PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$, con $a \in R$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la siguiente igualdad:

$A^2 - 5A = -I$.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

----

a)

$$A^2 - 5A = -I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 + 5a^2 & 25a \\ 5a & 9 + 5a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -25a \\ -5a & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 5a^2 - 6 = -1;\ \ 5a^2 = 5 \Rightarrow \underline{a = \pm 1}.$$

b)

Para $a = -1$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21.000 kg de tierra vegetal y 15.000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora del tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 euros y 60 euros por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinado por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

----

a)

Sean x e y los metros cúbicos que elabora el vivero de los tipos A y B, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 60x+50y \le 21.000 \\ 30x+50y \le 15.000 \\ x \le 5y \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6x+5y \le 2.100 \\ 3x+5y \le 1.500 \\ x-5y \le 0 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 6x+5y \le 2.100 \Rightarrow y \le \frac{2.100-6x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	100	350
y	300	0

② $\Rightarrow 3x+5 \le 1.500 \Rightarrow y \le \frac{1.500-3x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	500
y	300	0

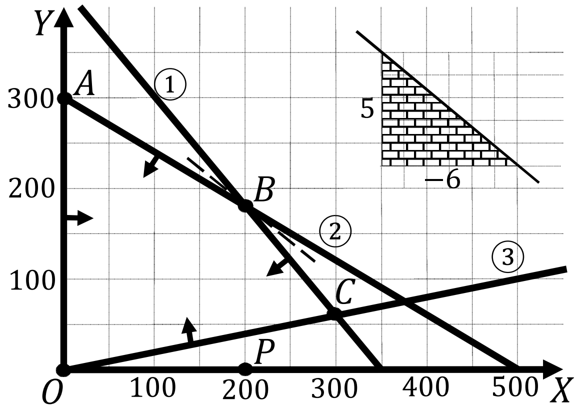
③ $\Rightarrow x-5y \le 0 \Rightarrow y \ge \frac{x}{5} \Rightarrow P(200,0) \to No.$

x	0	500
y	0	100

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 50x+60y$.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+5y=1.500 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,300).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+5y=2.100 \\ 3x+5y=1.500 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+5y=2.100 \\ -3x-5y=-1.500 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=600;\ \ x=200;\ \ 600+5y=1.500;$

$5y = 900;\ \ y = 180 \Rightarrow B(200, 180).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x + 5y = 2.100 \\ x - 5y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 2.100;\ \ x = 300;\ \ y = 50 \Rightarrow C(300, 60).$$

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 300) = 50 \cdot 0 + 60 \cdot 300 = 0 + 18.000 = 18.000.$$

$$B \Rightarrow f(200, 180) = 50 \cdot 200 + 60 \cdot 180 = 10.000 + 10.800 = 20.800.$$

$$C \Rightarrow f(300, 60) = 50 \cdot 300 + 60 \cdot 60 = 15.000 + 3.600 = 18.600.$$

El máximo se produce en el punto $B(200, 180)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 50x + 60y = 0 \Rightarrow y = -\frac{50}{60}x \Rightarrow m = -\frac{5}{6}.$$

$$\underline{Debe\ elaborar\ 200\ metros\ cúbicos\ de\ A\ y\ 180\ metros\ cúbicos\ de\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 20.800\ euros.}$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2+1} & si \quad x < 1 \\ 2m + Lx & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) Estudie los valores del parámetro $m \in R$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de m para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2x^2+1} = \frac{6}{3} = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (2m + L1) = 2m + 0 = 2m = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 = 2m \Rightarrow \underline{m = 1}.$$

Para $x < 1$ la función es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$; su derivada es la siguiente:

$$f'(x) = \frac{6\cdot(2x^2+1) - 6x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{12x^2 + 6 - 24x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{6 - 12x^2}{(2x^2+1)^2} \Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{6\cdot(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}}.$$

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX.

