PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay=0 \\ x+2z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real a:

a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix}=2a-2a-a(a+1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=-1.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $a=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x=0\\ x+2z=0\\ x+z=0\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $y=\lambda \Rightarrow x=z=0$.

$$\underline{Solución: x=0;\ \ y=\lambda;\ \ z=0, \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4$.

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x=0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

----

a)

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\frac{4x-x^3+12x+4x^2}{3x+x^2}=\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2}.$$

$$x^2+3x=0;\ \ x(x+3)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-3 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R-\{-3,0\}}.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2}=\frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-x(x^2-4x+16)}{x(x+3)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+16}{x+3}=-\frac{16}{3}.$$

Para que la función sea continua para $x=0$ puede redefinirse de la forma siguiente:

$$\underline{f(x)=\begin{cases}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4 & si\ \ x\neq 0\\ -\frac{13}{x} & si\ \ x=0\end{cases}}.$$

b)

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2}=\frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\underline{No\ hay\ asíntota\ horizontal\ para\ x=0}.$$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-(-3)^3+4\cdot(-3)^2-16\cdot(-3)}{3\cdot(-3)+(-3)^2}=\frac{27+36+48}{-9+9}=\frac{111}{0}=\infty.$$

$$\underline{Asíntota\ horizontal\ para\ x=-3}.$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2}=-\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas oblicuas:

Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx], \text{ con } m \text{ finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+4x^2-16x}{3x^2+x^3} = -1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+4x^2-16x+3x^2+x^3}{3x+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7x^2-16x}{3x+x^2} = 7.$$

$$\underline{\textit{Asíntota oblicua}: y = -x + 7.}$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

----

a)

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow P(-1, 0).$$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x.$$

$$m = f'(-1) = -4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = 4 + 3 - 4 = 3.$$

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 0 = 3 \cdot (x + 1) = 3x + 3 \Rightarrow \underline{Recta\ tangente: t \equiv 3x - y + 3 = 0}.$$

b)

Los puntos de corte de $f(x)$ en $[0, +\infty]$ son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + x^3 + 2x^2 = 0;\ -x^2(x^2 - x - 2) = 0;\ \ x_1 = x_2 = 0.$$

$$x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_3 = -1, x_4 = 2 \Rightarrow O(0,0), A(2,0).$$

La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) \cdot dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^5}{5} + \frac{2^4}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3}\right) - 0 = -\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3} = \frac{-96+60+80}{15} = \frac{44}{15}.$$

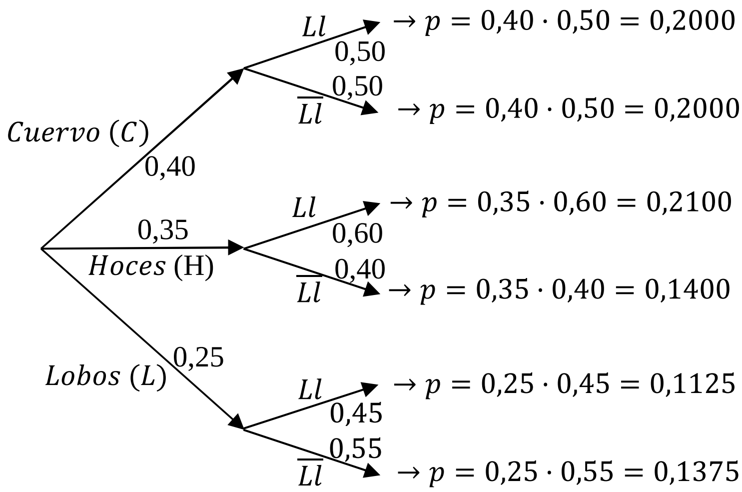
$$\underline{S = \frac{44}{15}\ u^2 \cong 2{,}93\ u^2.}$$

****

4º) Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?



a)

$$P = P(\overline{Ll}) = P(C \cap \overline{Ll}) + P(H \cap \overline{Ll}) + P(L \cap \overline{Ll}) =$$

$$= P(C) \cdot P(\overline{Ll}/C) + P(H) \cdot P(\overline{Ll}/H) + P(L) \cdot P(\overline{Ll}/L) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}50 + 0{,}35 \cdot 0{,}40 + 0{,}25 \cdot 0{,}55 = 0{,}2000 + 0{,}1400 + 0{,}1375 =$$

$$= \underline{0{,}4775}.$$

b)

$$P = P(C/Ll) = \frac{P(C \cap Ll)}{P(Ll)} = \frac{P(C) \cdot P(Ll/C)}{1 - P(\overline{Ll})} = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}50}{1 - 0{,}4775} = \frac{0{,}2000}{0{,}5225} = \underline{0{,}3828}.$$

