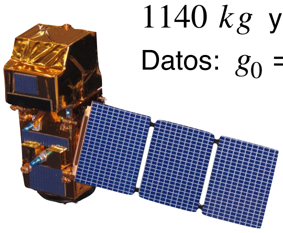
Nombre y apellidos: ____

1. El satélite europeo **Sentinel-2** del programa **Copernicus** se halla en estos momentos en órbita terrestre baja (**LEO**) monitorizando la erupción volcánica de Cumbre vieja en la isla de La Palma. Tiene una masa $1140\ kg$ y orbita a una altura de $786\ km$ sobre la superficie de la Tierra.
Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$. Calcula:



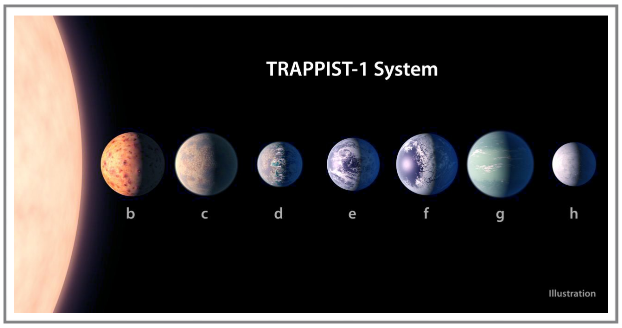
a) La **velocidad orbital** del satélite. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
b) El **período** de la órbita en **minutos**. (0,5 pt.)
c) La **energía necesaria** para su **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)

2. Tenemos una **masa** de $100\ kg$ situada en el punto $A(0{,}0)$ y otra **masa** de $300\ kg$ situada en $B(6{,}0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
   a) Dibuja un **diagrama**. Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(3{,}4)$. (2 pt.)
   b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de $2\ kg$ desde el punto $C(3{,}4)$ hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

3. CUESTIÓN: (**Justificada**) Dado un planeta esférico P, con radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, la relación entre la velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta respecto a la velocidad de escape de dicho objeto desde la superficie de la Tierra es:

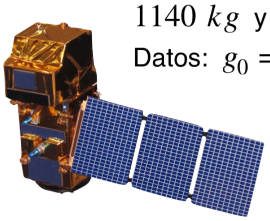
   a) $v_{eP} = 2 \cdot v_{eT}$ b) $v_{eP} = \dfrac{1}{2} \cdot v_{eT}$ c) $v_{eP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_{eT}$ (1,5 pt.)

4. CUESTIÓN **Práctica:** El telescopio robótico europeo TRAPPIST descubrió un sistema de 7 **exoplanetas** de tipo terráqueo al que se denominó **TRAPPIST-1** orbitando rápidamente en torno a una estrella enana roja. Calcula la **masa en** kg (y la **incertidumbre**) de **la estrella** a partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de los tres planetas más grandes que lo orbitan (b, c y g: ver tabla adjunta). **¿A cuántas masas solares equivale? Justifica** la fórmula que utilices. (**NO** hay que hacer la gráfica). Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, **Sol** $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$ (2 pt.)



Planeta	T [días]	r [$10^6\ km$]
b	1,51	1,73
c	2,42	2,37
g	12,35	7,01

1. El satélite europeo **Sentinel-2** del programa **Copernicus** se halla en estos momentos en órbita terrestre baja (**LEO**) monitorizando la erupción volcánica de Cumbre vieja en la isla de La Palma. Tiene una masa $1140\ kg$ y orbita a una altura de $786\ km$ sobre la superficie de la Tierra.



Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$. Calcula:

a) La **velocidad orbital** del satélite. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
b) El **período** de la órbita en **minutos**. (0,5 pt.)
c) La **energía necesaria** para su **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)

a) Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\dfrac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\dfrac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\dfrac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M, pero a partir de los datos: $g_0 = G\dfrac{M}{R_T^2} \Rightarrow G\cdot M = g_0\cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\dfrac{g_0\cdot R_T^2}{r}}$

$h = 786\ Km = 7{,}86\cdot 10^9\ m$, $R_T = 6{,}37\cdot 10^6\ m \Rightarrow$ El radio orbital $r = R_T + h = 7{,}156\cdot 10^6\ m$

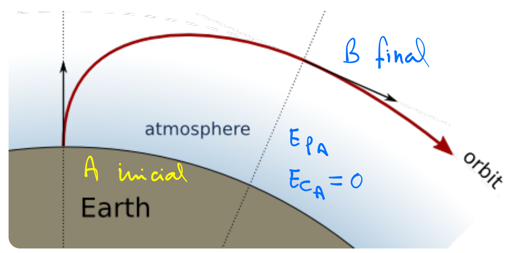
$$v = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2}{7{,}156\cdot 10^6}} \simeq 7458\ m/s = 7{,}458\cdot 10^3\ m/s$$

b) $v = \dfrac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi\cdot 7{,}156\cdot 10^6\ m}{7{,}458\cdot 10^3\ m/s} \simeq 6029\ s\cdot\dfrac{1\ min}{60\ s} = 100{,}5\ min$

c) Calculemos la energía de satelización: $\boxed{E_{necesaria} = Em_B - Em_A}$ Energía de satelización [J]