En el intervalo $(-1, 0)$ la función es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$, que tiene todos sus valores negativos en este intervalo, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^{-1} f(x)\cdot dx = \int_0^{-1} \frac{6x}{2x^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x^2 + 1 = t \\ 4x\cdot dx = dt \\ 6x\cdot dx = \frac{3}{2}\cdot dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x = -1 \to t = 3 \\ x = 0 \to t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{3}{2}\cdot\int_1^3 \frac{1}{t}\cdot dt = \frac{3}{2}\cdot[Lt]_1^3 = \frac{3}{2}\cdot(L3 - L1) = \frac{3}{2}\cdot(L3 - 0) = \frac{3}{2}\cdot L3.$$

$$\underline{S = \frac{3}{2}\cdot L3\ u^2 \cong 1{,}65\ u^2}.$$

****

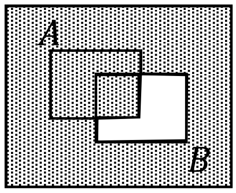
4º) Sean A y B sucesos de un experimento aleatoria tales que $P(A/B) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{6}$ y $P(A) = \frac{2}{3}$. Calcule:

$a)$ $P\left(A \cup \overline{B}\right)$. $\qquad$ $b)$ $P\left[\left(\overline{A} \cup B\right) \cup \left(\overline{B} \cup A\right)\right]$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

$a)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) =$$



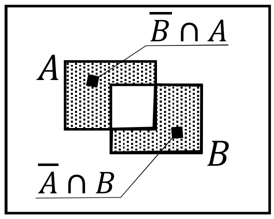
$A \cup \overline{B} = 1 - B + (A \cap B)$

$$= P(B) \cdot P(A/B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

$$P\left(A \cup \overline{B}\right) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{24-4+1}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} = \underline{0{,}875}.$$

$b)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$



$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{16+4-1}{24} = \frac{19}{24} = P(A \cup B).$$

$$P\left[\left(\overline{A} \cup B\right) \cup \left(\overline{B} \cup A\right)\right] = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{19}{24} - \frac{1}{24} = \frac{18}{24} = \underline{\frac{3}{4} = 0{,}75}$$

****

5º) El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60\ g$.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0{,}9940$.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$.

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96)$.

Datos: $\sigma = 60$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$; $E = 20$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{60}{20}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 3)^2 = 5{,}88^2 = 34{,}5744$.

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 35 \textit{ patatas.}}$

b)

Datos: $\sigma = 60$; $n = 100$; $P(\overline{X} \leq 220) = 0{,}9940$.

$\overline{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu, 6)$. Tipificando $\rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-\mu}{6}$.

$P(\overline{X} \leq 220) = 0{,}9940 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{220-\mu}{6}\right) = 0{,}9940$.

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ a la inversa, a 0,9940 le corresponde 2,51:

$\frac{220-\mu}{6} = 2{,}51$; $220 - \mu = 15{,}06$; $\mu = 220 - 15{,}06 = 204{,}94$.

$\underline{\textit{El valor del peso medio de las patatas de la muestra es de } 204{,}94 \textit{ gramos.}}$

****

6º) Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x-ay=1 \\ ax-4y-z=2 \\ 2x+ay-z=a-4 \end{array}\right\}$ dependiente del parámetro $a \in R$:

a) Discute el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = 4 + 2a + a - a^2 = 0; \;\; a^2 - 3a - 4 = 0;$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 4.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a \neq -1 \\ a \neq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 1 + 4 + 8 + 2 - 10 = 25 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = -1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 4 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{Gauss\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 4F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = 3$ el sistema resulta $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-3^2+3\cdot 3+4} = \frac{4-3+3-6}{4} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2-2-1+3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3+9-12+6+6-6-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

$$\underline{Solución: x = -\frac{1}{2};\ \ y = -\frac{1}{2};\ \ z = -\frac{3}{2}.}$$

****

7º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{ax^2-3}{x^2-5}$.

a) Calcule el valor del parámetro $a \in R$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $x=-1$.

b) Para $a=1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

----

a)

Las asíntotas horizontales son de la forma $y=k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2-3}{x^2-5}=-1 \Rightarrow \underline{a=-1}.$$

b)

Para $a=1$ la función resulta $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-5}$.

