

Nombre y apellidos: _____

1. La futura misión **Artemis I** de la *NASA*, se lanzará a finales del año 2022 hasta una órbita alrededor de la Luna a 300 km por encima de su superficie. Calcula:

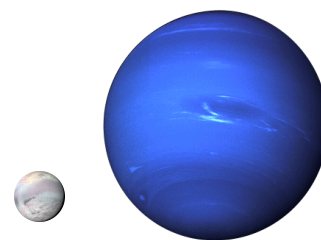


- a) La **velocidad** orbital del **Artemis I** a esa distancia en m/s y km/h (**Justifica** la fórmula que utilices). (1,5 pt.)
- b) El **período orbital** del **Artemis I** en torno a la Luna en **horas**. (0,75 pt.)
- c) La **intensidad del campo gravitatorio** en esa órbita. (0,75 pt.)

Datos de la Luna: $g_{0L} = 1,62\text{ m/s}^2$, $R_L = 1727\text{ km}$

2. El segundo mayor satélite de Neptuno, **Proteus**, describe una órbita a su alrededor con un radio orbital medio de 117.600 km en un período de $1,12$ días terrestres.

- a) Utilizando los datos de **Proteus**, calcula la **masa** de **Neptuno**. (1,5 pt.)
(**Demuestra** la fórmula que has utilizado)
- b) Calcula el **período (en días)** del satélite más grande de Neptuno, **Tritón**, cuyo radio orbital es de 355.200 km . (1 pt.)



Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

3. La distancia máxima de la Tierra hasta el Sol (**afelio**) es $1,521 \cdot 10^{11}\text{ m}$ y su máxima aproximación (**perihelio**) es $1,471 \cdot 10^{11}\text{ m}$. La **velocidad orbital** de la Tierra en el **perihelio** es $3,027 \cdot 10^4\text{ m/s}$.

- a) Calcula el **radio medio** de la órbita de la Tierra. (0,5 pt.)
- b) Calcula la **velocidad en el afelio**. (1 pt.)

4. **CUESTIÓN Justificada:** Un mismo planeta, describiendo circunferencias alrededor del Sol, irá más rápido:

- a) Cuanto **mayor** sea el radio de la órbita.
- b) Cuanto **menor** sea el radio de la órbita.
- c) La velocidad **no depende** del tamaño de la órbita. (1 pt.)

5. **CUESTIÓN Justificada:** Dos satélites artificiales describen **órbitas circulares** alrededor de un planeta de radio R , siendo los **radios de sus órbitas** respectivas $r_1 = 1,050 \cdot R$ y $r_2 = 1,512 \cdot R$.

La **relación entre sus velocidades de giro** es:

- a) $\frac{v_1}{v_2} = 1,44$
- b) $\frac{v_1}{v_2} = 2,07$
- c) $\frac{v_1}{v_2} = 1,2$ (2 pt.)

1. La futura misión **Artemis I** de la NASA, se lanzará a finales del año 2022 hasta una órbita alrededor de la Luna a 300 km por encima de su superficie. Calcula:



- a) La **velocidad** orbital del **Artemis I** a esa distancia en m/s y km/h (Justifica la fórmula que utilices). (1,5 pt.)
 b) El **período orbital** del **Artemis I** en torno a la Luna en **horas**. (0,75 pt.)
 c) La **intensidad del campo gravitatorio** en esa órbita. (0,75 pt.)

Datos de la Luna: $g_{0L} = 1,62 \text{ m/s}^2$, $R_L = 1727 \text{ km}$

a) Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M , pero a partir de los datos: $g_0 = G \frac{M}{R_L^2} \Rightarrow G \cdot M = g_0 \cdot R_L^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_L^2}{r}}$

$h = 300 \text{ km} = 3 \cdot 10^5 \text{ m}$, $R_L = 1,727 \cdot 10^6 \text{ m} \Rightarrow$ El radio orbital $r = R_L + h = 2,027 \cdot 10^6 \text{ m}$

$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_L^2}{r}} = \sqrt{\frac{1,62 \cdot (1,727 \cdot 10^6)^2}{2,027 \cdot 10^6}} \simeq 1544 \text{ m/s} \simeq 1,544 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} \simeq 5,5584 \cdot 10^3 \text{ km/h}$

b) $v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 2,027 \text{ km}}{5,5584 \cdot 10^3 \text{ km/h}} \simeq 2,29 \text{ h}$

c) El campo gravitatorio $g = G \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R_L^2}{r^2} = \frac{1,62 \cdot (1,727 \cdot 10^6)^2}{(2,027 \cdot 10^6)^2} \simeq 1,176 \text{ m/s}^2$

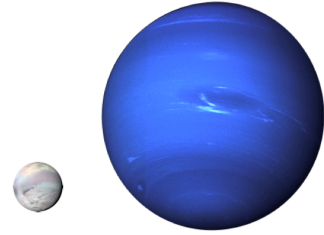
Método II: $g = a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1,544 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2}{2,027 \cdot 10^6} \simeq 1,176 \text{ m/s}^2$

Son lo mismo el campo gravitatorio y la aceleración centrípeta.

2. El segundo mayor satélite de Neptuno, **Proteus**, describe una órbita a su alrededor con un radio orbital medio de 117.600 km en un período de $1,12$ días terrestres.

a) Utilizando los datos de **Proteus**, calcula la **masa de Neptuno**. (1,5 pt.)
(Demuestra la fórmula que has utilizado)

b) Calcula el **período (en días)** del satélite más grande de Neptuno, **Tritón**, cuyo radio orbital es de 355.200 km . (1 pt.)



Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

a) Utilizaremos la demostración de Newton de la 3ª ley de Kepler.

Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r}$; sabemos que $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

$$G \cdot \frac{M}{r} = v^2 = \left(\frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow G \cdot M \cdot T^2 = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot T^2}$$

Masa del cuerpo central (Neptuno)

Cambios de unidades: $r_{\text{proteus}} = 117.600 \text{ km} = 1,176 \cdot 10^8 \text{ m}$; $T_p = 1,12 \text{ día} \cdot \frac{24 \text{ h}}{\text{día}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 96768 \text{ s}$

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot (1,176 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot (96768 \text{ s})^2} \simeq 1,028 \cdot 10^{26} \text{ kg (Masa de Neptuno)}$$

La masa de **Neptuno** es dos órdenes de magnitud (10^2) mayor que la masa de la Tierra.

b) Vamos a calcular el período de Tritón a partir de los datos de Proteus utilizando la 3ª ley de Kepler ya que ambos satélites orbitan a Neptuno.

$P \equiv \text{Proteus}$; $T \equiv \text{Tritón}$; Sabemos que el radio orbital de Tritón $r_T = 355.200 \text{ km}$

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{cte} \Rightarrow \frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_P^2}{r_P^3} \Rightarrow T_T = \sqrt{r_T^3 \cdot \frac{T_P^2}{r_P^3}} = T_P \cdot \sqrt{\frac{r_T^3}{r_P^3}}$$

$$T_T = (1,12 \text{ día})^2 \cdot \sqrt{\frac{(355.200 \text{ km})^3}{(117.600 \text{ km})^3}} \simeq 5,88 \text{ días}$$

El período orbital de Tritón es más largo que el de Proteus porque orbita más lejos de Neptuno.

3. La distancia máxima de la Tierra hasta el Sol (**afelio**) es $1,521 \cdot 10^{11} \text{ m}$ y su máxima aproximación (**perihelio**) es $1,471 \cdot 10^{11} \text{ m}$. La **velocidad orbital** de la Tierra en el **perihelio** es $3,027 \cdot 10^4 \text{ m/s}$.

a) Calcula el **radio medio** de la órbita de la Tierra.

(0,5 pt.)

b) Calcula la **velocidad en el afelio**.

(1 pt.)

$$a) \quad r_{\text{medio}} = \frac{r_{\text{afelio}} + r_{\text{perihelio}}}{2} = \frac{1,521 \cdot 10^{11} + 1,471 \cdot 10^{11}}{2} \simeq 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Propiedad de la Elipse

$$b) \quad r_{\text{afelio}} \cdot v_{\text{afelio}} = r_{\text{perihelio}} \cdot v_{\text{perihelio}} \Rightarrow v_{\text{afelio}} = \frac{r_{\text{perihelio}} \cdot v_{\text{perihelio}}}{r_{\text{afelio}}}$$

2ª ley de Kepler

$$\Rightarrow v_{\text{afelio}} = \frac{1,521 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot 3,027 \cdot 10^4 \text{ m/s}}{1,471 \cdot 10^{11} \text{ m}} \simeq 31275 \text{ m/s} ; \text{ Lógicamente } v_{\text{afelio}} < v_{\text{perihelio}}$$

4. **CUESTIÓN Justificada:** Un mismo planeta, describiendo circunferencias alrededor del Sol, irá más rápido:

a) Cuanto **mayor** sea el radio de la órbita.

b) Cuanto **menor** sea el radio de la órbita.

c) La velocidad **no depende** del tamaño de la órbita.

(1 pt.)

Método I: A partir de la fórmula de la velocidad orbital:

$$\text{Condición de órbita: } F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}},$$

podemos razonar que si el radio orbital es mayor, la velocidad es menor y viceversa.

$$r_p < r_a \Rightarrow v_p > v_a \Rightarrow \text{La respuesta correcta es la } \textcircled{b}$$

$$\text{Método II: 3ª ley de Kepler: } \frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$$

Un radio orbital pequeño $r \Rightarrow$ Un período pequeño también $\Rightarrow$ Una velocidad grande

Un radio orbital grande $r \Rightarrow$ Un período grande también $\Rightarrow$ Una velocidad pequeña

5. **CUESTIÓN Justificada:** Dos satélites artificiales describen **órbitas circulares** alrededor de un planeta de radio R , siendo los **radios de sus órbitas** respectivas $r_1 = 1,050 \cdot R$ y $r_2 = 1,512 \cdot R$.

La **relación entre sus velocidades de giro** es:

a) $\frac{v_1}{v_2} = 1,44$

b) $\frac{v_1}{v_2} = 2,07$

c) $\frac{v_1}{v_2} = 1,2$

(2 pt.)

Método I: A partir de la fórmula de la velocidad orbital:

Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$,

La razón $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{G \frac{M}{r_1}}}{\sqrt{G \frac{M}{r_2}}} = \sqrt{\frac{G \frac{M}{r_1}}{G \frac{M}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{1,512 \cdot R}{1,050 \cdot R}} = 1,2$

La respuesta correcta es la ©

Método II: 3ª ley de Kepler: $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$ (es más largo)

$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{2\pi \cdot r_1}{T_1}}{\frac{2\pi \cdot r_2}{T_2}} = \frac{r_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot r_2}$ [ec. 1]

3ª ley de Kepler: $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$ [ec. 2]

Sustituimos la [ec. 2] en la [ec. 1]:

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot r_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{1,512 \cdot R}{1,050 \cdot R}} = 1,2$

La respuesta correcta es la ©