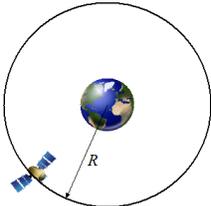


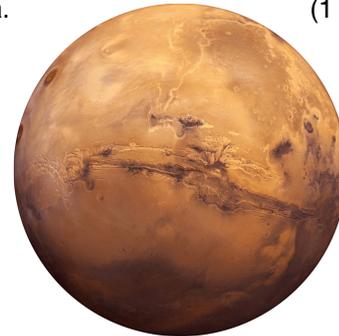
Nombre y apellidos: _____

1. Se pretende situar un satélite artificial de **100 kg** en una **órbita** circular a **2000 km** de **altura sobre la superficie** terrestre. Calcula:



- a) La **velocidad** que ha de poseer el satélite para girar en esa **órbita**.
(Justifica la fórmula de la **velocidad orbital**) (1 pt.) $6,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
- b) El **período** de la órbita. (0,5 pt.) $7622 \text{ s} \approx 2,12 \text{ h}$
- c) La **energía** que fue **preciso** comunicarle para situarlo a esa **altura**. (1,5 pt.) $3,9 \cdot 10^9 \text{ J}$
- d) La **velocidad de escape desde esa órbita**. (1 pt.) $9,8 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

Datos: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$



2. La **masa de Marte** es **1 / 10** parte de la **masa de la Tierra**, y su **radio** es **1 / 2** del **radio terrestre**. ¿Cuál es el valor de **g** en la **superficie de Marte**? Dato: $g_{0T} = 9,81 \text{ m/s}^2$ (1,5 pt.)

$$3,9 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

3. CUESTIÓN: Dos satélites de comunicaciones **A** y **B** con **diferentes masas** ($m_A > m_B$) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de **diferente radio** siendo $r_A < r_B$: (1,5 pt.)

- a) **B** tiene **menor período orbital** *Es falsa*
- b) **A** gira con **mayor velocidad lineal** *Es verdadera*
- c) Los **dos** tienen la **misma energía mecánica** *Es falsa*

Justifica bien la respuesta verdadera y por qué las otras dos opciones son falsas.

4. Tenemos una **masa de 3 kg** situada en el **punto (0,0)** y otra **masa de 30 kg** situada en **(10,0)** medidos en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

- a) Calcula el **vector** y **módulo** del **campo gravitatorio** en el punto **(5,12)**. (1,5 pt.)
- b) Calcula el **vector** y **módulo** de la **fuerza** ejercida sobre una masa de **2 kg** situada en el punto **(5,12)**. $8,2 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 2,4 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}$, $2,54 \cdot 10^{-11} \text{ N}$ (0,5 pt.)
- c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** la misma masa de **2 kg** desde el punto **(5,12)** hasta el **infinito**. Interpreta el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

$$\vec{g}_T = 4,1 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}, \quad |\vec{g}_T| = 1,27 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}}, \quad -3,36 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$



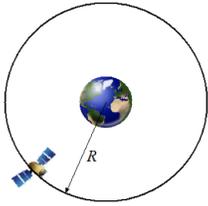
Isaac Newton

COMPLEMENTARIO

Se lanza un cuerpo **verticalmente** hacia arriba **desde la superficie** de la Tierra con una **velocidad** de **4000 m/s**. Calcula la **altura máxima** que alcanzará. Despreciamos el rozamiento con la atmósfera. Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ km}$ (1,5 pt.)

$$h \approx 9,4 \cdot 10^5 \text{ m}$$

1. Se pretende situar un satélite artificial de **100 kg** en una **órbita** circular a **2000 km** de **altura sobre la superficie** terrestre. Calcula:



- a) La **velocidad** que ha de poseer el satélite para girar en esa **órbita**. (Justifica la fórmula de la **velocidad orbital**) (1 pt.)
 b) El **período** de la órbita. (0,5 pt.)
 c) La **energía** que fue **preciso** comunicarle para situarlo a esa **altura**. (1,5 pt.)
 d) La **velocidad de escape** desde esa **órbita**. (1 pt.)

Datos: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$

a) Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M , pero a partir de los datos: $g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0 \cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}}$

El radio orbital $r = R_T + h = 6370 \text{ km} + 2000 \text{ km} = 8370 \text{ km} = 8,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$$v = \sqrt{\frac{9,81 \times (6370 \times 10^3)^2}{(6370 + 2000) \times 10^3}} \approx 6896,221577 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 6,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) El período orbital se deduce de $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times \pi \times 8,37 \times 10^6}{6,9 \times 10^3} \approx 7621,776960 \text{ s} \approx 7622 \text{ s} \approx 2,12 \text{ h}$

c) Calculemos la energía de satelización: $E_{\text{necesaria}} = E_{m_B} - E_{m_A}$

$$-G \frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2 \quad r = R_T + h$$

En B, está en órbita: $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2$

$$E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2 + G \frac{Mm}{R_T} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m G \frac{M}{r} + G \frac{Mm}{R_T}$$

$$E_{\text{necesaria}} = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T} \right) = GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right), \quad r = R_T + h; \quad \text{como } GM = g_0 R_T^2$$