$E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$

$-G\dfrac{Mm}{R_T} + 0 + E_{necesaria} = -G\dfrac{Mm}{r} + \dfrac{1}{2}mv^2$,



En B, está en órbita: $G\dfrac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\dfrac{M}{r} = v^2$

$E_{necesaria} = -G\dfrac{Mm}{r} + \dfrac{1}{2}mv^2 + G\dfrac{Mm}{R_T}$

$E_{necesaria} = -G\dfrac{Mm}{r} + \dfrac{1}{2}m\,G\dfrac{M}{r} + G\dfrac{Mm}{R_T}$

$E_{necesaria} = GMm\left(-\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{2r} + \dfrac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{1}{2r}\right) \Rightarrow E_{necesaria} = GMm\cdot\left(\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{1}{2\cdot r}\right)$,

$G\cdot M = g_0\cdot R_T^2$, luego: $\boxed{E_{necesaria} = g_0\,R_T^2\,m\cdot\left(\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{1}{2\cdot r}\right)}$ Energía de satelización [J]

$$E_{necesaria} = 9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2\cdot 1140\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6} - \frac{1}{2\cdot 7{,}156\cdot 10^6}\right)\ J \simeq 3{,}95\cdot 10^{10}\ J$$

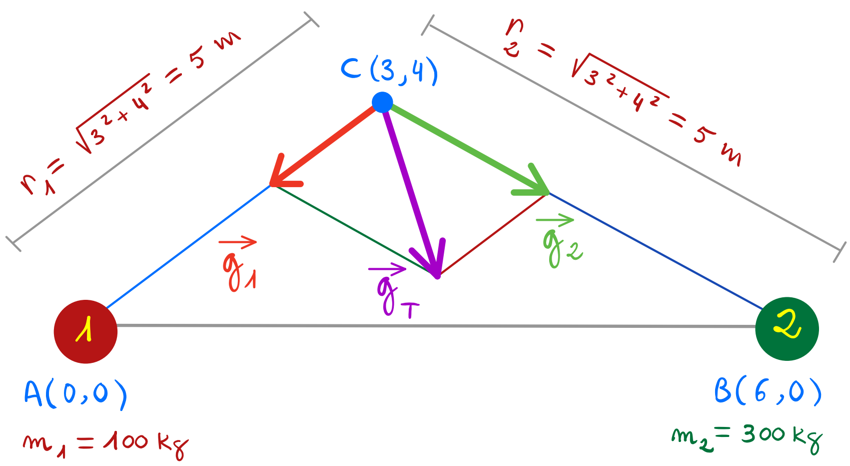
Como es lógico, la energía de satelización es positiva.

2. Tenemos una **masa** de $100\ kg$ situada en el punto $A(0{,}0)$ y otra **masa** de $300\ kg$ situada en $B(6{,}0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
   a) Dibuja un **diagrama**. Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(3{,}4)$. (2 pt.)
   b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de $2\ kg$ desde el punto $C(3{,}4)$ hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia $C(3,4)$

$$\vec{u}_1 = \frac{(3,4)-(0,0)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(3,4)-(6,0)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$$



Esperamos un campo más fuerte creado por la masa de 300 kg y que el campo total tenga sentido hacia la derecha y hacia abajo.

Según el principio de superposición $\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$ Campo gravitatorio (forma vectorial) $\left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_1 = -G\frac{100}{5^2}\cdot\left(\frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}\right) = -1{,}6\cdot 10^{-10}\ \vec{\imath} - 2{,}13\cdot 10^{-10}\ \vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = -G\frac{300}{5^2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}\right) = 4{,}8\cdot 10^{-10}\ \vec{\imath} - 6{,}4\cdot 10^{-10}\ \vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 3{,}2\cdot 10^{-10}\ \vec{\imath} - 8{,}5\cdot 10^{-10}\ \vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$ en $C(3,4)$ hacia la derecha y hacia abajo.

b) $\boxed{W_{A\to B} = -m\cdot(V_B - V_A) = -(E_{P_B} - E_{P_A})}$, $m = 2\,kg$, $V_\infty = -G\frac{M}{\infty} = 0$, $E_{P_\infty} = -G\frac{Mm}{\infty} = 0$

Podemos utilizar el método de los potenciales o bien el de las energías potenciales.

Calculemos ahora el potencial: $\boxed{V = \frac{E_P}{m} = -G\frac{M}{r}}$ Potencial gravitatorio (escalar) $\left[\frac{J}{kg}\right]$

$$V_T = V_1 + V_2\ ,\quad V_T = -G\cdot\frac{M}{r} = -G\cdot\left[\frac{100}{5} + \frac{300}{5}\right] \simeq -5{,}34\cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}$$

$$W_{C\to\infty} = -m\cdot(V_\infty - V_C) = -2\,kg\cdot\left(0 - \left(-5{,}34\cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}\right)\right) \simeq -1{,}07\cdot 10^{-8}\ J < 0$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realiza una fuerza externa en contra del campo gravitatorio.

Tiene sentido porque la masa se aleja en contra de la atracción gravitatoria de las otras dos.

