UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-22**

MATERIA: FÍSICA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos (1 punto cada apartado).
TIEMPO: 90 minutos.

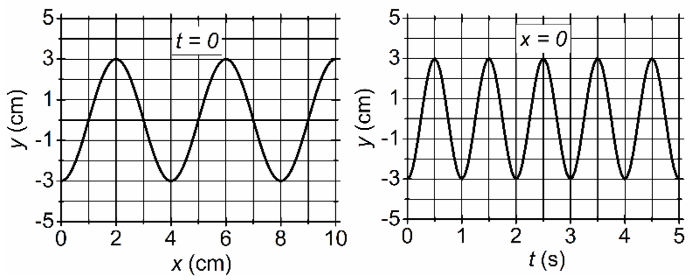
Pregunta A.1.- El satélite *Sentinel-1*, que forma parte del programa Copernicus, ha suministrado imágenes muy útiles para el estudio de la erupción del volcán de La Palma en 2021. *Sentinel-1* tiene una masa de 2300 kg y se encuentra en una órbita circular a 700 km sobre la superficie terrestre.

a) Deduzca la expresión que relaciona el periodo del satélite, T, con el radio de su órbita, r, la constante de Gravitación Universal, G, y la masa de la Tierra, M_T. Calcule el tiempo que tarda *Sentinel-1* en dar una vuelta completa en su órbita.
b) Deduzca la expresión de la energía mecánica total de un satélite de masa m en una órbita circular de radio r, expresándola en función de G, M_T, m y r. Obtenga la energía mecánica total del satélite *Sentinel-1*.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; *Masa de la Tierra,* $M_T = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg; *Radio de la Tierra,* $R_T = 6{,}37\cdot10^{6}$ m.

Pregunta A.2.- Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x. En la figura se tiene una gráfica de la elongación de la onda para $t = 0$ y para $x = 0$. A partir de dicha información determine:

a) La expresión matemática de la onda.
b) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto $x = 3$ cm en $t = 1$ s.



Pregunta A.3.- Dos cargas puntuales $Q_1 = 2$ nC y $Q_2 = -4$ nC se encuentran en el plano (x, y) en los puntos P_1 (1, 0) m y P_2 (3, 0) m, respectivamente. Calcule:

a) El campo eléctrico creado por ambas cargas en el punto (2, 1) m.
b) Las coordenadas del punto del eje x situado a la izquierda de la carga Q_1 ($x < 1$ m) en el que el potencial electrostático creado por ambas cargas es cero.

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9{,}0\cdot10^{9}$ N m^2 C^{-2}.

Pregunta A.4.- Se sitúa un objeto de altura h a la izquierda de una lente convergente de distancia focal f'. La imagen del objeto que se forma es real, invertida y de igual tamaño.

a) Determine, en función de f', las posiciones del objeto y de la imagen con respecto a la lente.
b) Realice el correspondiente trazado de rayos para la formación de la imagen.

Pregunta A.5.- En el acelerador de partículas del CERN se tiene un protón moviéndose con una velocidad un 90 % de la velocidad de la luz, siendo su masa relativista de $3{,}83\cdot10^{-27}$ kg. Determine:

a) La masa en reposo del protón.
b) La energía cinética que posee el protón, expresada en eV.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1}; *Valor absoluto de la carga del electrón,* $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C.

Pregunta B.1.- En el punto (1, 0) m del plano (x, y) se encuentra una partícula A de masa m_A = 2 kg. Se sabe que para llevar una partícula B de masa m_B desde el origen de coordenadas al punto (0, 2) m el trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio creado por la masa m_A es $-2{,}95\cdot10^{-10}$ J.

a) ¿Cuál es el valor de la masa m_B?
b) Calcule el valor del campo gravitatorio que crea la masa m_A en el punto (0, 2) m.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Pregunta B.2.- En el centro de una pista de baile circular de una discoteca el nivel de intensidad sonora es de 100 dB. La discoteca dispone de cuatro altavoces idénticos dispuestos alrededor de la pista de baile, todos ellos a la misma distancia del centro de la pista, d = 10 m.

a) Determine la potencia de cada uno de los altavoces de la discoteca.
b) Si el oído humano tiene una superficie de $2\cdot10^{-4}$ m^2, y una persona permanece 5 horas bailando en el centro de la pista, ¿cuál es la energía sonora total que le llega al oído?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Pregunta B.3.- Una espira cuadrada de 20 cm de lado se somete a la acción de un campo magnético variable con el tiempo $B(t)$ perpendicular al plano de la espira. Halle el flujo magnético y la fem inducida en la espira en el tiempo t = 2 s en los siguientes casos:

a) Cuando el campo magnético es $B(t) = K\,t$, con K igual a $2\cdot10^{-3}$ T s^{-1}.
b) Cuando el campo magnético es $B(t) = 3\cdot10^{-3}\cos(3\pi t)$, donde B está en T y t está en s.

