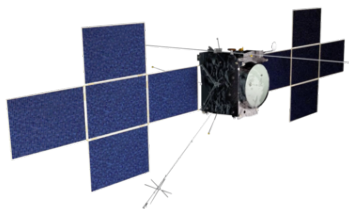


Nombre y apellidos: _____

1. La misión **Juice** de la **ESA** (que explorará las lunas heladas de Júpiter) con una masa de 4800 kg , se lanzará primero desde una **órbita terrestre** baja o **Low Earth Orbit (LEO)** a 400 km de **altura** sobre la superficie de la Tierra hasta otra a 10.000 km de **altura** sobre la Tierra. Calcula:



- a) La **energía necesaria** de **transferencia** entre ambas órbitas. (2 pt.)
 b) La **velocidad** de **escape** desde la **2ª órbita** (a 10.000 km de altura). (1 pt.)
 Datos de La Tierra: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$
Justifica todas las fórmulas que utilices.

2. El campo gravitatorio en la superficie de Marte $g_{0\text{Marte}} = 0,444 \cdot g_{0\text{Tierra}}$ y el radio de Marte es $R_{\text{Marte}} = 0,522 \cdot R_{\text{Tierra}}$. Se deja caer un cuerpo **verticalmente desde una altura** de 400 km sobre la superficie de Marte. Calcula la **velocidad** que alcanzará al **chocar con la superficie**. Consideramos que no hay rozamiento. Datos de La Tierra: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_{0T} = 9,81 \text{ m/s}^2$ (1,5 pt.)

3. Tenemos una **masa** de 200 kg situada en el punto $A(0,0)$ y otra **masa** de 100 kg situada en $B(0,20)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

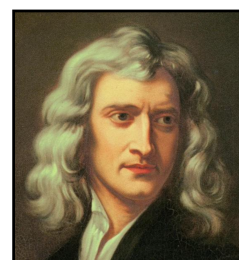
- a) Dibuja un **diagrama**. Calcula el **vector campo gravitatorio total** en el punto $C(21,0)$. (1,5 pt.)
 b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de 2 kg desde el infinito hasta el punto $C(21,0)$. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

4. CUESTIÓN: (**Justifica** la respuesta). Deduce la relación que hay entre la **energía mecánica** gravitatoria y la **energía cinética** de un satélite en una **órbita** circular:

- a) $E_m = -\frac{1}{2} \cdot E_c$ b) $E_m = -2 \cdot E_c$ c) $E_m = -E_c$ (1 pt.)

5. CUESTIÓN **Práctica**: A partir de las medidas del radio orbital, r , y del período, T , de Júpiter, Saturno y Urano que orbitan alrededor del Sol se obtiene la tabla adjunta. Determina a partir de los datos la **masa del Sol (media)** y la **incertidumbre (desviación estándar)**.

Satélite	T [años]	r [UA]
Júpiter	11,86	5,20
Saturno	29,45	9,54
Urano	84,02	19,2



Isaac Newton

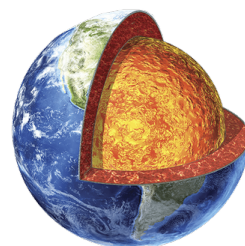
Justifica la fórmula que utilices.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

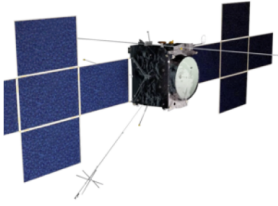
$1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ (distancia Sol-Tierra) (2 pt.)

COMPLEMENTARIO ¿A qué **profundidad** x hay que descender por debajo de la superficie terrestre para que un cuerpo **pese la tercera parte** que en la superficie? Resuélvelo simbólicamente, es decir, sin números. Suponemos que la densidad de la Tierra es constante. **Justifica la fórmula de la gravedad en el interior** de la Tierra.

Datos: R_T (en la respuesta sólo puede aparecer este parámetro). (1,5 pt.)



