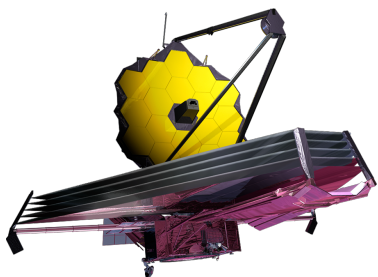


Nombre y apellidos: _____

1. El futuro telescopio espacial **James Webb** (NASA / ESA) de 6500 kg se lanzará hasta una órbita terrestre alta o **High Earth Orbit** (HEO) a $1.000.000$ de kilómetros de la Tierra (radio orbital).

Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ km}$. Calcula:



- La **velocidad orbital** a esa distancia. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.)
- El **período** de la órbita en **días** terrestres. (0,5 pt.)
- La **energía necesaria** de **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
- La **velocidad** de **escape** desde esa **órbita**. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.)

$$v = 630,9 \text{ m/s} \quad E_{\text{necesaria}} \approx 4,05 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

$$T = 115,27 \text{ días} \quad v_e \approx 8,92 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

2. Se lanza un cuerpo **verticalmente** hacia arriba **desde la superficie** de la Luna con una **velocidad** de 500 m/s . Calcula la **altura máxima** que alcanzará sobre la superficie. No hay rozamiento porque la Luna carece de atmósfera.

Datos: $R_L = 1737 \text{ km}$, $g_{0L} = \frac{1}{6} \cdot g_{0T}$ siendo $g_{0T} = 9,81 \text{ m/s}^2$ (2 pt.)

$$h = 80 \text{ km}$$

$$\vec{g}_T = -2,3 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 5,1 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}, \quad v_T = -6,72 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$



Émilie du Châtelet

3. Tenemos una **masa** de 600 kg situada en el punto $A(0,0)$ y otra **masa** de 300 kg situada en $B(14,0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

- Calcula el **vector campo gravitatorio** y el **potencial** en el punto $C(6,6)$. (1,5 pt.)
- Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de 2 kg desde el punto $C(6,6)$ hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (0,5 pt.)

$$W_{C \rightarrow \infty} = -1,344 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

4. CUESTIÓN: (**Justifica** la respuesta) En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:

- Se conserva el **momento angular** y el **momento lineal**.
- Se conserva el **momento lineal** y el **momento de la fuerza** que los une.
- Varía el **momento lineal** y se conserva el **momento angular**.

(0,75 pt.)

5. CUESTIÓN **Práctica**: A partir de las medidas del radio orbital, r , y del período, T , de la Tierra, Marte y Venus que orbitan alrededor del Sol se obtiene la tabla adjunta. Representa estos datos en una **gráfica** de T^2 [días²] frente a r^3 [km³] y determina a partir de los datos la **masa del Sol** (calcula la **media** de los 3 valores que obtienes para los 3 planetas). **Justifica** la fórmula que utilices.

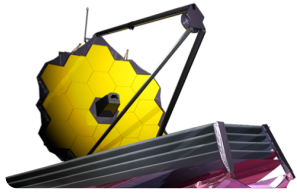
Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ (1,25 pt.)

Satélite	T [días]	r [km]
Tierra	365	$1,5 \cdot 10^8$
Marte	687	$2,28 \cdot 10^8$
Venus	225	$1,08 \cdot 10^8$

$$M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

1. El futuro telescopio espacial **James Webb** (NASA / ESA) de 6500 kg se lanzará hasta una órbita terrestre alta o **High Earth Orbit** (HEO) a $1.000.000$ de kilómetros de la Tierra (radio orbital).

Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ km}$. Calcula:



- La **velocidad orbital** a esa distancia. (Justifica la fórmula) (1 pt.)
- El **período** de la órbita en **días** terrestres. (0,5 pt.)
- La **energía necesaria** de **satelización**. (Justifica la fórmula) (1,5 pt.)
- La **velocidad** de **escape** desde esa **órbita**. (Justifica la fórmula) (1 pt.)

a) Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M , pero a partir de los datos: $g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}}$