Pregunta B.4.- Un estanque con agua está cubierto con una capa de aceite. Los índices de refracción del agua y del aceite son n_{agua} = 1,33 y n_{aceite} = 1,44, respectivamente.

a) Si un rayo de luz monocromático incide desde el aire hacia el estanque con un ángulo de 40º con respecto a la normal, ¿cuál es el ángulo de refracción del haz en el agua del estanque?
b) Si en el fondo del estanque hay un foco de luz, ¿por debajo de qué ángulo debe incidir el haz de luz del foco con respecto a la normal de la superficie del agua para que la luz salga fuera del estanque hacia el aire?

Dato: Índice de refracción del aire, n_{aire} = 1.

Pregunta B.5.- El isótopo de americio, ^{241}Am, se ha utilizado para la fabricación de detectores de humo. Si la cantidad de americio ^{241}Am en un detector de humo en el momento de su fabricación es de 0,2 miligramos y su tiempo de vida media, τ, es de 432 años, determine:

a) El tiempo de semidesintegración del ^{241}Am y la actividad inicial del detector de humo.
b) La cantidad de ^{241}Am en el detector de humo cuando su actividad haya disminuido un 80 % respecto de su valor inicial y el tiempo transcurrido.

Datos: Masa atómica del Am, M_{Am} = 241 u; Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ mol^{-1}.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

FÍSICA

* Las preguntas deben contestarse razonadamente, valorando en su resolución una adecuada estructuración y el rigor en su desarrollo.
* Se valorará positivamente la inclusión de pasos detallados, así como la realización de diagramas, dibujos y esquemas.
* En la corrección de las preguntas se tendrá en cuenta el proceso seguido en la resolución de las mismas, valorándose positivamente la identificación de los principios y leyes físicas involucradas.
* Se valorará la destreza en la obtención de resultados numéricos y el uso correcto de las unidades en el Sistema Internacional.
* Cada pregunta, debidamente justificada y razonada con la solución correcta, se calificará con un máximo de 2 puntos.
* En las preguntas que consten de varios apartados, la calificación máxima será la misma para cada uno de ellos (desglosada en múltiplos de 0,25 puntos).

SOLUCIONES

(Documento de Trabajo orientativo)

Pregunta A.1.- El satélite *Sentinel-1*, que forma parte del programa Copernicus, ha suministrado imágenes muy útiles para el estudio de la erupción del volcán de La Palma en 2021. *Sentinel-1* tiene una masa de 2300 kg y se encuentra en una órbita circular a 700 km sobre la superficie terrestre.

a) Deduzca la expresión que relaciona el periodo del satélite, *T*, con el radio de su órbita, *r*, la constante de Gravitación Universal, *G*, y la masa de la Tierra, M_T. Calcule el tiempo que tarda *Sentinel-1* en dar una vuelta completa en su órbita.

b) Deduzca la expresión de la energía mecánica total de un satélite de masa *m* en una órbita circular de radio *r*, expresándola en función de *G*, M_T, *m* y *r*. Obtenga la energía mecánica total del satélite *Sentinel-1*.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; *Masa de la Tierra,* $M_T = 5,97\cdot10^{24}$ kg; *Radio de la Tierra,* $R_T = 6,37\cdot10^6$ m.

Solución:

a) El satélite describe una órbita circular, por lo que se verifica:

$$F = \frac{GM_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{r}$$

Por otro lado, la velocidad del satélite, al ser constante puede expresarse como:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{GM_T}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T} \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}}}$$

Aplicamos la ecuación anterior para obtener el periodo del satélite Sentinel-1

El radio de la órbita es: $r = R_T + h = 6370 + 700 = 7070\ \text{km}$

Por tanto:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (7070\cdot10^3)^3}{6,67\cdot10^{-11} \cdot 5,97\cdot10^{24}}} = 5919,14\ \text{s} = 1,64\ \text{horas}$$

Luego Sentinel-1 tarda en dar una vuelta: $\boxed{T = 5919,14\ \text{s}\ =\ 1,64\ \text{horas}}$

b) Deducimos la expresión de la energía mecánica total del satélite:

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_T}{r}\right) - \frac{GM_T m}{r} = -\frac{GM_T m}{2r}$$