1. La misión **Juice** de la **ESA** (que explorará las lunas heladas de Júpiter) con una masa de 4800 kg , se lanzará primero desde una **órbita terrestre** baja o **Low Earth Orbit (LEO)** a $400 \text{ kilómetros de altura}$ sobre la superficie de la Tierra hasta otra a $10.000 \text{ km de altura}$ sobre la Tierra. Calcula:



- a) La **energía necesaria** de **transferencia** entre ambas órbitas. (2 pt.)
b) La **velocidad** de **escape** desde la **2ª órbita** (a 10.000 km de altura). (1 pt.)
Datos de La Tierra: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$
Justifica todas las fórmulas que utilices.

a) **Energía de transferencia.**

Datos: $r_A = 6370 + 400 \text{ km} = 6,77 \cdot 10^6$

$$E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$$

$r_B = 6370 + 10.000 \text{ km} = 1,637 \cdot 10^7 \text{ m}$

$$E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}$$

Energía de transferencia orbital

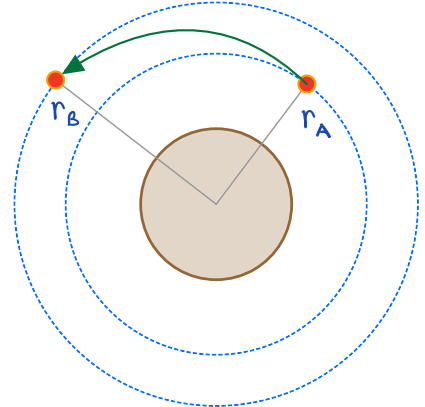
$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{Mm}{r_B} \right) - \left(\frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{Mm}{r_A} \right)$$

$$F_{c_B} = F_{g_B} \Rightarrow G \frac{M}{r_B} = v_B^2, \quad F_{c_A} = F_{g_A} \Rightarrow G \frac{M}{r_A} = v_A^2$$

$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_B} - G \frac{Mm}{r_B} \right) - \left(\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_A} - G \frac{Mm}{r_A} \right)$$

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_B} + \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_A}$$

← **Diferencia entre las energías de enlace orbital**



$$E_{necesaria} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Energía de transferencia orbital [J]

No conozco ni G ni M , pero a partir de los datos: $g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2$, luego:

$$E_{necesaria} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2 \cdot 4800}{2} \cdot \left(\frac{1}{6,77 \cdot 10^6} - \frac{1}{1,637 \cdot 10^7} \right) \approx 8,275 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Como es lógico, la energía de satelización es positiva.

b) **Calculamos primeramente la velocidad de escape en general.**

$$E_e + E_p = E_{c_\infty} + E_{p_\infty} \quad (\text{no tenemos en cuenta la } E_c)$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = 0 - G \frac{M \cdot m}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r} \Rightarrow$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}$$

Velocidad de escape (fórmula general)

$$G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{1,637 \cdot 10^7}} \approx 6970 \text{ m/s} = 6,97 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$r = r_B = 1,637 \cdot 10^7 \text{ m}$

2. El campo gravitatorio en la superficie de Marte $g_{0Marte} = 0,444 \cdot g_{0Tierra}$ y el radio de Marte es $R_{Marte} = 0,522 \cdot R_{Tierra}$. Se deja caer un cuerpo **verticalmente desde una altura** de 400 km sobre la superficie de Marte. Calcula la **velocidad** que alcanzará al **chocar con la superficie**. Consideramos que no hay rozamiento. Datos de La Tierra: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_{0T} = 9,81 \text{ m/s}^2$ (1,5 pt.)

Datos: $g_{0M} = 0,444 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 4,36 \text{ m/s}^2$; $R_H = 0,522 \cdot 6370 \text{ km} \approx 3325 \text{ km} = 3,325 \cdot 10^6 \text{ m} = r_B$

$$r_A = R_H + h = (3325 + 400) \text{ km} = 3,725 \cdot 10^6 \text{ m}$$

En la posición inicial (h en el punto A ó r_A desde el centro de Marte), la velocidad $v_A = 0$ (se deja caer).

