Universidad Carlos III de Madrid

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2020-21**

MATERIA: FÍSICA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos (1 punto cada apartado).

TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta A.1.- Una nave espacial ha quedado atrapada en una órbita circular en torno a un planeta esférico desconocido. Los sistemas de navegación de la nave indican que su velocidad orbital es de 25000 km h^{-1} y que tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

a) Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.

b) Si la densidad del planeta es de 16150 kg m^{-3}, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

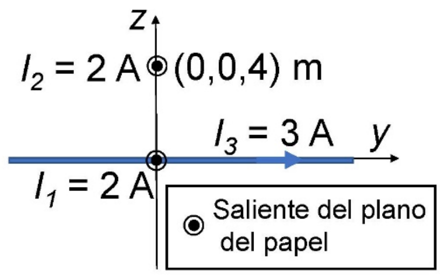
Pregunta A.2.- Anacleto, el agente secreto, está grabando con un teléfono inteligente, a través de una pared, una conversación muy delicada del malvado Vázquez. La distancia entre ambos es de 5 m y, por efecto de la pared, al teléfono solo llega un 2 % de la intensidad que llegaría si no hubiese pared. Se sabe que el nivel de intensidad sonora de una conversación a 1 metro es de 50 dB.

a) Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.

b) Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Pregunta A.3.- Se tienen tres hilos indefinidos de corriente (ver figura). Los hilos de intensidades I_1 = 2 A e I_2 = 2 A son paralelos al eje *x* y pasan por los puntos (0, 0, 0) y (0, 0, 4) m, respectivamente. El tercer hilo, con una intensidad I_3 = 3 A pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al eje *y*. En todos los casos la corriente va en el sentido positivo de los ejes. Calcule:



a) El campo magnético total creado por los tres hilos en el punto (0, 0, 2) m.

b) La fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo de intensidad I_1 sobre el hilo de intensidad I_2. ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?

Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ N A^{-2}.

Pregunta A.4.-. Sea un sistema óptico formado por dos lentes convergentes, una lente A de distancia focal f_A' y otra B, situada 80 cm a la derecha de A, de distancia focal f_B' = 30 cm. Un objeto de 5 cm de altura está situado 15 cm a la izquierda de la lente A.

a) Si la imagen del objeto formada por el sistema de lentes aparece 75 cm a la derecha de la lente B, ¿cuánto vale la distancia focal de la lente A y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes?

b) ¿Dónde hay que situar el objeto a la izquierda de la lente A, para que el sistema de lentes forme la imagen en el infinito?

Pregunta A.5.- En un experimento realizado en un acelerador de partículas se han originado un electrón relativista de velocidad 0,75*c*, siendo *c* la velocidad de la luz, y un fotón de 15 MeV de energía.

a) Calcule la masa relativista y la energía cinética del electrón.

b) Determine la longitud de onda del fotón y la longitud de de Broglie del electrón.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C; *Masa del electrón en reposo,* $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg; *Constante de Planck,* $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ J s; *Velocidad de la luz en el vacío,* $c = 3\cdot 10^8$ m s^{-1}.

Pregunta B.1.- Una partícula de masa *m* se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema de referencia (x, y). La componente x del campo gravitatorio creado por la partícula en el punto (2, 2) m es $-1{,}18\cdot10^{-11}$ N kg^{-1}.

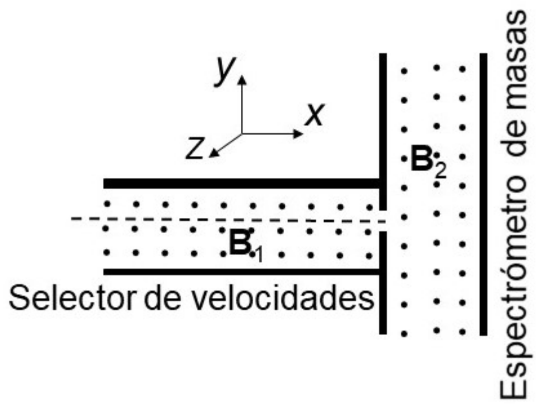
a) Calcule el valor de la masa *m*.
b) ¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa M = 5 kg desde el punto (4, 0) m al punto (2, 2) m?

