1. (8.25p) Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones (en el caso de las inecuaciones se deberá de dar las tres soluciones: gráfica, intervalo y desigualdad):

a. $2(x+3)-(10-x^2)=(x-4)^2$

b. $(2x+4)(2x-4)+(2x-4)^2=0$

c. $\dfrac{3x-2}{5}-\dfrac{3(x+1)}{10}-\dfrac{3-x}{4}=\dfrac{1}{10}$

d. $\dfrac{(x-3)^2}{2}+x^2=2x-(x-2)$

e. $9x^2-12x=-4$

f. $x^4-5x^2-36=0$

g. $2x(x^2+9)(x-9)(3x^2-9)=0$

h. $\sqrt{6x+7}-3x=2$

i. $\dfrac{x}{2}=1+\dfrac{2x-4}{x+4}$

j. $2-\dfrac{1-3x^2}{6}\geq\dfrac{(x-3)(x+2)}{2}$

k. $\begin{cases} -x\leq\dfrac{3}{2} \\ x-\dfrac{x}{4}<\dfrac{x+1}{6}+1 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a.$ $2(x+3)$-$(10-x^2)=(x-4)^2$

$2x+6-10+x^2=x^2-8x+16$

$2x+8x=16-6+10$

$10x=20$

$x=\frac{20}{10}=2$

$b.$ $(2x+4)(2x-4)+(2x-4)^2=0$

$4x^2-16+4x^2-16x+16$

$4x^2-16+4x^2-16x+16=0$

$8x^2-16x=0$

$x(8x-16)=0 \rightarrow$

$x_1=0$

$8x-16=0 \rightarrow 8x=16 \rightarrow x_2=2$

$c.$ $\frac{3x-2}{5}$-$\frac{3(x+1)}{10}$-$\frac{3-x}{4}=\frac{1}{10}$

$\frac{3x-2}{5}$-$\frac{3x+3}{10}$-$\frac{3-x}{4}=\frac{1}{10}$

$\frac{12x-8-6x-6-15+5x}{20}=\frac{2}{20}$

$12x-8-6x-6-15+5x=2$

$12x-6x+5x=2+8+6+15$

$11x=31$

$x=\frac{31}{11}$

$$d. \quad \frac{(x-3)^2}{2} + x^2 = 2x - (x-2)$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{2} + x^2 = 2x - x + 2$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9 + 2x^2}{2} = \frac{4x - 2x + 4}{2}$$

$$x^2 - 6x + 9 + 2x^2 = 4x - 2x + 4$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} =$$

$$x_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{8-2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$e. \quad 9x^2 - 12x = -4$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18} =$$

$$\frac{12 \pm 0}{18} = \frac{2}{3}$$

$$f. \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Realizamos el cambio de variable $x^2 = t$:

$$t^2 - 5t - 36 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$t_1 = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{5-13}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$Para\, t_1 = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$Para\, t_2 = -4 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \nexists$$

$g.$ $2x(x^2+9)(x-9)(3x^2-9) = 0$

Igualamos cada uno de los factores a cero:

$$2x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{2} = 0$$

$$x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \nexists$$

$$x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$$

$$3x^2 - 9 = 0 \rightarrow 3x^2 = 9 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$h.$ $\sqrt{6x+7} - 3x = 2$

$$\sqrt{6x+7} = 3x + 2$$

$$\left(\sqrt{6x+7}\right)^2 = (3x+2)^2$$

$$6x + 7 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$9x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-3)}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{18} =$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-6 \pm 12}{18}$$

$$x_1 = \frac{-6+12}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-6-12}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

(No se pedía comprobar las soluciones)

$i.\quad \frac{x}{2} = 1 + \frac{2x-4}{x+4}$

$$\frac{x(x+4)}{2(x+4)} = \frac{2(x+4)+2(2x-4)}{2(x+4)}$$

$$x^2 + 4x = 2x + 8 + 4x - 8$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x - 2 \rightarrow x_2 = 2$$

$j.\quad 2 - \frac{1-3x^2}{6} \geq \frac{(x-3)(x+2)}{2}$

Resolvemos la ecuación resultante de sustituir la desigualdad por una igualdad:

$$2 - \frac{1-3x^2}{6} = \frac{x^2+2x-3x-6}{2}$$

$$\frac{24-2+6x^2}{12} = \frac{6x^2+12x-18x-36}{12}$$

$$6x^2 - 6x^2 - 12x + 18x = -36 - 24 + 2$$

$$6x = -58$$

$$x = -\frac{58}{6} = -\frac{29}{3}$$

Situamos el valor sobre la recta real y probamos un valor de uno de los intervalos, por ejemplo, $x = 0$ en la inecuación dada (no será necesario probar un valor en el otro intervalo por ser una inecuación de primer grado sin raíces dobles):

$¿\, 2-\frac{1}{6} \geq \frac{(-3)\cdot 2}{2}?$

$¿\, \frac{11}{6} \geq -3?$

Verdadero, luego la solución gráfica es la dada en la imagen y la solución en forma de intervalo es $\left[{-29}/{3}, +\infty\right)$

$k.\quad \begin{cases} -x \leq \frac{3}{2} \\ x-\frac{x}{4} < \frac{x+1}{6}+1 \end{cases}$

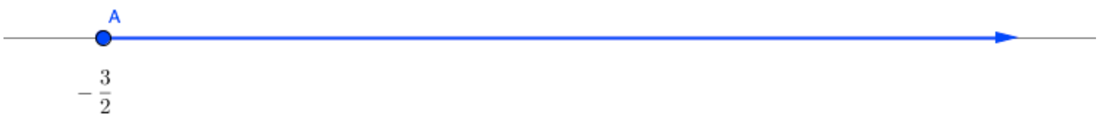
Obtenemos la solución gráfica de cada una de las inecuaciones:

1ª INECUACIÓN:

Resolvemos la ecuación resultante de sustituir la desigualdad por una igualdad:

$-x=\frac{3}{2} \rightarrow x=-\frac{3}{2}$

Situamos el valor sobre la recta real y probamos un valor de uno de los intervalos, por ejemplo, $x=0$ *en la inecuación dada:*



$¿-0 \leq \frac{3}{2}?$

$¿\, 0 \leq \frac{3}{2}? \rightarrow verdadero$

2ª INECUACIÓN:

Resolvemos la ecuación resultante de sustituir la desigualdad por una igualdad:

$$x - \frac{x}{4} = \frac{x+1}{6} + 1$$

$$\frac{12x - 3x}{12} = \frac{2x + 2 + 12}{12}$$

$$12x - 3x - 2x = 2 + 12$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

Situamos el valor sobre la recta real y probamos un valor de uno de los intervalos, por ejemplo, $x = 0$ en la inecuación dada:

$$¿\,0 < \frac{1}{6} + 1? \rightarrow verdadero$$

Dibujamos ambas soluciones en un único gráfico:

Luego las soluciones pedidas son:

$$x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < 2$$