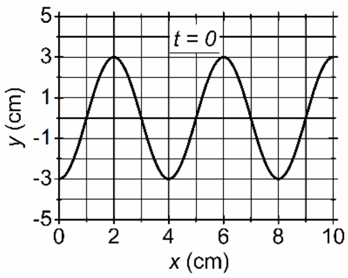
Donde hemos usado la expresión de la velocidad obtenida en el apartado anterior para el caso de que la trayectoria sea circular. Por tanto, la expresión de la energía mecánica total es:

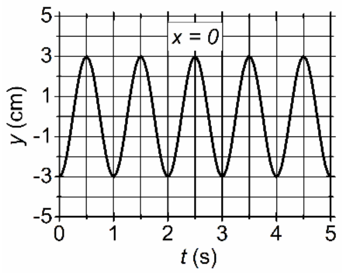
$$\boxed{E_{mec} = -\frac{GM_T m}{2r}}$$

Aplicamos esta expresión para determinar la energía mecánica de Sentinel-1:

$$\boxed{E_{mec} = -\frac{GM_T m}{2r} = -\frac{6,67\cdot10^{-11} \cdot 5,97\cdot10^{24} \cdot 2300}{2 \cdot 7070\cdot10^3} = -6,48\cdot10^{10}\ \text{J}}$$

Pregunta A.2.- Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje *x*. En la figura se tiene una gráfica de la elongación de la onda para *t* = 0 y para *x* = 0. A partir de dicha información determine:





a) La expresión matemática de la onda.
b) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto *x* = 3 cm en *t* = 1 s.

Solución:

a) La expresión matemática de la onda es:
$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi)$
De la figura correspondiente a *x* = 0, se obtiene que:
La amplitud es *A* = 3 cm y el periodo es *T* = 1 s (tiempo entre dos máximos). Luego:
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$$
De la figura correspondiente a *t* = 0, se obtiene que:
La longitud de onda: λ = 4 cm (separación entre dos máximos). Por tanto:
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad cm}^{-1}$$
La ecuación de la onda sería:
$y(x,t) = 3\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}x + \phi\right)$, donde las magnitudes de longitud deben expresarse en cm y el tiempo en s.
Determinamos la fase, para lo cual tenemos en cuenta, por ejemplo, que $y(0,0) = -3 \text{ cm} \Rightarrow$
$$y(0,0) = -3 = 3\cos\left(2\pi \cdot 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 + \phi\right) = 3\cos(\phi) \Rightarrow \phi = \pi$$
Luego la expresión matemática de la onda, con *x* expresado en cm y *t* en s es:
$$\boxed{y(x,t) = 3\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}x + \pi\right) \text{ cm}}$$
En el caso de que se haya partido de $y(x,t) = A\text{sen}(\omega t - kx + \phi)$, la expresión sería:
$$\boxed{y(x,t) = 3\text{sen}\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ cm}}$$

b) La velocidad de propagación se obtiene mediante la expresión:
$$v = \frac{\lambda}{T} = 4 \text{ cm s}^{-1} = 0{,}04 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow \boxed{v = 4 \text{ cm s}^{-1} = 0{,}04 \text{ m s}^{-1}}$$
A continuación, calculamos la velocidad de vibración del punto *x* = 3 cm para *t* = 1 s.
$$\frac{dy(x,t)}{dt} = -3(2\pi)\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}x - \pi\right) \Rightarrow$$
$$\frac{dy(3,1)}{dt} = -3(2\pi)\sin\left(2\pi \cdot 1 - \frac{\pi}{2} \cdot 3 - \pi\right) = -6\pi\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6\pi \text{ cm s}^{-1}$$
Luego la velocidad de oscilación del punto *x* = 3 cm para *t* = 1 s es
$$\boxed{\frac{dy(3,1)}{dt} = 6\pi \text{ cm s}^{-1} = 18{,}85 \text{ cm s}^{-1} = 0{,}19 \text{ m s}^{-1}}$$

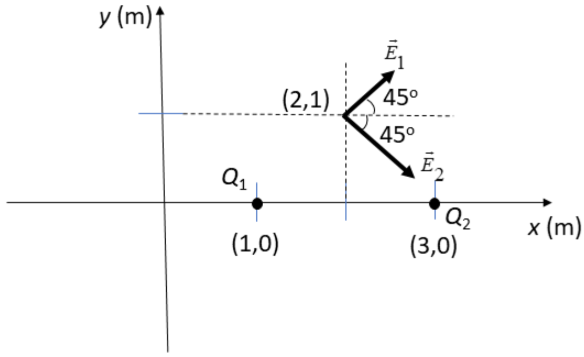
Pregunta A.3.- Dos cargas puntuales Q_1 = 2 nC y Q_2 = -4 nC se encuentran en el plano (x, y) en los puntos P_1 (1, 0) m y P_2 (3, 0) m, respectivamente. Calcule:

a) El campo eléctrico creado por ambas cargas en el punto (2, 1) m.
b) Las coordenadas del punto del eje x situado a la izquierda de la carga Q_1 (x < 1 m) en el que el potencial electrostático creado por ambas cargas es cero.