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Pregunta B.2.- Una onda transversal se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje *x*. La propagación de la onda es en el sentido positivo del eje *x*. La expresión matemática de la onda en los instantes $t = 0$ s y $t = 2$ s es $y(x,0) = 0{,}1\cos(\pi - 4\pi x)$ m e $y(x,2) = 0{,}1\cos(11\pi - 4\pi x)$ m, respectivamente, donde todas las magnitudes están expresadas en el SI de unidades. Calcule:

a) La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.
b) La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.

Pregunta B.3.- Un espectrómetro de masas es un dispositivo que mide la masa de los iones y cuyo esquema se muestra en la figura. Consta de un selector de velocidades, en el que, mediante un campo eléctrico y un campo magnético mutuamente perpendiculares, se seleccionan únicamente los iones que viajan en línea recta paralela al eje *x* de la figura y con un valor determinado de la velocidad. A continuación, los iones pasan a una segunda región con un campo magnético perpendicular a la velocidad de los iones, de forma que éstos realizan una trayectoria circular. En el experimento se usan iones positivos de oxígeno $^{18}O^+$ cuya masa es $2{,}7\cdot10^{-26}$ kg y su carga es +*e*. En el selector de velocidades los campos eléctrico y magnético son $\vec{E} = 4{,}0\cdot10^5\,\vec{j}$ V m^{-1} y $\vec{B}_1 = 2\,\vec{k}$ T. El campo magnético en la segunda región del espectrómetro de masas es $\vec{B}_2 = 5\,\vec{k}$ T. Calcule:



a) La velocidad de los iones de oxígeno que viajan en línea recta a lo largo del eje *x* en el selector de velocidades.
b) El radio de la órbita circular descrita por los iones en la segunda región del espectrómetro de masas donde el campo magnético es B_2.

Dato: Valor absoluto de la carga de electrón, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C.

Pregunta B.4.- Sean dos medios A y B de índices de refracción n_A y n_B, respectivamente. Un rayo de luz de frecuencia $6{,}04\cdot10^{14}$ Hz incide desde el medio A hacia el medio B, verificándose que el ángulo límite para la reflexión total es 45,58º. Sabiendo que $n_A - n_B = 0{,}6$, determine:

a) Los índices de refracción n_A y n_B de ambos medios.
b) Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}.

Pregunta B.5.- El patrón del kilogramo es un cilindro hecho con una aleación de platino-iridio (90 % en masa de Pt) que se encuentra en un museo de París. El platino está formado por diversos isótopos, uno de ellos, el ^{190}Pt, es radiactivo siendo su tiempo de semidesintegración de $6{,}5\cdot10^{11}$ años. El porcentaje del isótopo ^{190}Pt en una muestra de platino es del 0,012 % en masa.

a) Calcule la actividad inicial del patrón del kilogramo.
b) ¿Cuál será la masa final del platino ^{190}Pt que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años?

Datos: Masa atómica del isótopo ^{190}Pt; $M = 189{,}96$ u; *Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$* mol^{-1}.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

FÍSICA

* Las preguntas deben contestarse razonadamente, valorando en su resolución una adecuada estructuración y el rigor en su desarrollo.

* Se valorará positivamente la inclusión de pasos detallados, así como la realización de diagramas, dibujos y esquemas.

* En la corrección de las preguntas se tendrá en cuenta el proceso seguido en la resolución de las mismas, valorándose positivamente la identificación de los principios y leyes físicas involucradas.

* Se valorará la destreza en la obtención de resultados numéricos y el uso correcto de las unidades en el Sistema Internacional.

* Cada pregunta, debidamente justificada y razonada con la solución correcta, se calificará con un máximo de 2 puntos.

* En las preguntas que consten de varios apartados, la calificación máxima será la misma para cada uno de ellos (desglosada en múltiplos de 0,25 puntos).