El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R-\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-5)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-5)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-5-x^2+3)}{(x^2-5)^2}=\frac{-4x}{(x^2-5)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-5)^2}=0;\ -4x=0 \Rightarrow x=0.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)\cup\left(-\sqrt{5},0\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x\epsilon\left(0,\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right).}$$

Se debe tener en cuenta que la función es par, por ser $f(x)=f(-x)$, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-4\cdot(x^2-5)^2-(-4x)\cdot[2\cdot(x^2-5)\cdot 2x]}{(x^2-5)^4}=\frac{-4\cdot(x^2-5)+16x^2}{(x^2-5)^3}=\frac{-4x^2+20+16x^2}{(x^2-5)^3}=$$

$$=\frac{12x^2+20}{(x^2-5)^3}=\frac{4(3x^2+5)}{(x^2-5)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{4 \cdot (0+5)}{(0-5)^3} = \frac{20}{-125} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{Máximo: A\left(0, \frac{3}{5}\right)}.$$

****

8º) Dada la función real de variable real $f(x) = e^{2x} + x$.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

b) Calcule $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$.

----

a)

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 1.$$

$$m = f'(0) = 2 \cdot e^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 \Rightarrow P(0, 1).$$

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 1 = 3 \cdot (x - 0) = 3x \;\Rightarrow\; \underline{t \equiv 3x - y + 1 = 0}.$$

b)

$$I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (e^{2x} + x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2x = t;\;\; x = \frac{1}{2}t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \left| \begin{matrix} x = 1 \to t = 2 \\ x = 0 \to t = 0 \end{matrix} \right. \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left(e^t + \frac{1}{2}t\right) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \left[e^t + \frac{t^2}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^2 + \frac{2^2}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(e^0 + \frac{0^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (e^2 + 1) - \frac{1}{2} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{2} \cdot (e^2 + 1 - 1) = \frac{1}{2} \cdot e^2.$$

$$\underline{I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^2.}$$

****

9º) En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determina la probabilidad de que:

$a)$ Sea el examen de un alumno.

$b)$ Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

Este ejercicio se puede hacer mediante una tabla de contingencia:

	$Negro$	$Azul$	
$Alumno$	0,2000		
$Alumna$		0,4667	
		0,6667	1

Completando la tabla de contingencia:

	$Negro$	$Azul$	
$Alumno$	0,2000	$\mathbf{0,2000}$	$\mathbf{0,4000}$
$Alumna$	$\mathbf{0,1333}$	0,4667	$\mathbf{0,6000}$
	$\mathbf{0,3333}$	0,6667	1

Ahora basta con aplicar la regla de Laplace:

$a)$

$$P=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{0,4000}{1}=\underline{0,4}.$$

$b)$

$$P=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{0,2000}{0,3333}=\underline{0,6}.$$

****

10º) Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarde en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26{,}9; 37{,}1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

----

a)

$$E = \frac{37{,}1-26{,}9}{2} = \frac{10{,}2}{2} = 5{,}1.$$

Para un nivel de confianza del 98,92 % es:

$1-\alpha = 0{,}9892 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}9892 = 0{,}0108 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0054} = 2{,}55.$
$(1-0{,}0054 = 0{,}9946 \rightarrow z = 2{,}55).$

Datos: $\sigma = 10;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}55;\;\; E = 5{,}1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}55 \cdot \frac{10}{5{,}1}\right)^2 =$

$= (2{,}55 \cdot 1{,}9608)^2 = 5^2 = 25.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 25 \textit{ días}.}$

b)

$Datos\text{: } \mu = 30;\;\; n = 16;\;\; \sigma = 10.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(30, \frac{10}{\sqrt{16}}\right) = N(30;\; 2{,}5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-30}{2{,}5}$.

$P = P(25 \le X \le 35) = P\left(\frac{25-30}{2{,}5} \le Z \le \frac{35-30}{2{,}5}\right) = P\left(\frac{-5}{2{,}5} \le Z \le \frac{5}{2{,}5}\right) =$

$= P(-2 \le Z \le 2) = P(Z < 2) - [1 - P(Z < 2)] = P(Z < 2) - 1 + P(Z < 2) =$

$= 2 \cdot P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 1{,}9544 - 1 = \underline{0{,}9544}.$

****