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9{,}0\cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución:

a) El campo eléctrico creado por ambas cargas en el punto (2, 1) se representa en la figura, donde hemos tenido en cuenta el signo de las cargas. Por el principio de superposición:
$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$
El campo creado por la carga Q_1 es:



$$\left|\vec{E}_1\right| = k\frac{Q_1}{r_1^2};\ \vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \left|\vec{r}_1\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

$$\vec{E}_1 = \left|\vec{E}_1\right|\left(\cos(45)\vec{i} + \text{sen}(45)\vec{j}\right) = \frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-9}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})\ \text{N C}^{-1}$$

El campo eléctrico creado por la carga Q_2 es:

$$\left|\vec{E}_2\right| = k\frac{|Q_2|}{r_2^2};\ \vec{r}_2 = -\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \left|\vec{r}_2\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

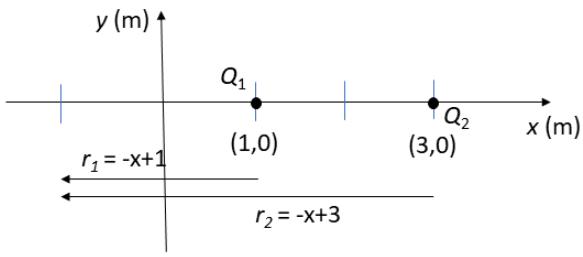
$$\vec{E}_2 = \left|\vec{E}_2\right|\left(\cos(45)\vec{i} - \text{sen}(45)\vec{j}\right) = \frac{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^{-9}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = 9\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j})\ \text{N C}^{-1}$$

Por tanto, el campo total en el punto (2, 1) m es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{9\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + 9\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j}) = 9\sqrt{2}(\frac{1}{2}+1)\vec{i} + 9\sqrt{2}(\frac{1}{2}-1)\vec{j} = \left(\frac{27\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{9\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\text{N C}^{-1}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \left(19{,}09\vec{i} - 6{,}36\vec{j}\right)\ \text{N C}^{-1}}$$

b) Determinamos el punto del eje x, en la región x < 1 m en el que el potencial electrostático es cero. Si tenemos en cuenta la figura:
$V(x) = k\frac{Q_1}{r_1} - k\frac{|Q_2|}{r_2}$; donde: $r_1 = -x+1;\ r_2 = -x+3$
Como V(x) = 0, se cumplirá:



$$V(x) = k\frac{Q_1}{(-x+1)} - k\frac{|Q_2|}{(-x+3)} = 0 \Rightarrow Q_1(-x+3) = |Q_2|(-x+1) \Rightarrow x\left(|Q_2| - Q_1\right) = -3Q_1 + |Q_2|$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3Q_1 + |Q_2|}{\left(|Q_2| - Q_1\right)} = \frac{-3\cdot 2 + 4}{4-2} = -1\ \text{m}$$

Luego el punto del eje x, para x < 1 donde el potencial electrostático es cero es $\boxed{(-1,\ 0)\ \text{m}}$ o a 2 m a la izquierda de la carga Q_1.

Pregunta A.4.- Se sitúa un objeto de altura *h* a la izquierda de una lente convergente de distancia focal *f'*. La imagen del objeto que se forma es real, invertida y de igual tamaño.

a) Determine, en función de *f'*, las posiciones del objeto y de la imagen con respecto a la lente.
b) Realice el correspondiente trazado de rayos para la formación de la imagen.

Solución:

a) Las ecuaciones para las lentes son:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \text{ y } A=\frac{s'}{s}=\frac{y'}{y}$$

Según el enunciado del problema la lente es convergente, luego $f'=f'$; por otro lado:

$$y'=-y \Rightarrow y'=-h$$

Pues la imagen es real, invertida y de igual tamaño. Por consiguiente:

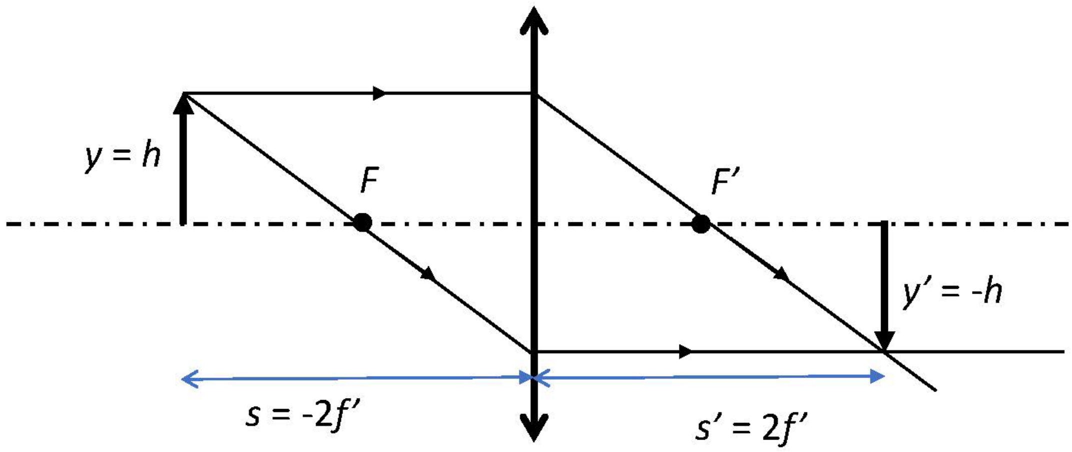
$$A=\frac{s'}{s}=\frac{y'}{y}=\frac{-h}{h}=-1 \Rightarrow s'=-s$$

Si aplicamos la ecuación de las lentes se obtiene:

$$\frac{1}{-s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{2}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow s=-2f' \text{ y } s'=2f'$$

Luego las posiciones del objeto y de la imagen son: $\boxed{s=-2f' \;;\; s'=2f'}$

b) Hacemos el trazado de rayos:



Pregunta A.5.- En el acelerador de partículas del CERN se tiene un protón moviéndose con una velocidad un 90 % de la velocidad de la luz, siendo su masa relativista de $3{,}83\cdot 10^{-27}$ kg. Determine:

a) La masa en reposo del protón.
b) La energía cinética que posee el protón, expresada en eV.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot 10^{8}$ m s^{-1}; *Valor absoluto de la carga del electrón,* $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

a) La masa relativista y la masa en reposo de una partícula están relacionadas mediante la ecuación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow m_0 = m\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Si lo aplicamos al protón del acelerador CERN:

$$m_0 = 3{,}83\cdot 10^{-27}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}9c}{c}\right)^2} = 3{,}83\cdot 10^{-27}\sqrt{1-0{,}9^2} = 1{,}669\cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Por tanto, la masa en reposo del protón es $\boxed{m_0 = 1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}$

b) La energía total de una partícula relativista viene dada por la ecuación:
$$E = mc^2 = m_o c^2 + E_c \Rightarrow E_c = mc^2 - m_o c^2 = (m - m_0)c^2$$

Por consiguiente:

$$E_c = (m - m_0)c^2 = (3{,}83\cdot 10^{-17} - 1{,}67\cdot 10^{-27})\cdot(3\cdot 10^{8})^2 = 19{,}44\cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

Determinamos el valor de la energía en eV:

$$E_c = 19{,}44\cdot 10^{-11}\ \text{J}\cdot\frac{1\ \text{eV}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 12{,}15\cdot 10^{8}\ \text{eV} = 1215\ \text{MeV}$$

Luego la energía cinética del protón es de $\boxed{E_c = 1215\ \text{MeV}}$

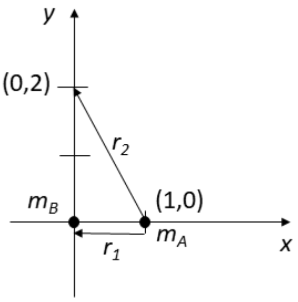
Pregunta B.1.- En el punto (1, 0) m del plano (*x*, *y*) se encuentra una partícula A de masa m_A = 2 kg. Se sabe que para llevar una partícula B de masa m_B desde el origen de coordenadas al punto (0, 2) m el trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio creado por la masa m_A es $-2{,}95\cdot10^{-10}$ J.

a) ¿Cuál es el valor de la masa m_B?
b) Calcule el valor del campo gravitatorio que crea la masa m_A en el punto (0, 2) m.

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m² kg⁻².