FÍSICA

SOLUCIONES

(**Documento de trabajo orientativo**)

Pregunta A.1.- Una nave espacial ha quedado atrapada en una órbita circular en torno a un planeta esférico desconocido. Los sistemas de navegación de la nave indican que su velocidad orbital es de 25000 km h^{-1} y que tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

a) Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.
b) Si la densidad del planeta es de 16150 kg m^{-3}, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Solución:

a) En primer lugar, determinamos el radio de la órbita. Dado que la velocidad orbital es constante y la órbita es circular, se cumple:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{Tv}{2\pi} = \frac{25000\cdot 10^3}{3600}\frac{5\cdot 3600}{2\pi} = 19894{,}37\cdot 10^3 \text{ m} \Rightarrow \boxed{r = 19894{,}37 \text{ km}}$$

Determinamos la masa del planeta. Para que la órbita sea circular debe verificarse:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow M = \frac{rv^2}{G}$$

Luego:

$$M = 19{,}89437\cdot 10^6\left(\frac{25000\cdot 10^3}{3600}\right)^2 \frac{1}{6{,}67\cdot 10^{-11}} = 1{,}44\cdot 10^{25} \text{ kg} \Rightarrow \boxed{M = 1{,}44\cdot 10^{25} \text{ kg}}$$

b) Calculamos el radio del planeta. Dado que el planeta es esférico, se cumple:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} = \left(\frac{3\cdot 1{,}44\cdot 10^{25}}{4\pi\cdot 16150}\right)^{1/3} = 5968{,}60\cdot 10^3 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 5968{,}60 \text{ km}}$$

Para determinar la constante gravitatoria en la superficie del planeta tenemos en cuenta que, la fuerza atractiva que aparece sobre un cuerpo de masa *m* en la superficie del planeta es:

$$F = mg = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

Luego el valor de g es:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow g = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}44\cdot 10^{25}}{\left(5968{,}60\cdot 10^3\right)^2} = 26{,}931 \text{ m s}^{-2} \Rightarrow \boxed{g = 26{,}93 \text{ m s}^{-2}}$$

Pregunta A.2.- Anacleto, el agente secreto, está grabando con un teléfono inteligente, a través de una pared, una conversación muy delicada del malvado Vázquez. La distancia entre ambos es de 5 m y, por efecto de la pared, al teléfono solo llega un 2 % de la intensidad que llegaría si no hubiese pared. Se sabe que el nivel de intensidad sonora de una conversación a 1 metro es de 50 dB.

a) Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.
b) Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) En primer lugar, calculamos la potencia del sonido para una conversación normal:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{-12}\cdot 10^{\frac{50}{10}} = 10^{-7}\ \text{Wm}^{-2}$$

Luego:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow P = 4\pi r^2 I \Rightarrow P = 4\pi\cdot 1^2\cdot 10^{-7} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{W}$$

La intensidad correspondiente a una conversación a 5 m será:

$$I' = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{4\pi 5^2} = \frac{10^{-7}}{25}\ \text{Wm}^{-2}$$

La intensidad real que llega al teléfono inteligente es:

$$I_{\text{R}} = 0,02\cdot\frac{10^{-7}}{25} = \frac{2}{25}\cdot 10^{-9}\ \text{Wm}^{-2}$$

El nivel de intensidad sonora que llega al teléfono es:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\left(\frac{\frac{2}{25}\cdot 10^{-9}}{1,0\cdot 10^{-12}}\right) = 19,03\ \text{dB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 19,03\ \text{dB}}$$

b) El teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 m. Determinamos la intensidad que llegaría a esa distancia proveniente de una conversación:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{4\pi 100^2} = 10^{-11}\ \text{Wm}^{-2}$$

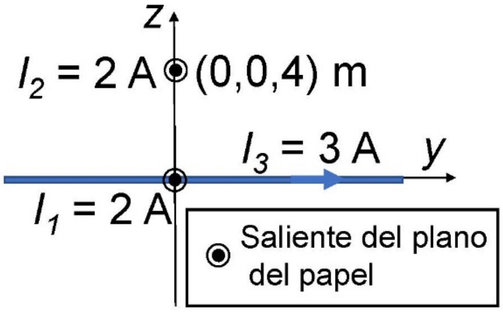
El nivel de intensidad sonora que llega al teléfono es:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\left(\frac{10^{-11}}{1,0\cdot 10^{-12}}\right) = 10\ \text{dB}$$