Queremos calcular v_B : $E_{m_A} = E_{m_B}$ Conservación de la Energía mecánica

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{M \cdot m}{r_A}}_0 = \frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{M \cdot m}{r_B}$$

siendo $v_A = 0$, $r_B = R_H$ (radio de Marte).

Además $G M = g_0 R^2$ (datos de Marte)

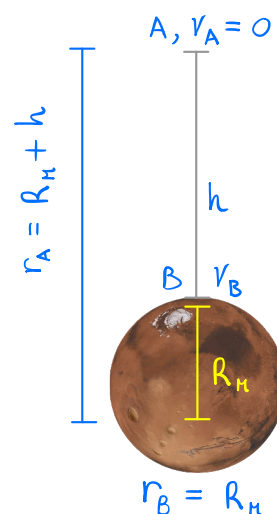
$$-G \frac{M}{r_A} = \frac{1}{2} v_B^2 - G \frac{M}{r_B} \Rightarrow \frac{1}{2} v_B^2 = G \frac{M}{r_B} - G \frac{M}{r_A}$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = g_0 R^2 \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$v_B = \sqrt{2 g_0 R^2 \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)}$$

Velocidad al colisionar contra la superficie de Marte.

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 4,36 \cdot (3,325 \cdot 10^6)^2 \cdot \left(\frac{1}{3,325 \cdot 10^6} - \frac{1}{3,725 \cdot 10^6} \right)} \approx 1764,5 \text{ m/s} \approx 1,76 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$



3. Tenemos una **masa** de 200 kg situada en el punto A(0,0) y otra **masa** de 100 kg situada en B(0,20). Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

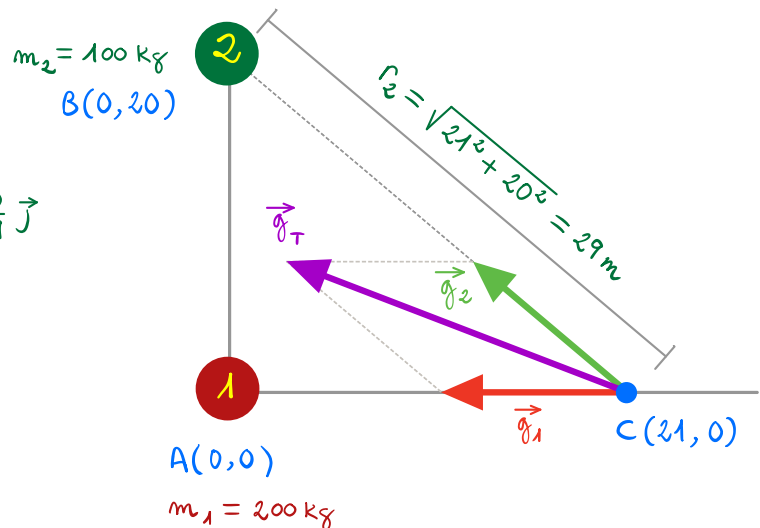
- Dibuja un **diagrama**. Calcula el **vector campo gravitatorio total** en el punto C(21,0). (1,5 pt.)
- Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de 2 kg **desde el infinito** hasta el punto C(21,0). **Interpreta el signo del trabajo**. (1 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia C(21,0)

$$\vec{u}_1 = \vec{r} ; r_1 = 21 \text{ m}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(21,0) - (0,20)}{\sqrt{21^2 + 20^2}} = \left(\frac{21}{29}, -\frac{20}{29} \right) = \frac{21}{29} \vec{i} - \frac{20}{29} \vec{j}$$

Esperamos un campo más fuerte creado por la masa de 200 kg y que el campo total tenga sentido hacia la izquierda y hacia arriba.