Solución:

a) El trabajo realizado por las fuerzas del campo gravitatorio cumple la expresión:



$$W_{1\to 2} = -E_P(2) + E_P(1)$$

Donde:

$$E_p(1) = -\frac{Gm_Am_B}{r_1};\ E_p(2) = -\frac{Gm_Am_B}{r_2}$$

Según la figura: $r_1 = 1 \text{ m}$; $r_2 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ m}$

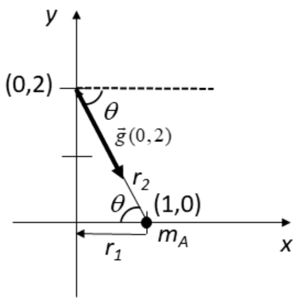
Luego:

$$W_{1\to 2} = -E_p(2) + E_p(1) = \frac{Gm_Am_B}{r_2} - \frac{Gm_Am_B}{r_1} = m_BGm_A\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \Rightarrow m_B = \frac{W_1^2}{Gm_A\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

$$\Rightarrow m_B = \frac{-2{,}95\cdot10^{-10}}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{1}\right)} = 4{,}000 \text{ kg}$$

Por tanto: $\boxed{m_B = 4 \text{ kg}}$

b) El campo gravitatorio creado por la masa m_A en el punto (0, 2) m es:



$$\vec{g}(0,2) = \frac{Gm_A}{r_2^2}\left(\cos\theta\vec{i} - \text{sen}\theta\vec{j}\right)$$

Según la figura:

$$r_2^2 = 1+4 = 5 \text{ m} \text{ ; } \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \text{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Por tanto:

$$\vec{g}(0,2) = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 2}{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) = \left(1{,}19\cdot10^{-11}\vec{i} - 2{,}39\cdot10^{-11}\vec{j}\right) \text{ N kg}^{-1}$$

Luego el campo gravitatorio creado por m_A en el punto (0, 2) m es:

$$\boxed{\vec{g}(0,2) = \left(1{,}19\cdot10^{-11}\vec{i} - 2{,}39\cdot10^{-11}\vec{j}\right) \text{ N kg}^{-1}}$$

Pregunta B.2.- En el centro de una pista de baile circular de una discoteca el nivel de intensidad sonora es de 100 dB. La discoteca dispone de cuatro altavoces idénticos dispuestos alrededor de la pista de baile, todos ellos a la misma distancia del centro de la pista, *d* = 10 m.

a) Determine la potencia de cada uno de los altavoces de la discoteca.
b) Si el oído humano tiene una superficie de $2\cdot 10^{-4}$ m^2, y una persona permanece 5 horas bailando en el centro de la pista, ¿cuál es la energía sonora total que le llega al oído?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) Determinamos la potencia de cada uno de los altavoces.

La intensidad sonora que llega al centro de la pista es:

$$I_c = \frac{4P}{4\pi d^2} = \frac{P}{\pi d^2}$$

Donde *P* es la potencia de cada altavoz y *d* es la distancia de cada altavoz al centro de la pista. Por otro lado:

$$\beta = 10\log\frac{I_c}{I_0} \Rightarrow I_c = I_0 10^{\frac{\beta}{10}}$$

Donde β es el nivel de intensidad sonora en el centro de la pista. Por tanto, se obtiene:

$$I_c = 10^{-12}\cdot 10^{\frac{100}{10}} = 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$$

La potencia de cada altavoz es:

$$P = \pi d^2 I_c = \pi\cdot 10^2\cdot 10^{-2} = \pi \text{ W} = 3{,}14 \text{ W}$$

Luego la potencia de cada altavoz es $\boxed{P = 3{,}14 \text{ W}}$

b) La definición de intensidad es:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{\left(\frac{E}{t}\right)}{S} = \frac{E}{t\cdot S} \Rightarrow E = I\cdot t\cdot S$$

Donde t es tiempo y *S* es superficie (la potencia es energía por unidad de tiempo). Si lo aplicamos a nuestro caso, la energía sería:

$$E = I_c\cdot t\cdot S$$

donde I_C es la intensidad sonora total que llega al centro de la pista debido a los 4 altavoces.

Por tanto, la energía que llega al oído a una persona bailando en el centro de la pista tras cinco horas es:

$$E = I_c\cdot t\cdot S = 10^{-2}(5\cdot 3600)2\cdot 10^{-4} = 36\cdot 10^{-3} \text{ J} = 36 \text{ mJ}$$

La energía que llega al oído es $\boxed{E = 36 \text{ mJ}}$

Pregunta B.3.- Una espira cuadrada de 20 cm de lado se somete a la acción de un campo magnético variable con el tiempo $B(t)$ perpendicular al plano de la espira. Halle el flujo magnético y la fem inducida en la espira en el tiempo t = 2 s en los siguientes casos:

a) Cuando el campo magnético es $B(t) = K\,t$, con K igual a $2\cdot10^{-3}$ T s^{-1}.
b) Cuando el campo magnético es $B(t) = 3\cdot10^{-3} \cos(3\pi t)$, donde B está en T si t está en s.