Luego el nivel de intensidad sonora más bajo que es capaz de medir es:

$$\boxed{\beta = 10\ \text{dB}}$$

Pregunta A.3.- Se tienen tres hilos indefinidos de corriente (ver figura). Los hilos de intensidades I_1 = 2 A e I_2 = 2 A son paralelos al eje *x* y pasan por los puntos (0, 0, 0) y (0, 0, 4) m, respectivamente. El tercer hilo, con una intensidad I_3 = 3 A pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al eje *y*. En todos los casos la corriente va en el sentido positivo de los ejes. Calcule:



a) El campo magnético total creado por los tres hilos en el punto (0, 0, 2) m.
b) La fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo de intensidad I_1 sobre el hilo de intensidad I_2. ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?

Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ N A^{-2}.

Solución:

a) El campo magnético creado por un hilo indefinido es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\varphi$$

Los campos magnéticos creados por cada uno de los hilos de corriente en el punto (0, 0, 2) m es:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{j} = -\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2}{2\pi\cdot2}\vec{j} = -2\cdot10^{-7}\vec{j}\ \text{T}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{j} = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2}{2\pi\cdot2}\vec{j} = 2\cdot10^{-7}\vec{j}\ \text{T}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3}\vec{i} = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot3}{2\pi\cdot2}\vec{i} = 3\cdot10^{-7}\vec{i}\ \text{T}$$

Por tanto, el campo magnético total en el punto (0, 0, 2) m es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -2\cdot10^{-7}\vec{j} + 2\cdot10^{-7}\vec{j} + 3\cdot10^{-7}\vec{i} = 3\cdot10^{-7}\vec{i}\ \text{T} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = 3\cdot10^{-7}\vec{i}\ \text{T}}$$

b) La fuerza magnética que ejerce el hilo conductor de intensidad I_1 sobre el conductor I_2, es

$$\vec{F} = I_2\vec{L}_2 \times \vec{B}_1$$

Donde B_1 es el campo creado por el hilo de corriente I_1 en los puntos del hilo conductor I_2:
Luego:

$$\frac{\vec{F}}{L} = \left(2\vec{i}\right)\times\left(-\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot2}{2\pi\cdot4}\vec{j}\right) = -2{,}0\cdot10^{-7}(\vec{i}\times\vec{j}) = -2{,}0\cdot10^{-7}\vec{k}\ \text{N m}^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{\vec{F}}{L} = -2{,}0\cdot10^{-7}\vec{k}\ \text{N m}^{-1}}$$

La fuerza es **atractiva**.

Pregunta A.4.-. Sea un sistema óptico formado por dos lentes convergentes, una lente A de distancia focal f_A' y otra B, situada 80 cm a la derecha de A, de distancia focal f_B' = 30 cm. Un objeto de 5 cm de altura está situado 15 cm a la izquierda de la lente A.

a) Si la imagen del objeto formada por el sistema de lentes aparece 75 cm a la derecha de la lente B, ¿cuánto vale la distancia focal de la lente A y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes?

b) ¿Dónde hay que situar el objeto a la izquierda de la lente A, para que el sistema de lentes forme la imagen en el infinito?

Solución:

a) Según los datos del problema, para la lente B, s_B' = 75 cm. La ecuación de las lentes delgadas para B es:

$$\frac{1}{s_B'}-\frac{1}{s_B}=\frac{1}{f_B'} \Rightarrow \frac{1}{75}-\frac{1}{s_B}=\frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{s_B}=\frac{1}{75}-\frac{1}{30}=\frac{30-75}{75\cdot 30} \Rightarrow s_B=\frac{75\cdot 30}{30-75}=-50 \text{ cm}$$

Luego la imagen formada por la lente A está 50 cm a la izquierda de la lente B. Como ambas lentes están separadas 80 cm, entonces:

$$s_A'=80-50=30 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación de las lentes para la lente A:

$$\frac{1}{s_A'}-\frac{1}{s_A}=\frac{1}{f_A'} \Rightarrow \frac{1}{30}-\frac{1}{-15}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15}=\frac{1}{f_A'} \Rightarrow \frac{1}{f_A'}=\frac{1+2}{30} \Rightarrow f_A'=\frac{30}{3}=10 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{f_A'=10 \text{ cm}}$$