****

5º) La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de madia μ km y desviación típica de 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se pueda escribir más de 30 km.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95,44 % es:

$1-\alpha=0{,}9544 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}9544=0{,}0456 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}0228}=2.$
$(1-0{,}0228=0{,}9772 \ \rightarrow z=2).$

Datos: $\sigma=0{,}5; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2; \ \ E=0{,}05.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2\cdot\frac{0{,}5}{0{,}05}\right)^2=$

$=(2\cdot 10)^2=20^2=400.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 400\ bolígrafos.}$

b)

Si con 16 bolígrafos se escriben 30 km, con uno: $\frac{30}{16}=1{,}875.$

$Datos$: $\mu=2; \ \ n=16; \ \ \sigma=0{,}5.$

$X\rightarrow N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(2;\frac{0{,}5}{\sqrt{16}}\right)=N\left(2;\frac{0{,}5}{4}\right)=N(2;\ 0{,}125).$

Tipificando la variable: $Z=\frac{X-2}{0{,}125}.$

$$P=P(X>1{,}875)=P\left(Z>\frac{1{,}875-2}{0{,}125}\right)=P\left(Z>\frac{-0{,}125}{0{,}125}\right)=P(Z>-1)=$$

$=P(Z\leq 1)=\underline{0{,}8413}.$

****

6º) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & m & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2-5A=-4I$, siendo I la matriz identidad.

$b)$ Para $m=1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

$a)$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & m & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & m & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & m+1 & 10\\ 0 & m^2 & 0\\ 5 & -m-1 & 6\end{pmatrix}.$$

$$-5A=-5\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & m & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & -5 & -10\\ 0 & -5m & 0\\ -5 & 5 & -10\end{pmatrix}.$$

$$A^2-5A=-4I\Rightarrow\begin{pmatrix}11 & m+1 & 10\\ 0 & m^2 & 0\\ 5 & -m-1 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15 & -5 & -10\\ 0 & -5m & 0\\ -5 & 5 & -10\end{pmatrix}=-4I;$$

$$\begin{pmatrix}-4 & m-4 & 0\\ 0 & m^2-5m & 0\\ 0 & -m+4 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}m-4=0\\ m^2-5m=-4\end{array}\right\}\Rightarrow\underline{m=4}.$$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Para $m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. $\quad|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=6-2=4\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow\underline{Para\ m=1\ la\ matriz\ A\ es\ invertible}.$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\leftrightarrow F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\rightarrow F_3-3F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & -3\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}F_1\rightarrow F_1+F_2\\ F_3\rightarrow F_3-4F_2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 1 & -4 & -3\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_3-\tfrac{1}{4}F_3\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

****

7º) La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3; \;\; 0 \leq y \leq 15; \;\; y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0; \;\; y - x \leq 10; \;\; y + 20 \geq 2x.$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

----

a)

Conjuntos de restricciones ordenadas: $\left.\begin{array}{r} x + 2y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 2x - y \leq 20 \\ x \geq 3; \; 0 \leq y \leq 15 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x + 2y \geq 10 \Rightarrow y \geq \frac{10-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	10
y	5	0

② $\Rightarrow x - y \geq -10 \Rightarrow y \leq x + 10 \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	5
y	10	15

③ $\Rightarrow 2x - y \leq 20 \Rightarrow y \geq 2x - 20 \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	10	15
y	0	10

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

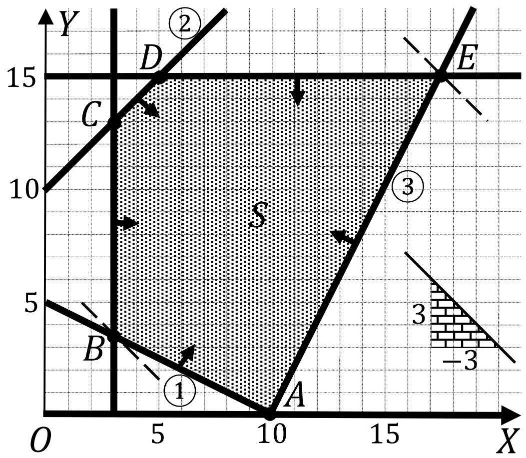
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 20 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ 4x - 2y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 50; \;\; x = 10; \;\; y = 0 \Rightarrow A(10, 0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ x + 2y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(3, \frac{7}{2}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = 3 \\ x - y = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 13 \Rightarrow C(3, 13).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 15 \\ x - y = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow D(5, 15).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 15 \\ 2x - y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 35 \Rightarrow D\left(\frac{35}{2}, 15\right).$



b)