El radio orbital $r = 10^6 \text{ km} = 10^9 \text{ m}$, $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81(6,37 \cdot 10^6)^2}{10^9}} \approx 630,919479 \text{ m/s} \approx 630,9 \text{ m/s} \approx 6,31 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

b) $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^9}{630,9} \approx 9959082,750324 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ día}}{24 \text{ h}} \approx 115,27 \text{ días} \approx 1,15 \cdot 10^2 \text{ días}$
 $\approx 9,96 \cdot 10^6 \text{ s}$

c) Calculamos la energía de satelización: $E_{\text{necesaria}} = E_{m_B} - E_{m_A}$ Energía de satelización [J]

$$E_{m_A} + E_{\text{necesaria}} = E_{m_B}$$

$$-G \frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2,$$

En B, está en órbita: $G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2$

$$E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2 + G \frac{Mm}{R_T}$$

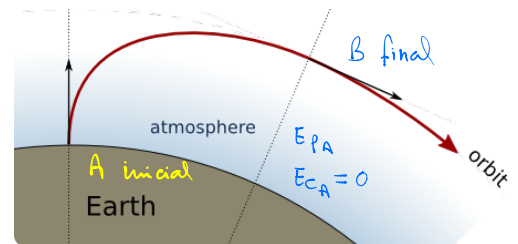
$$E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m G \frac{M}{r} + G \frac{Mm}{R_T}$$

Energía de satelización [J]

$$E_{\text{necesaria}} = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T} \right) = GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) \Rightarrow E_{\text{necesaria}} = GMm \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right),$$

$$G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2, \text{ luego: } E_{\text{necesaria}} = g_0 R_T^2 m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) = 9,81(6,37 \cdot 10^6)^2 \cdot 6500 \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 10^9} \right) \approx 4,048890 \times 10^{11} \text{ J}$$

$E_{\text{necesaria}} \approx 4,05 \cdot 10^{11} \text{ J}$ Como es lógico, la energía de satelización es positiva.



d) $E_e + E_p = E_{c\infty} + E_{p\infty}$ (no tenemos en cuenta la E_c)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{Mm}{r} &= \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G \frac{Mm}{\infty} \\ \frac{1}{2} m v_e^2 &= G \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} g_0 &= G \cdot \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2 \\ v_e &= \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{2 g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81(6,37 \cdot 10^6)^2}{10^9}} \approx 892,254884 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

radio orbital $\nearrow$ Velocidad de escape $v_e \approx 8,92 \cdot 10^2 \text{ m/s}$

2. Se lanza un cuerpo **verticalmente** hacia arriba **desde la superficie** de la Luna con una **velocidad** de 500 m/s . Calcula la **altura máxima** que alcanzará sobre la superficie. No hay rozamiento porque la Luna carece de atmósfera.

Datos: $R_L = 1737 \text{ km}$, $g_{0L} = \frac{1}{6} \cdot g_{0T}$ siendo $g_{0T} = 9,81 \text{ m/s}^2$ (2 pt.)

Resolvemos el problema por la conservación de la energía mecánica.

En la altura máxima (h en el punto B), la velocidad $v_B = 0$. $v_A = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Calculamos g_0 en la Luna. $g_{0L} = \frac{1}{6} \cdot 9,81 \approx 1,635 \text{ m/s}^2$

No conocemos G ni M_L así que $G \cdot M_L = g_{0L} \cdot R_L^2$ siendo $R_L = 1,737 \cdot 10^6 \text{ m}$, $r = R_L + h$

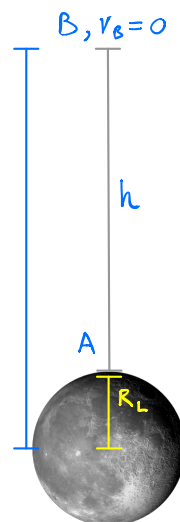
$$E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B},$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{M_L \cdot m}{r_A} = \frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{M_L \cdot m}{r_B} \quad \text{siendo } v_B = 0, r_A = R_L, r_B = r$$

$$\frac{1}{2} v_A^2 - G \frac{M_L}{R_L} = -G \frac{M_L}{r} \Rightarrow r = \frac{G \cdot M_L}{G \frac{M_L}{R_L} - \frac{1}{2} v_A^2} = \frac{g_{0L} \cdot R_L^2}{\frac{g_{0L} \cdot R_L^2}{R_L} - \frac{1}{2} v_A^2}$$

$$r = \frac{g_{0L} \cdot R_L^2}{g_{0L} \cdot R_L - \frac{1}{2} v_A^2} = \frac{1,635 \cdot (1,737 \cdot 10^6)^2}{1,635 \cdot 1,737 \cdot 10^6 - \frac{1}{2} \cdot 500^2} \approx 1816972.522970 \text{ m} \approx 1816973 \text{ m} \approx 1,817 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = r - R_L = 1,817 \cdot 10^6 \text{ m} - 1,737 \cdot 10^6 \text{ m} = 8 \cdot 10^4 \text{ m} = 80 \text{ km}$$



3. Tenemos una **masa** de 600 kg situada en el punto $A(0,0)$ y otra **masa** de 300 kg situada en $B(14,0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

a) Calcula el **vector campo gravitatorio** y el **potencial** en el punto $C(6,6)$. (1,5 pt.)