Determinamos el tamaño del objeto formado por el sistema de lentes. En primer lugar, el tamaño del objeto formado por la lente A será:

$$M_A=\frac{s_A'}{s_A}=\frac{y_A'}{y_A} \Rightarrow y_A'=\frac{y_A s_A'}{s_A}=\frac{5\cdot 30}{-15}=-10 \text{ cm}$$

Para la lente B:

$$y_B'=\frac{y_B s_B'}{s_B}=\frac{-10\cdot 75}{-50}=15 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{y_B'=15 \text{ cm}}$$

b) La imagen formada por el sistema de lentes aparece en el infinito si la imagen formada por la lente A se encuentra en el foco objeto de B. Esto significa que:

$$s_A'=80-30=50 \text{ cm}$$

Por consiguiente:

$$\frac{1}{s_A'}-\frac{1}{s_A}=\frac{1}{f_A'}; \Rightarrow \frac{1}{50}-\frac{1}{s_A}=\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{s_A}=\frac{1}{50}-\frac{1}{10}=\frac{1-5}{50} \Rightarrow s_A=\frac{50}{-4}=-12{,}5 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{s_A=-12{,}5 \text{ cm}}$$

Pregunta A.5.- En un experimento realizado en un acelerador de partículas se han originado un electrón relativista de velocidad 0,75*c*, siendo *c* la velocidad de la luz, y un fotón de 15 MeV de energía.

a) Calcule la masa relativista y la energía cinética del electrón.
b) Determine la longitud de onda del fotón y la longitud de de Broglie del electrón.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6·10^{-19} C; *Masa del electrón en reposo*, $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg; *Constante de Planck, h = 6,63·10*$^{-34}$ J s; *Velocidad de la luz en el vacío, c = 3·10*^{8} m s^{-1}.

Solución:

a) La masa relativista del electrón viene dada por la expresión:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}75c}{c}\right)^2}} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}}{\sqrt{1-0{,}75^2}} = 13{,}76\cdot 10^{-31}\ \text{kg} \Rightarrow \boxed{m = 1{,}38\cdot 10^{-30}\ \text{kg}}$$

La energía cinética del electrón es:

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = 13{,}76\cdot 10^{-31}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\right)^2 - 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\right)^2 = 41{,}92\cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c = 4{,}19\cdot 10^{-14}\ \text{J}}$$

b) Determinamos la longitud de onda del fotón. Se cumple:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda_f} \Rightarrow \lambda_f = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{15\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 0{,}829\cdot 10^{-13}\ \text{m} \Rightarrow \boxed{\lambda_f = 8{,}29\cdot 10^{-14}\ \text{m}}$$

Para el electrón debemos utilizar la ecuación de de Broglie:

$$\lambda_e = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{13{,}76\cdot 10^{-31}\cdot 0{,}75\cdot 3{,}0\cdot 10^8} = 0{,}2142\cdot 10^{-11}\ \text{m} \Rightarrow \boxed{\lambda_e = 2{,}14\cdot 10^{-12}\ \text{m}}$$

Pregunta B.1.- Una partícula de masa *m* se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema de referencia (*x*, *y*). La componente *x* del campo gravitatorio creado por la partícula en el punto (2, 2) m es $-1{,}18\cdot 10^{-11}$ N kg^{-1}.

a) Calcule el valor de la masa *m*.
b) ¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa *M* = 5 kg desde el punto (4, 0) m al punto (2, 2) m?

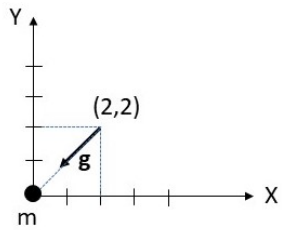
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Solución:

a) El campo gravitatorio creado por la masa m es:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u}_r$$

Según la figura, el vector está dirigido a lo largo de la diagonal del cuadrado de lado 2 m.