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = x + y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10,0) = 10 + 0 = 10.$ $\quad$ $B \Rightarrow f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5.$

$C \Rightarrow f(3,13) = 3 + 13 = 16.$ $\quad$ $D \Rightarrow f(5,15) = 5 + 15 = 20.$

$E \Rightarrow f\left(\frac{35}{2}, 15\right) = \frac{35}{2} + 15 = \frac{65}{2} = 32{,}5.$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ E\ y\ el\ mínimo\ en\ el\ punto\ B.}$$

También se hubieran obtenido los puntos E y B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

****

8º) Se considera la función real de variable real $f(x) = 3 \cdot (x+k) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R por ser el producto de una constante por una función polinómica y por una función exponencial, que están ambas son continuas y están definidas en R.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R}.$$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3\left[e^{-\frac{x}{2}} - (x+k) \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right] = 3e^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{x+k}{2}\right) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x - k).$$

$$m = f'(1) = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 - 1 - k) = -\frac{3e(1-k)}{2\sqrt{e}}.$$

Si la pendiente es horizontal su pendiente es cero:

$$m = 0 \Rightarrow -\frac{3e(1-k)}{2\sqrt{e}} = 0;\ \ 1 - k = 0 \Rightarrow \underline{k = 1}.$$

El punto de tangencia, para $x = 1\ y\ k = 1$, el siguiente:

$$f(1) = 3(1+1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\sqrt{e}} = \frac{6\sqrt{e}}{e} \Rightarrow P\left(1,\ \frac{6\sqrt{e}}{e}\right).$$

$$\underline{La\ tangente\ horizontal\ para\ x = 1\ es\ y = \frac{6\sqrt{e}}{e}}.$$

b)

Para $k = 1$ la función es $f(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x - 1) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - x) = 0;\ \ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Por ser $f(x)$ continua en R, la raíz de su derivada divide su domino en los intervalos $(-\infty, 1)\ y\ (1, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente creciente o decreciente.

Para determinar cual de los intervalos es creciente o decreciente consideramos el valor trivial $x = 0 \in (-\infty, 1)$:

$$f'(0) = \frac{3}{2}e^{0} \cdot (1 - 0) = \frac{3}{2} > 0.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty).}$$

****

9º) Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplia ésta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

----

a)

Propiedad de que se estropee el microondas: $P(M) = 0{,}02$.

Propiedad de que se estropee el horno: $P(H) = 0{,}05$.

El suceso contrario a "que se estropee al menos uno de ellos" es "que no se estropee ninguno", por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P\left(\overline{M}\right) \cdot P\left(\overline{H}\right) = 1 - (1 - 0{,}02)(1 - 0{,}05) = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}95 =$$

$$= 1 - 0{,}931 = \underline{0{,}069}.$$

b)

La probabilidad de conservar la factura es $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

La probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 0{,}02 \cdot 0{,}6 = \underline{0{,}012}.$$

****

10º) Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes: $40,\ 45,\ 38,\ 44,\ 41,\ 40,\ 35,\ 50,\ 40\ y\ 37$. Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua del modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = \frac{410}{10} = 41.$$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$$

$$(1-0{,}05 = 0{,}9500\ \rightarrow z = 1{,}645).$$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 41;\ \sigma = 7;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(41 - 1{,}645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}};\ 41 + 1{,}645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}\right);$$

$$(41 - 1{,}645 \cdot 2{,}2136;\ 41 + 1{,}645 \cdot 2{,}2136);\ \ (41 - 3{,}6414;\ 41 + 3{,}6414).$$

$$\underline{I.C._{90\ \%} = (37{,}3586;\ \ 44{,}6414).}$$

b)

El error máximo es la mitad del intervalo de confianza: $E = \frac{5}{2} = 2{,}5.$

Datos: $n = 64;\ \ \sigma = 7;\ \ E = 2{,}5.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2{,}5 \cdot \sqrt{64}}{7} = \frac{2{,}5 \cdot 8}{7} = 2{,}86.$$

Buscando en la tabla $N(0,1)$, al valor 2,86 le corresponde 0,9979, por lo tanto:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9979;\ \ \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9979 = 0{,}0021 \Rightarrow \alpha = 0{,}0042.$$

$1-\alpha=1-0{,}0042=0{,}9958.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 99{,}58\ \%}.$$

****