3. CUESTIÓN: (**Justificada**) Dado un planeta esférico P, con radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, la relación entre la velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta respecto a la velocidad de escape de dicho objeto desde la superficie de la Tierra es:

a) $v_{eP} = 2 \cdot v_{eT}$ b) $v_{eP} = \frac{1}{2} \cdot v_{eT}$ c) $v_{eP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_{eT}$ (1,5 pt.)

Calculamos primeramente la velocidad de escape.

$E_c + E_p = E_{c\infty} + E_{p\infty}$ (no tenemos en cuenta la E_c)

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = 0 - G\frac{M \cdot m}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r} \Longrightarrow v_e^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r} \Longrightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}}$$

Velocidad de escape (fórmula general)

Como la densidad $\rho = \frac{M}{V} \Longrightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

Además, desde la superficie del planeta $r = R$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{R}} = \sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^2} = R \cdot \sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi}$$

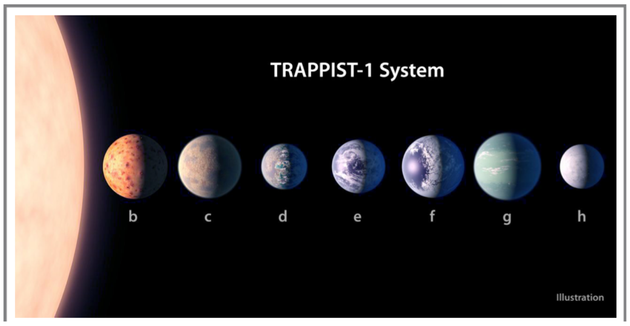
Velocidad de escape desde la superficie

Como ambos planetas tienen la misma densidad, la v_e comparada sólo depende del radio.

$$R_p = \frac{R}{2} \Longrightarrow \frac{v_{ep}}{v_{eT}} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \cancel{\sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi}}}{R \cdot \cancel{\sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi}}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{v_{ep} = \frac{1}{2} v_{eT}}$$

La respuesta correcta es la b

4. CUESTIÓN **Práctica:** El telescopio robótico europeo TRAPPIST descubrió un sistema de 7 **exoplanetas** de tipo terráqueo al que se denominó **TRAPPIST-1** orbitando rápidamente en torno a una estrella enana roja. Calcula la **masa en** kg (y la **incertidumbre**) de **la estrella** a partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de los tres planetas más grandes que lo orbitan (b, c y g: ver tabla adjunta). **¿A cuántas masas solares equivale? Justifica** la fórmula que utilices. (**NO** hay que hacer la gráfica). Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, **Sol** $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$ (2 pt.)



Planeta	T [días]	r $[10^6\ km]$
b	1,51	1,73
c	2,42	2,37
g	12,35	7,01

De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$$

En el movimiento circular $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G\frac{M}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K} \Rightarrow \boxed{T^2 = K \cdot r^3}$$

magnitudes directamente proporcionales

Podemos también calcular la masa de la estrella analíticamente: $\boxed{M_☆ = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2}}$

Pasamos a unidades S.I. $\text{días} \cdot \frac{24\,h}{1\,\text{día}} \cdot \frac{3600\,s}{1\,h}$

b $\Rightarrow$ $T = 130.464\,s$; $r_b = 1{,}73 \cdot 10^9\,m$; $M_☆ = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(1{,}73\cdot10^9)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(130464)^2} \approx 1.800490\times10^{29}\ kg$

c $\Rightarrow$ $T = 209.088\,s$; $r_c = 2{,}37 \cdot 10^9\,m$; $M_☆ = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(2{,}37\cdot10^9)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(209088)^2} \approx 1.802270\times10^{29}\ kg$

g $\Rightarrow$ $T = 1.067.040\,s$; $r_g = 7{,}01 \cdot 10^9\,m$; $M_☆ = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(7{,}01\cdot10^9)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(1067040)^2} \approx 1.790720\times10^{29}\ kg$

La media de la masa estelar, $\overline{M}_☆ = \frac{1{,}800 + 1{,}800 + 1{,}791}{3} \cdot 10^{29} \simeq 1{,}797 \cdot 10^{29}\,kg$ Tomo 3 decimales arbitrariamente

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$

Desviación estándar: cuantifica la incertidumbre de la medida.

$n = 3$

$\sqrt{\frac{1}{3-1}\times\left((1{,}800-1{,}797)^2+(1{,}802-1{,}797)^2+(1{,}791-1{,}797)^2\right)} \approx 0.005916 \simeq 0{,}006 \Rightarrow \sigma \simeq 0{,}006 \cdot 10^{29}\,kg$

La medida se expresa como media ± incertidumbre: $\overline{X} \pm \sigma$,

En nuestro caso $\overline{M}_☆ \pm \sigma = (1{,}797 \pm 0{,}006) \cdot 10^{29}\,kg$

$$\frac{M_☆}{M_\odot} = \frac{1{,}797 \cdot 10^{29}\,kg}{1{,}99 \cdot 10^{30}\,kg} \simeq 0{,}09$$

$M_☆ = 0{,}09 \cdot M_\odot$