La componente x del campo gravitatorio es:

$$g_x = -\frac{Gm}{r^2}\cos\theta \Rightarrow m = -\frac{g_x r^2}{G\cos\theta} = -\frac{\left(-1{,}18\cdot 10^{-11}\right)\cdot(2^2+2^2)}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\cos(45)} = \frac{1{,}18\cdot 8}{6{,}67}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 2{,}0015 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 2 \text{ kg}}$$

b) El trabajo que realiza el campo es:

$$W = -\left[E_P(B) - E_P(A)\right] = -\left[MV(B) - MV(A)\right]$$

Donde B es el punto (2, 2) m y A es el punto (4, 0) m. El potencial gravitatorio creado por la masa m situada en el origen es:

$$V = -\frac{Gm}{r}$$

Para los puntos A y B:

$$V(A) = -\frac{Gm}{r_A} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2}{4} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}}{2} \text{ J kg}^{-1}$$

$$V(B) = -\frac{Gm}{r_B} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2}{\sqrt{2^2+2^2}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\sqrt{2}}{2} \text{ J kg}^{-1}$$

Luego el trabajo será:

$$W = -5\left[-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\sqrt{2}}{2} + \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}}{2}\right] = -5\left[\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}(1-\sqrt{2})}{2}\right] = 6{,}907\cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = 6{,}91\cdot 10^{-11} \text{ J}}$$

Pregunta B.2.- Una onda transversal se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje *x*. La propagación de la onda es en el sentido positivo del eje *x*. La expresión matemática de la onda en los instantes $t = 0$ s y $t = 2$ s es $y(x,0) = 0{,}1\cos(\pi - 4\pi x)$ m e $y(x,2) = 0{,}1\cos(11\pi - 4\pi x)$ m, respectivamente, donde todas las magnitudes están expresadas en el SI de unidades. Calcule:

a) La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.
b) La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.

Solución:

a) La expresión matemática de una onda transversal que se propaga en el eje *x* es:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi)$$

Según el enunciado del problema:

$$y(x,0) = 0{,}1\cos(\pi - 4\pi x) = A\cos(\omega \cdot 0 - kx + \phi)$$

$$y(x,2) = 0{,}1\cos(11\pi - 4\pi x) = A\cos(\omega \cdot 2 - kx + \phi)$$

Por tanto, se cumple que:

$A = 0{,}1$ m y $k = 4\pi$ rad m^{-1}.

Además, debe cumplirse:

$$\pi - 4\pi x = \omega \cdot 0 - kx + \phi = -kx + \phi$$

$$11\pi - 4\pi x = \omega \cdot 2 - kx + \phi = 2\omega - kx + \phi$$

Teniendo en cuenta que $k = 4\pi$ rad m^{-1}, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\pi - 4\pi x = -4\pi x + \phi \Rightarrow \phi = \pi$$

$$11\pi - 4\pi x = 2\omega - kx + \phi = 2\omega - 4\pi x + \pi \Rightarrow 2\omega = 10\pi \Rightarrow \omega = \frac{10\pi}{2} = 5\pi \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow \boxed{\omega = 5\pi \text{ rad s}^{-1}}$$

La expresión matemática de la onda es:

$$\boxed{y(x,t) = 0{,}1\cos(5\pi t - 4\pi x + \pi) \text{ m}}$$

b) La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\left(\frac{2\pi}{k}\right)}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} = \frac{\omega}{k} = \frac{5\pi}{4\pi} = 1{,}25 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow \boxed{v = 1{,}25 \text{ m s}^{-1}}$$

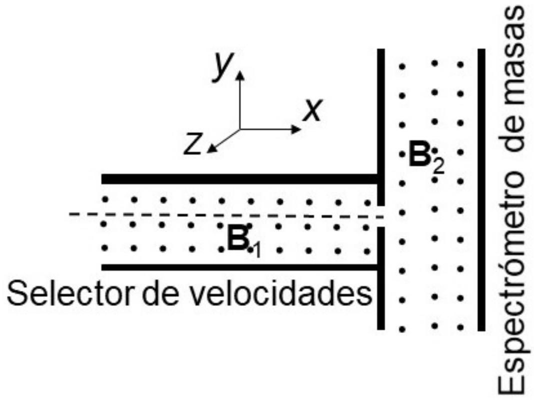
La aceleración máxima de un punto de la cuerda se obtiene si se tiene en cuenta que:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = -A\omega sen(\omega t - kx + \phi) \Rightarrow a(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t - kx + \phi)$$