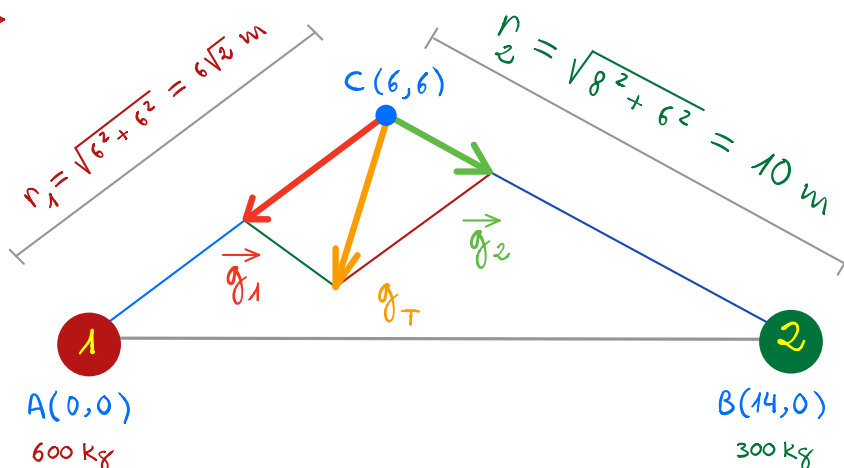
b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de 2 kg desde el punto $C(6,6)$ hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (0,5 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia $C(6,6)$

$$\vec{u}_1 = \frac{(6,6) - (0,0)}{\sqrt{6^2 + 6^2}} = \left(\frac{6}{6\sqrt{2}}, \frac{6}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(6,6) - (14,0)}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \left(\frac{-8}{10}, \frac{6}{10} \right) = -\frac{4}{5} \vec{i} + \frac{3}{5} \vec{j}$$

Esperamos un campo más fuerte creado por la masa de 600 kg y que el campo total tenga sentido hacia la izquierda y hacia abajo.



Según el principio de superposición

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \quad \text{Campo gravitatorio (forma vectorial)} \quad \left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{g}_1 = -G \frac{m_1}{r_1^2} \vec{u}_1 = -G \frac{600}{(6\sqrt{2})^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} \right) = -3,9 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 3,9 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G \frac{m_2}{r_2^2} \vec{u}_2 = -G \frac{300}{10^2} \cdot \left(-\frac{4}{5} \vec{i} + \frac{3}{5} \vec{j} \right) = +1,6 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 1,2 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -3,3 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 5,1 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{N}{kg} \quad \text{en } C(6,6)$$

$$|\vec{g}_T| = \sqrt{g_{Tx}^2 + g_{Ty}^2} = \sqrt{(2,3 \cdot 10^{-10})^2 + (5,1 \cdot 10^{-10})^2} \approx 5,594640 \times 10^{-10} \frac{N}{kg} \approx 5,6 \cdot 10^{-10} \frac{N}{kg}$$

Calculemos ahora el potencial: $V = \frac{E_p}{m} = -G \frac{M}{r}$ Potencial gravitatorio (escalar) $\left[\frac{J}{kg} \right]$

$$V_T = V_1 + V_2, \quad V_T = -G \cdot \frac{M}{r} = -G \cdot \left[\frac{600}{6\sqrt{2}} + \frac{300}{10} \right] \approx -6,72 \cdot 10^{-9} \frac{J}{kg}$$

b) $W_{A \rightarrow B} = -m \cdot (V_B - V_A)$, $m = 2kg$, $V_\infty = -G \frac{M}{\infty} = 0$

$$W_{c \rightarrow \infty} = -m \cdot (V_\infty - V_c) = -2kg \cdot (0 - (-6,72 \cdot 10^{-9} \frac{J}{kg})) \approx -1,344 \cdot 10^{-8} J$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realiza una fuerza en contra del campo gravitatorio.

Tiene sentido porque la masa se aleja en contra de la atracción gravitatoria de las otras dos.

4. CUESTIÓN: (Justifica la respuesta) En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:

- a) Se conserva el **momento angular** y el **momento lineal**.
- b) Se conserva el **momento lineal** y el **momento de la fuerza** que los une.
- c) Varía el **momento lineal** y se conserva el **momento angular**.

(0,75 pt.)

Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

Si la órbita es circular, no varía el módulo de la velocidad, pero sí la dirección y por eso hay a_c .

Si la órbita es elíptica, varían tanto el módulo como la dirección. El momento lineal siempre varía.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

El momento de la fuerza es la variación del momento angular con respecto del tiempo.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \text{ si } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$$

Principio de conservación del momento angular

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta \quad \text{Módulo } (\theta = \text{ángulo que forman})$$

$\vec{M} = 0$ no sólo cuando r o F son nulos sino también cuando $\sin \theta = 0$, es decir, $\vec{r} \parallel \vec{F}$.

En el caso de la gravedad $\theta = 180^\circ$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$; Se conserva. $\vec{L} = |\vec{r} \times \vec{p}| = cte$

Luego, la única opción verdadera es la ©

5. CUESTIÓN **Práctica**: A partir de las medidas del radio orbital, r , y del periodo, T , de la Tierra, Marte y Venus que orbitan alrededor del Sol se obtiene la tabla adjunta. Representa estos datos en una **gráfica** de T^2 [días²] frente a r^3 [km³] y determina a partir de los datos la **masa del Sol** (calcula la **media** de los 3 valores que obtienes para los 3 planetas). **Justifica** la fórmula que utilices.
Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ (1,25 pt.)

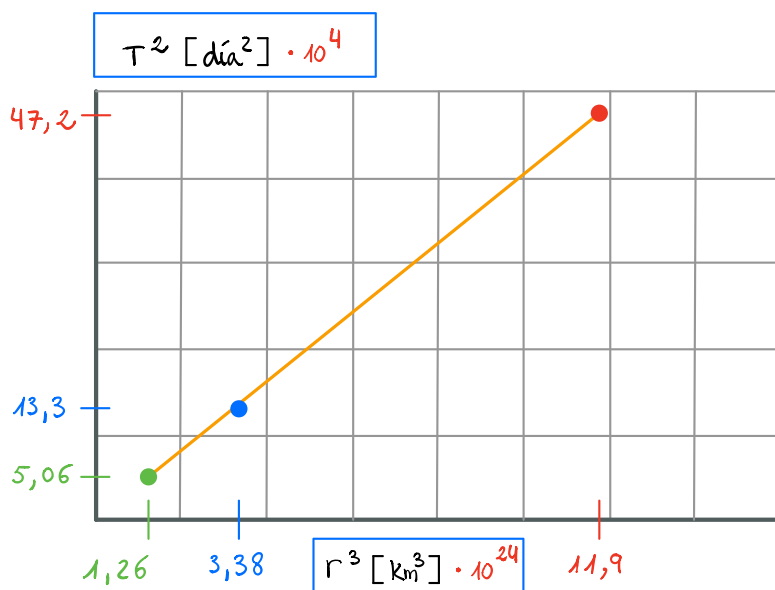
Satélite	T [días]	r [km]
Tierra	365	$1,5 \cdot 10^8$
Marte	687	$2,28 \cdot 10^8$
Venus	225	$1,08 \cdot 10^8$

De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{En el movimiento circular } v = \frac{2\pi r}{T} \end{array} \right\} G \frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$G \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K \Rightarrow T^2 = K \cdot r^3 \quad \text{magnitudes directamente proporcionales}$$

Si representamos gráficamente T^2 frente a r^3 , obtendríamos una recta cuya pendiente es K .



	T^2 [día ²]	r^3 [km ³]
Tierra	$133225 \approx 13,3 \cdot 10^4$	$3,38 \cdot 10^{24}$
Marte	$471969 \approx 47,2 \cdot 10^4$	$11,9 \cdot 10^{24}$
Venus	$50625 \approx 5,06 \cdot 10^4$	$1,26 \cdot 10^{24}$

Satélite	T [días]	r [km]
Tierra	365	$1,5 \cdot 10^8$
Marte	687	$2,28 \cdot 10^8$
Venus	225	$1,08 \cdot 10^8$

La masa del Sol es $M_{\odot} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$, Pasamos a unidades S.I.

Con los datos de : Tierra $M_{\odot} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2,008610 \times 10^{30} \text{ Kg}$

Con los datos de : Marte $M_{\odot} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (2,28 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (687 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 1,991120 \times 10^{30} \text{ Kg}$

Con los datos de : Venus $M_{\odot} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1,08 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (225 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 1,972930 \times 10^{30} \text{ Kg}$

La media de la masa del Sol $M_{\odot} = \frac{2,0086 + 1,9911 + 1,9729}{3} \cdot 10^{30} \text{ Kg} = 1,9909 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$

$$M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$$