Solución:

a) Cuando el campo magnético es $B(t) = K\,t$, con K igual a $2\cdot10^{-3}$ T s^{-1}.

Para hallar la fem inducida, primero hallaremos el flujo recogido por la espira en función del tiempo:

$$\Phi(t) = K\ a^2\ t$$

Para t = 2 s, tenemos:

$$\Phi(t=2\text{ s}) = K\ a^2\ t = 2\cdot10^{-3}\ 0,2^2\ 2 = 1,6\cdot10^{-4}\ \text{Wb}$$

Derivando respecto al tiempo, hallamos la fem inducida:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -K\ a^2$$

donde el signo negativo únicamente indica que la fem se opone a la variación del flujo.

De manera que la fem inducida en t = 2 s será:

$$\mathcal{E}(t=2\text{s}) = -2\cdot10^{-3}\ 0,2^2 = -8,0\cdot10^{-5}\ \text{V}$$

b) Cuando el campo magnético es $B(t) = 3\cdot10^{-3} \cos(3\pi t)$, donde B está en T si t está en s.

Para hallar la fem inducida, primero hallaremos el flujo recogido por la espira en función del tiempo:

$$\Phi(t) = 3\cdot10^{-3}\ a^2 \cos(3\pi t)$$

Para t = 2 s, obtenemos:

$$\Phi(t) = 3\cdot10^{-3}\ a^2 \cos(6\pi) = 3\cdot10^{-3}\ 0,2^2 = 1,2\cdot10^{-4}\ \text{Wb}$$

Derivando respecto al tiempo, hallamos la fem inducida:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = 3\cdot10^{-3}\ a^2\ 3\pi\ \text{sen}(3\pi t)$$

donde el signo negativo únicamente indica que la fem se opone a la variación del flujo.

De manera que la fem inducida en t = 2 s será:

$$\mathcal{E}(t=2\text{s}) = 0$$

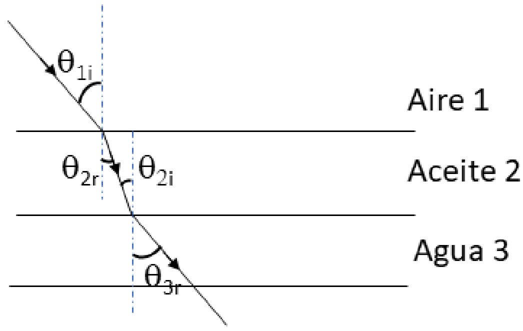
Pregunta B.4.- Un estanque con agua está cubierto con una capa de aceite. Los índices de refracción del agua y del aceite son n_{agua} = 1,33 y n_{aceite} = 1,44, respectivamente.

a) Si un rayo de luz monocromático incide desde el aire hacia el estanque con un ángulo de 40º con respecto a la normal, ¿cuál es el ángulo de refracción del haz en el agua del estanque?
b) Si en el fondo del estanque hay un foco de luz, ¿por debajo de qué ángulo debe incidir el haz de luz del foco con respecto a la normal de la superficie del agua para que la luz salga fuera del estanque hacia el aire?

Dato: Índice de refracción del aire, n_{aire} = 1.

Solución:

a) Para el haz que va del aire al aceite (de 1 a 2) si aplicamos la ley de Snell:



$$n_1 \text{sen}\theta_{1i} = n_2 \text{sen}\theta_{2r}$$

Por otro lado, para el que va del aceite al agua (de 2 a 3), se cumple:

$$n_2 \text{sen}\theta_{2i} = n_3 \text{sen}\theta_{3r}$$

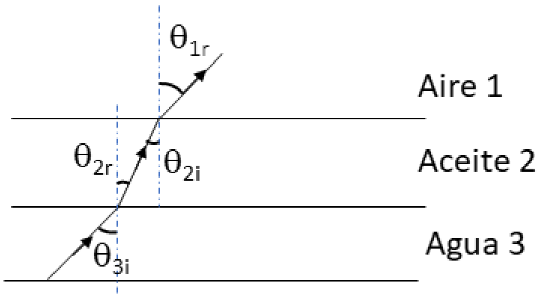
Ahora bien, según la figura: $\theta_{2r} = \theta_{2i}$

$$\Rightarrow n_1 \text{sen}\theta_{1i} = n_2 \text{sen}\theta_{2r} = n_2 \text{sen}\theta_{2i} = n_3 \text{sen}\theta_{3r} \Rightarrow \text{sen}\theta_{3r} = \frac{n_1 \text{sen}\theta_{1i}}{n_3} = \frac{1 \cdot \text{sen}(40)}{1,33} = 0,483299$$