El valor máximo de la aceleración es:

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0{,}1(5\pi)^2 = 24{,}674011 \Rightarrow \boxed{a_{\max} = 24{,}67 \text{ m s}^{-2}}$$

Pregunta B.3.- Un espectrómetro de masas es un dispositivo para medir la masa de los iones y cuyo esquema se muestra en la figura. Consta de un selector de velocidades, en el que, mediante un campo eléctrico y un campo magnético mutuamente perpendiculares, se seleccionan únicamente los iones que viajan en línea recta paralela al eje *x* de la figura y con un valor determinado de la velocidad. A continuación, los iones pasan a una segunda región con un campo magnético perpendicular a la velocidad de los iones, de forma que éstos realizan una trayectoria circular. En el experimento se usan iones positivos de oxígeno $^{18}O^{+}$ cuya masa es $2{,}7\cdot10^{-26}$ kg y su carga es $+e$. En el selector de velocidades los campos eléctrico y magnético son $\vec{E} = 4{,}0\cdot10^5\,\vec{j}$ V m^{-1} y $\vec{B}_1 = 2\,\vec{k}$ T. El campo magnético en la segunda región del espectrómetro de masas es $\vec{B}_2 = 5\,\vec{k}$ T.



Calcule:

a) La velocidad de los iones de oxígeno que viajan en línea recta a lo largo del eje *x* en el selector de velocidades.

b) El radio de la órbita circular descrita por los iones en la segunda región del espectrómetro de masas donde el campo magnético es B_2.

Dato: Valor absoluto de la carga de electrón, e = 1,6·10^{-19} C.

Solución:

a) En el selector de velocidades, para que la carga se mueva en línea recta debe cumplirse que:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{mag} = 0 \Rightarrow q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}_1 = 0 \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \left|\vec{v}\times\vec{B}_1\right|$$

Como $\vec{v}$ y $\vec{B}_1$ son perpendiculares, sólo los iones cuya velocidad sea paralela al eje *x* saldrán del selector de velocidades. Por tanto:

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{v}\right|\left|\vec{B}_1\right| \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{B}_1\right|} = \frac{4\cdot10^5}{2} = 2{,}0\cdot10^5\ \text{m s}^{-1} \Rightarrow \boxed{v = 2{,}0\cdot10^5\ \text{m s}^{-1}}$$

b) A la salida del selector de velocidades se cumple:

$$F_{mag} = |q|vB_2 = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B_2}$$

Para el $^{18}O^{+}$, su masa es $2{,}7\cdot10^{-26}$ kg, luego el radio de la órbita será:

$$r = \frac{mv}{|q|B_2} = \frac{2{,}7\cdot10^{-26}\cdot2\cdot10^5}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5} = 0{,}675\cdot10^{-2}\ \text{m} \Rightarrow \boxed{r = 0{,}67\ \text{cm}}$$

Pregunta B.4.- Sean dos medios A y B de índices de refracción n_A y n_B, respectivamente. Un rayo de luz de frecuencia $6{,}04\cdot10^{14}$ Hz incide desde el medio A hacia el medio B, verificándose que el ángulo límite para la reflexión total es 45,58º. Sabiendo que $n_A - n_B = 0{,}6$, determine:

a) Los índices de refracción n_A y n_B de ambos medios.
b) Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}.

Solución:

a) Determinamos los índices de refracción de ambos medios. Como el ángulo límite para la reflexión total para un rayo que va de A hacia B es de 45,58º, se cumple, según la ley de Snell:

$$n_A \text{sen}\theta_i = n_B \text{sen}\theta_r \Rightarrow n_A \text{sen}\left(45{,}58^0\right) = n_B \text{sen}\left(90^0\right) = n_B \Rightarrow n_B = n_A \text{sen}\left(45{,}58^0\right)$$

