,}79 < Z < 0{,}79) = P(Z \leq 0{,}79) - [1 - P(Z \leq 0{,}79)] =$

$= P(Z \leq 0{,}79) - 1 + P(Z \leq 0{,}79) = 2 \cdot P(Z \leq 0{,}79) - 1 = 2 \cdot 0{,}7852 - 1 =$

$= 1{,}5704 - 1 = \underline{0{,}5704}.$

**********

6º) Se considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+2ay+z=0 \\ -x-ay=1 \\ -y-z=-a \end{array}\right\}$ dependiente del parámetro real $a$:

$a$) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real $a$.

$b$) Resuelva el sistema para $a=3$.

----------

$a$)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a-1+2a=0;\ \ a-1=0 \Rightarrow a=1.$$

$$\underline{Para\ a\neq 1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2+F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b$)

Para $a=3$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+6y+z=0 \\ -x-3y=1 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+6y+z=0 \\ -x-3y=1 \\ y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x=-1-3y \\ z=3-y \end{cases}\right\} \Rightarrow -1-3y+6y+3-y=0;$$

$2y+2=0 \Rightarrow y=-1;\ \ x=-1+3=2;\ \ z=3+1=4.$

$$\underline{Solución: x=2,\ y=-1,\ z=4.}$$

**********

7º) Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$.

$a)$ Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$b)$ Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

----------

$a)$

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de $x$ que anulan el denominador.

$(x-1)^2=0;\;\; x-1=0 \Rightarrow x=1.$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando $x$ tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de $x$ que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x=1\ es\ asíntota\ vertical}.$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con $m$ finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^3-2x^2+x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-2x+1}=0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y=x}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)(x-1)^2-(x^3-2x^2)\cdot[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{(3x^2-4x)(x-1)-2\cdot(x^3-2x^2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{x\cdot(x^2-3x+4)}{(x-1)^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x\cdot(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} = 0;\;\; x\cdot(x^2-3x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$$

$$x^2-3x+4 = 0;\;\; x = \frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2-3x+4 > 0, \forall x \in R.$$

La única solución: $x = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (0, 1)}.$$

**********

8º) Se sabe que la derivada de una función real de variable real es $f'(x) = 3x^2 + 8x$.

$a$) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.

$b$) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

----------

$a$)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (3x^2 + 8x) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + C = x^3 + 4x^2 + C.$$

$$f(1) = 11 \Rightarrow 1^3 + 4 \cdot 1^2 + C = 11;\;\; 1 + 4 + C = 11 \Rightarrow C = 6.$$

$$\underline{f(x) = x^3 + 4x^2 + 6.}$$

$b$)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0;\;\; x(3x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}.$$

$$f''(x) = 6x + 8.$$

$$f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 6 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(0, 6).}$$

$$f''\left(-\frac{8}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{-8}{3}\right) + 8 = -8 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -\frac{8}{3}.$$

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + 6 = -\frac{512}{27} + \frac{256}{9} + 6 = \frac{-512+768+152}{27} =$$

$$= \frac{930-512}{27} = \frac{418}{27} \Rightarrow \underline{Máximo: B\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right).}$$

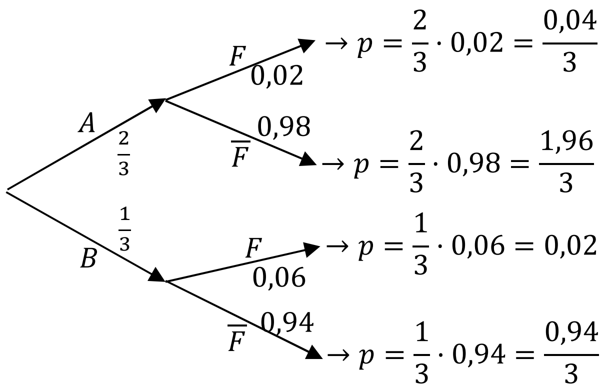
**********

9º) Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, sabiendo que el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A es el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

$a$) No sufra fracaso escolar.

$b$) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

----------




$a$)

$$P = P(\overline{F}) = P(A \cap \overline{F}) + P(B \cap \overline{F}) = P(A) \cdot P(\overline{F}/A) + P(B) \cdot P(\overline{F}/B) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0{,}98 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}94 = \frac{1{,}96}{3} + \frac{0{,}94}{3} = \frac{2{,}90}{3} = \underline{0{,}9667}.$$

$b$)

$$P = P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F/A)}{1 - P(\overline{F})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}02}{1 - \frac{2{,}90}{3}} = \frac{\frac{0{,}04}{3}}{\frac{0{,}1}{3}} = \frac{0{,}04}{0{,}1} = \underline{0{,}40}.$$

**********

10º) El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

$a$) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de $\mu$ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

$b$) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

----------

$a$)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $\sigma = 3;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\;\; E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 3)^2 = 5{,}88^2 = 34{,}57.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 35\ pruebas}$

$b$)

$Datos$: $\mu = 32;\;\; n = 16;\;\; \sigma = 3.$

$X \rightarrow N\left(\mu;\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(32;\, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(32;\; 0{,}75).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-32}{0{,}75}$.

$P = P(X < 30{,}5) = P\left(Z < \frac{30{,}5-32}{0{,}75}\right) = P\left(Z < \frac{-1{,}5}{0{,}75}\right) = P(Z < -2) =$

$= [1 - P(Z \leq 2)] = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$

**********