$$\Rightarrow \theta_{3r} = \text{arcs}(0,483299) = 28,90^\circ$$

Luego el ángulo de refracción en el agua es: $\boxed{\theta_{3r} = 28,90^\circ}$

b) Aplicamos la ley de Snell para el rayo que va del fondo del estanque hacia la capa de aceite:



$$n_3 \text{sen}\theta_{3i} = n_2 \text{sen}\theta_{2r}$$

Si el haz pasa del aceite al aire, fuera del estanque, entonces:

$$n_2 \text{sen}\theta_{2i} = n_1 \text{sen}\theta_{1r}$$

Según la figura, se cumple que: $\theta_{2i} = \theta_{2r}$, luego:

$$n_3 \text{sen}\theta_{3i} = n_1 \text{sen}\theta_{1r} \Rightarrow \text{sen}\theta_{1r} = \frac{n_3 \text{sen}\theta_{3i}}{n_1}$$

Para que salga del estanque, debe cumplirse que:

$$\text{sen}\theta_{1r} = \frac{n_3 \text{sen}\theta_{3i}}{n_1} < 1 \Rightarrow \text{sen}\theta_{3i} < \frac{n_1}{n_3} = \frac{1}{1,33} = 0,7519 \Rightarrow \theta_{3i} < \text{arcsen}(0,7519) = 48,75^\circ .$$

Por consiguiente, el rayo sale del estanque si: $\boxed{\theta_{3i} < 48,75^\circ}$

Pregunta B.5.- El isótopo de americio, ^{241}Am, se ha utilizado para la fabricación de detectores de humo. Si la cantidad de americio ^{241}Am en un detector de humo en el momento de su fabricación es de 0,2 miligramos y su tiempo de vida media, τ, es de 432 años, determine:

a) El tiempo de semidesintegración del ^{241}Am y la actividad inicial del detector de humo.
b) La cantidad de ^{241}Am en el detector de humo cuando su actividad haya disminuido un 80 % respecto de su valor inicial y el tiempo transcurrido.

Datos: Masa atómica del Am, $M_{Am} = 241$ u; *Número de Avogadro,* $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ mol^{-1}.

Solución:

a) La constante de desintegración y la vida media están relacionadas mediante la expresión:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Por otro lado:

$$m = m_0 e^{-\lambda t} = m_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

El tiempo de semidesintegración se calcula sabiendo que la masa debe reducirse a la mitad, luego:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}} \Rightarrow -\text{Ln}2 = -\left(\frac{T_{1/2}}{\tau}\right) \Rightarrow T_{1/2} = \tau\text{Ln}2 = 432\cdot\text{Ln}2 = 299{,}44 \text{ años}$$

Luego el tiempo de semidesintegración es $\boxed{T_{1/2} = 299{,}44 \text{ años}}$

Calculamos la actividad inicial. La actividad se expresa como:

$$A_0 = N_0\cdot\lambda = N_0\cdot\frac{1}{\tau} = \left(\frac{m_0}{M_{Am}}\right)\cdot N_A\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{0{,}2\cdot10^{-3}}{241}\cdot 6{,}02\cdot10^{23}\cdot\frac{1}{432\cdot365\cdot24\cdot3600} = 3{,}66\cdot10^{7} \text{ Bq}$$

Luego la actividad inicial es $\boxed{A_0 = 3{,}66\cdot10^{7} \text{ Bq}}$

b) Si la actividad disminuye un 80 % respecto de la inicial, eso significa que $A = 0{,}2A_0$. Por tanto:

$$\left(\frac{m}{M_{Am}}\right)\cdot N_A\cdot\frac{1}{\tau} = 0{,}2\left(\frac{m_0}{M_{Am}}\right)\cdot N_A\cdot\frac{1}{\tau} \Rightarrow m = 0{,}2m_0 = 0{,}2\cdot0{,}2 = 0{,}04 \text{ mg}$$

La cantidad de ^{241}Am que quedará en el detector es $\boxed{m = 0{,}04 \text{ mg}}$

El tiempo transcurrido puede determinarse si tenemos en cuenta que:

$$A = A_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow 0{,}2A_0 = A_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \text{Ln}(0{,}2) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow t = -\tau\text{Ln}(0{,}2) = -432\cdot\text{Ln}(0{,}2) = 695{,}28 \text{ años}$$

Luego el tiempo transcurrido es $t = 695{,}28$ años