Por otro lado, sabemos que:

$$n_A - n_B = 0{,}6$$

Por consiguiente:

$$n_A - n_B = n_A - n_A \text{sen}\left(45{,}58^0\right) = n_A\left[1 - \text{sen}\left(45{,}58^0\right)\right] = 0{,}6$$

$$\Rightarrow n_A = \frac{0{,}6}{\left[1 - \text{sen}\left(45{,}58^0\right)\right]} = 2{,}10 \Rightarrow \boxed{n_A = 2{,}10}$$

Luego:

$$n_B = n_A - 0{,}6 = 2{,}10 - 0{,}6 = 1{,}5 \Rightarrow \boxed{n_B = 1{,}5}$$

b) Para calcular la longitud de onda del rayo de luz en ambos medios tenemos en cuenta las siguientes relaciones:

$$n_i = \frac{c}{V_i};\ V_i = \lambda_i f \Rightarrow n_i = \frac{c}{\lambda_i f} \Rightarrow \lambda_i = \frac{c}{n_i f}$$

Donde, V_i y λ_i son la velocidad y la longitud de onda del rayo de luz en el medio i. La frecuencia es independiente del medio. Por tanto:

$$\lambda_A = \frac{c}{n_A f} = \frac{3\cdot10^8}{2{,}1\cdot\left(6{,}04\cdot10^{14}\right)} = 236{,}518\cdot10^{-9}\ \text{m} \Rightarrow \boxed{\lambda_A = 236{,}52\ \text{nm}}$$

$$\lambda_B = \frac{c}{n_B f} = \frac{3\cdot10^8}{1{,}5\cdot\left(6{,}04\cdot10^{14}\right)} = 331{,}126\cdot10^{-9}\ \text{m} \Rightarrow \boxed{\lambda_B = 331{,}13\ \text{nm}}$$

Pregunta B.5.- El patrón del kilogramo es un cilindro hecho con una aleación de platino-iridio (90 % en masa de Pt) que se encuentra en un museo de París. El platino está formado por diversos isótopos, uno de ellos, el ^{190}Pt, es radiactivo siendo su tiempo de semidesintegración de $6{,}5\cdot10^{11}$ años. El porcentaje del isótopo ^{190}Pt en una muestra de platino es del 0,012 % en masa.

a) Calcule la actividad inicial del patrón del kilogramo.

b) ¿Cuál será la masa final del platino ^{190}Pt que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años?

Datos: Masa atómica del isótopo ^{190}Pt; $M = 189{,}96$ u; *Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$* mol^{-1}.

Solución:

a) La actividad inicial de una muestra radiactiva es:

$$A = \lambda N$$

λ es la constante de desintegración y *N* el número de átomos. Calculamos la constante de desintegración y el número de isótopos radiactivos en el patrón del kilogramo.

$$m = m_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

En el patrón del kilogramo hay 0,9 kg de Pt y $0{,}9\text{x}0{,}012\cdot10^{-2}$ kg del isótopo ^{190}Pt. Luego el número de átomos será:

$$N = moles\cdot N_A = \frac{m(g)}{P_M} N_A = \frac{0{,}9\cdot 0{,}012\cdot10^{-2}\cdot10^{3}}{189{,}96}(6{,}02\cdot10^{23}) = 3{,}42\cdot10^{20} \text{ isótopos}$$

Por consiguiente:

$$A = \frac{\ln 2\cdot\left(3{,}42\cdot10^{20}\right)}{6{,}5\cdot10^{11}\cdot365\cdot24\cdot3600} = 11{,}573 \text{ Bq} \Rightarrow \boxed{A = 11{,}57 \text{ Bq}}$$

b) Calculamos la masa del platino ^{190}Pt que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años. La masa inicial correspondiente a los isótopos de ^{190}Pt es:

$$m_0 = 0{,}9\cdot 0{,}012\cdot10^{-2} = 108\cdot10^{-6} \text{ kg}$$

La masa del platino ^{190}Pt que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años será:

$$m = m_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow m = 108\cdot10^{-6} e^{-\frac{\ln 2}{6{,}5\cdot10^{11}}\cdot1{,}0\cdot10^{9}} = 108\cdot10^{-6} e^{-0{,}106638\cdot10^{-2}} = 107{,}885\cdot10^{-6} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 1{,}07\cdot10^{-4} \text{ kg}}$$