Según el principio de superposición

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad \text{Campo gravitatorio (forma vectorial)} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\vec{g}_1 = -G \frac{m_1}{r_1^2} \vec{u}_1 = -G \frac{200}{21^2} \cdot \vec{i} = -3,02 \cdot 10^{-11} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -G \frac{m_2}{r_2^2} \vec{u}_2 = -G \frac{100}{29^2} \cdot \left(\frac{21}{29} \vec{i} - \frac{20}{29} \vec{j} \right) = -5,74 \cdot 10^{-12} \vec{i} + 5,47 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -3,59 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 5,47 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \text{ en } C(21,0) \text{ hacia la izquierda y hacia arriba.}$$

$$b) \quad W_{A \rightarrow B} = -m \cdot (V_B - V_A) = -(E_{PB} - E_{PA}) \quad , m = 2 \text{ kg} , V_\infty = -G \frac{M}{\infty} = 0 , E_{P\infty} = -G \frac{Mm}{\infty} = 0$$

Podemos utilizar el método de los potenciales o bien el de las energías potenciales.

$$\text{Calculamos ahora el potencial: } V = \frac{E_P}{m} = -G \frac{M}{r} \quad \text{Potencial gravitatorio (escalar)} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

$$V_T = V_1 + V_2 , V_T = -G \cdot \frac{M}{r} = -G \cdot \left[\frac{200}{21} + \frac{100}{29} \right] \simeq -8,65 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$W_{\infty \rightarrow C} = -m \cdot (V_C - V_\infty) = -2 \text{ kg} \cdot \left(-8,65 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{kg}} - 0 \right) \simeq +1,73 \cdot 10^{-9} \text{ J} < 0$$

$W_g > 0$ El trabajo lo realiza el campo gravitatorio de forma espontánea.

Tiene sentido porque la masa se acerca a favor de la atracción gravitatoria de las otras dos.

4. CUESTIÓN: (Justifica la respuesta). Deduce la relación que hay entre la **energía mecánica** gravitatoria y la **energía cinética** de un satélite en una **órbita** circular:

a) $E_m = -\frac{1}{2} \cdot E_c$

b) $E_m = -2 \cdot E_c$

☒ c) $E_m = -E_c$

(1 pt.)

La energía mecánica total

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Si un cuerpo está atrapado gravitatoriamente, se cumple la condición de órbita:

$$F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow m v^2 = G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M \cdot m}{r} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow E_m = -G \cdot \frac{M \cdot m}{2r}$$

Energía de enlace orbital
 $E_m < 0$

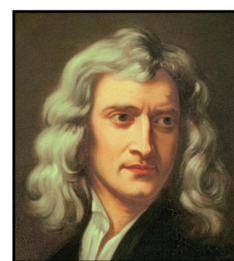
Como se puede apreciar: $E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} E_p$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow E_m = -E_c$$

La respuesta correcta es la ©

5. CUESTIÓN **Práctica**: A partir de las medidas del radio orbital, r , y del período, T , de Júpiter, Saturno y Urano que orbitan alrededor del Sol se obtiene la tabla adjunta. Determina a partir de los datos la **masa del Sol (media)** y la **incertidumbre (desviación estándar)**.

Satélite	T [años]	r [UA]
Júpiter	11,86	5,20
Saturno	29,45	9,54
Urano	84,02	19,2



Isaac Newton

Justifica la fórmula que utilices.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

1 UA = $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ (distancia Sol-Tierra)

(2 pt.)

De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2 \quad \left\{ \quad G \frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \right.$$

En el movimiento circular $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$G \frac{M}{r} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K \Rightarrow T^2 = K \cdot r^3 \quad \text{magnitudes directamente proporcionales}$$

Podemos también calcular la masa del Sol analíticamente $\Rightarrow M_{\odot} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$

