1. (7.5p) Resuelve las ecuaciones:

$\mathbf{a}.\,(\mathbf{2p})\qquad 4-\frac{1}{x^2}=\frac{18}{x^4}$ $\qquad\qquad \mathbf{b}.\,(\mathbf{2p})\qquad \sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$

$\mathbf{c}.\,(\mathbf{1.5p})\qquad 9^{2x-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ $\qquad\qquad \mathbf{d}.\,(\mathbf{2p})\qquad 1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1}$

2. (1.5p) Factoriza el polinomio $P(x)=x^4+x^2+2x$

3. (1p) Un número es dos unidades mayor que otro y la diferencia de sus cuadrados vale 96, ¿de qué números se tratan?

SOLUCIÓN

1. Resuelve las ecuaciones:

a. $4-\frac{1}{x^2}=\frac{18}{x^4}$ **b.** $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$ **c.** $9^{2x-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **d.** $1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1}$

a. $4-\frac{1}{x^2}=\frac{18}{x^4} \rightarrow \frac{4x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}=\frac{18}{x^4} \rightarrow 4x^4-x^2-18=0$

Ecuación bicuadrada, realizando el cambio de variable $x^2=t \rightarrow 4t^2-t-18=0$

$$t=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 4\cdot(-18)}}{2\cdot 4}=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{8}=\frac{1\pm 17}{8}$$

$$t_1=\frac{1+17}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \rightarrow x^2=\frac{9}{4} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$t_2=\frac{1-17}{8}=-2 \rightarrow x^2=-2 \rightarrow x=\pm\sqrt{-2}=\nexists$$

b. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5 \rightarrow \sqrt{2x+1}=5-\sqrt{x} \rightarrow \left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(5-\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow$

$2x+1=25+\left(\sqrt{x}\right)^2-10\sqrt{x} \rightarrow 2x+1=25+x-10\sqrt{x} \rightarrow$

$10\sqrt{x}=25+x-2x-1 \rightarrow 10\sqrt{x}=24-x \rightarrow \left(10\sqrt{x}\right)^2=(24-x)^2 \rightarrow$

$10^2\left(\sqrt{x}\right)^2=576-48x+x^2 \rightarrow 100x=576-48x+x^2 \rightarrow x^2-148x+576=0$

$$x=\frac{148\pm\sqrt{(-148)^2-4\cdot 576}}{2}=\frac{148\pm\sqrt{19600}}{2}=\frac{148\pm 140}{2}$$

$$x_1=\frac{148+140}{2}=144 \rightarrow ¿\sqrt{2\cdot 144+1}+\sqrt{144}=5\,? \rightarrow 29\neq 5 \rightarrow \text{No válida}$$

$$x_2=\frac{148-140}{2}=4 \rightarrow ¿\sqrt{2\cdot 4+1}+\sqrt{4}=5\,? \rightarrow 5=5 \rightarrow \text{Válida}$$

c. $9^{2x-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \rightarrow (3^2)^{2x-1}=\frac{1}{3^{1/3}} \rightarrow 3^{4x-2}=3^{-1/3} \rightarrow 4x-2=-\frac{1}{3} \rightarrow 12x-6=-1 \rightarrow$

$12x=5 \rightarrow x=\frac{5}{12}$

d. $1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1} \rightarrow 1+(3^2)^x=3^x\cdot 3+\frac{3^x}{3} \rightarrow 1+(3^x)^2=3^x\cdot 3+\frac{3^x}{3}$

Realizando el cambio de variable $3^x=t$,

$1+t^2=3t+\frac{t}{3} \rightarrow \frac{3+3t^2}{3}=\frac{9t+t}{3} \rightarrow 3t^2-10t+3=0$

$$t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 3\cdot(3)}}{2\cdot 3}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}$$

$$t_1=\frac{10+8}{6}=3 \rightarrow 3^x=3 \rightarrow x=1$$

$$t_2=\frac{10-8}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \rightarrow 3^x=3^{-1} \rightarrow x=-1$$

2. Factoriza el polinomio $P(x) = x^4 + x^2 + 2x$

Buscamos las raíces resolviendo la ecuación de cuarto grado $x^4 + x^2 + 2x = 0$.

Extraemos factor común $x(x^3 + x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^3 + x + 2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

Luego $x_2 = -1$. Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 - x + 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \nexists$$

Considerando las dos raíces obtenidas, la expresión factorizada es $P(x) = x(x+1)(x^2 - x + 2)$

3. Un número es dos unidades mayor que otro y la diferencia de sus cuadrados es 96, ¿de qué números se tratan?

Si un número es x, el otro será $x + 2$. Como la diferencia de sus cuadrados es positiva:

$$(x+2)^2 - x^2 = 96 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 - x^2 = 96 \quad \rightarrow \quad 4x = 92 \quad \rightarrow \quad x = 23$$

Los números son 23 y 25.