Pasamos a unidades S.I. días $\cdot \frac{24h}{1 \text{ día}} \cdot \frac{3600s}{1h}$, 1 U.A. = $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

$$J. \Rightarrow T_J \approx 3,74 \cdot 10^8 \text{ s} \quad ; \quad r_J = 7,8 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad ; \quad M_{\odot} = \frac{4\pi^2 (7,8 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (3,74 \cdot 10^8)^2} \approx 2,008050 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$S. \Rightarrow T_S \approx 9,29 \cdot 10^8 \text{ s} \quad ; \quad r_S = 1,43 \cdot 10^{12} \text{ m} \quad ; \quad M_{\odot} = \frac{4\pi^2 (1,43 \cdot 10^{12})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (9,29 \cdot 10^8)^2} \approx 2,005440 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$U. \Rightarrow T_U \approx 2,65 \cdot 10^9 \text{ s} \quad ; \quad r_U = 2,88 \cdot 10^{12} \text{ m} \quad ; \quad M_{\odot} = \frac{4\pi^2 (2,88 \cdot 10^{12})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (2,65 \cdot 10^9)^2} \approx 2,013350 \times 10^{30} \text{ kg}$$

La **media** de la masa solar, $\overline{M}_{\odot} = \frac{2,008 + 2,005 + 2,013}{3} \cdot 10^{30} \approx 2,009 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ Tomo 3 decimales arbitrariamente

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{Desviación estándar : cuantifica la incertidumbre de la medida.}$$

$n = 3$

$$\sqrt{\frac{(2,008 - 2,009)^2 + (2,005 - 2,009)^2 + (2,013 - 2,009)^2}{3-1}} \approx 0,004062 \approx 0,004 \Rightarrow \sigma \approx 0,004 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

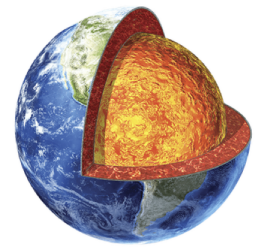
La medida se expresa como **media $\pm$ incertidumbre**: $\overline{x} \pm \sigma$,

$$\text{En nuestro caso } \overline{M}_{\odot} \pm \sigma = (2,009 \pm 0,004) \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

COMPLEMENTARIO ¿A qué **profundidad** x hay que descender por debajo de la superficie terrestre para que un cuerpo **pese la tercera parte** que en la superficie? Resuélvelo simbólicamente, es decir, sin números. Suponemos que la densidad de la Tierra es constante. **Justifica la fórmula de la gravedad en el interior** de la Tierra.

Datos: R_T (en la respuesta sólo puede aparecer este parámetro).

(1,5 pt.)



$$S_{\text{sfera}} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Campo gravitatorio
(forma vectorial)

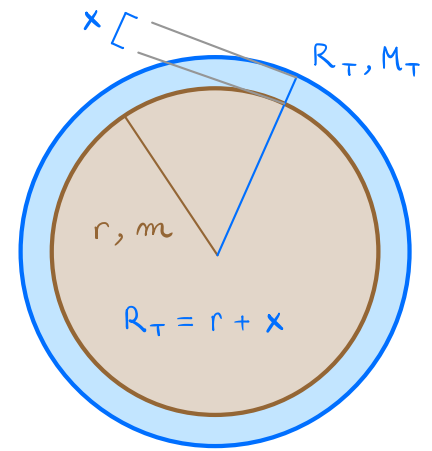
$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}; \text{ Suponemos una densidad constante:}$$

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow M_T = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T$$

$$g_{\text{int}} = G \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r$$

Dividimos



$r \equiv$ radio interior

$x \equiv$ profundidad

$R_T \equiv$ radio Tierra

$$\frac{g_{\text{int}}}{g_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r}{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T} = \frac{r}{R_T} \Rightarrow$$

$$g_{\text{int}} = \left(\frac{g_0}{R_T} \right) \cdot r$$

Campo en
el interior
(ec. recta)

Para que un cuerpo pese la tercera parte: $g_{\text{int}} = \frac{1}{3} \cdot g_0$, es decir:

$$g_{\text{int}} = \left(\frac{g_0}{R_T} \right) \cdot r = \frac{1}{3} \cdot g_0 \Rightarrow \frac{r}{R_T} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3} \cdot R_T \text{ (radio interior)}$$

$$R_T = r + x \Rightarrow x = R_T - r = R_T - \frac{1}{3} \cdot R_T = \frac{2}{3} \cdot R_T$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot R_T \text{ (profundidad)}$$