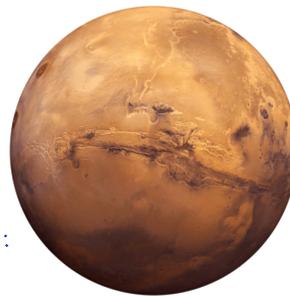
$$E_{\text{necesaria}} = g_0 R_T^2 m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) \quad \text{Energía de satelización; Masa del satélite: } m = 100 \text{ kg}$$

$$E_{\text{necesaria}} = 9,81 \times (6370 \times 10^3)^2 \times 100 \times \left(\frac{1}{6370 \times 10^3} - \frac{1}{2 \times 8370 \times 10^3} \right) = 3871076397,849462 \text{ J} \approx 3,9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

d) $\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{Mm}{r} &= \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G \frac{Mm}{\infty} \\ \frac{1}{2} m v_e^2 &= G \frac{Mm}{r} \end{aligned} \right\} v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{r}} \quad \text{Velocidad de escape}$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times (6370 \times 10^3)^2}{8370 \times 10^3}} \approx 9752,730084 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 9,8 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

2. La **masa** de **Marte** es **1 / 10** parte de la **masa** de la **Tierra**, y su **radio** es **1 / 2** del **radio terrestre**. ¿Cuál es el valor de **g** en la **superficie de Marte**? Dato: $g_{OT} = 9,81 \text{ m/s}^2$ (1,5 pt.)



$$M_m = \frac{M_T}{10}, R_m = \frac{1}{2} \cdot R_T$$

Los campos gravitatorios de la Tierra y Marte en su superficie son:

$$g_{OT} = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$g_{om} = G \frac{M_m}{R_m^2} = G \frac{\left(\frac{M_T}{10}\right)}{\left(\frac{1}{2} R_T\right)^2} = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot G \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{4}{10} \cdot g_{OT} = \frac{4}{10} \times 9,81 = 3,924 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, g_{om} \approx 3,9 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

3. CUESTIÓN: Dos satélites de comunicaciones **A** y **B** con **diferentes masas** ($m_A > m_B$) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de **diferente radio** siendo $r_A < r_B$: (1,5 pt.)

- B** tiene **menor período orbital**
- A** gira con **mayor velocidad lineal**
- Los **dos** tienen la **misma energía mecánica**

Justifica bien la respuesta **verdadera** y **por qué** las **otras dos opciones** son **falsas**.

- a) Por la 3ª ley de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$, luego si $r_A < r_B \Rightarrow T_A < T_B$. Es falsa.

2º método: $T = \frac{2\pi r}{v}$, radio menor y velocidad mayor $\Rightarrow T_A < T_B$, pero hace falta justificar que $v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

- b) El momento angular $\vec{L} = \text{cte} \Rightarrow \vec{r} \times m\vec{v} = \text{cte}$, luego si $r_A < r_B \Rightarrow v_A > v_B$. Es verdadera.

2º método: $F_g = F_c \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$, luego si $r_A < r_B \Rightarrow v_A > v_B$. Es verdadera.

- c) $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$, $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow m v^2 = G \frac{Mm}{r}$, sustituyendo

$$E_m = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} - G \frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r}, \text{ luego si } r_A < r_B \Rightarrow E_{m_A} < E_{m_B}. \text{ Es falsa.}$$

Como $m_A > m_B$ refuerza el efecto. Si $m_A < m_B$ podría pasar cualquier cosa.

4. Tenemos una **masa de 3 kg** situada en el **punto (0,0)** y otra **masa de 30 kg** situada en **(10,0)** medidos en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

a) Calcula el **vector** y **módulo** del **campo gravitatorio** en el punto **(5,12)**. (1,5 pt.)

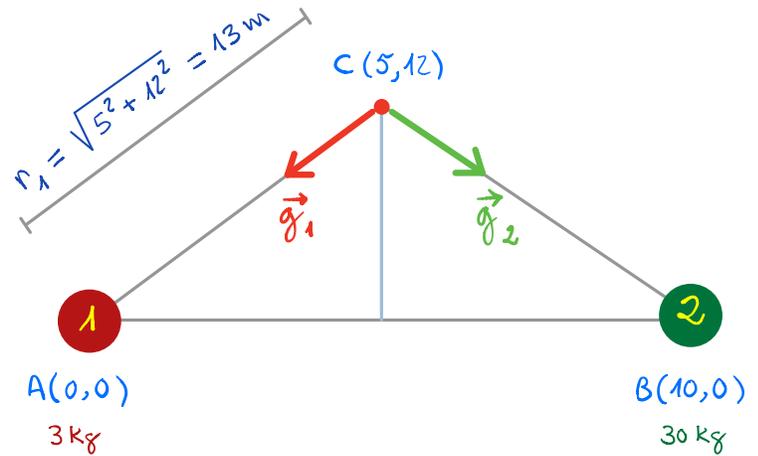
b) Calcula el **vector** y **módulo** de la **fuerza** ejercida sobre una masa de **2 kg** situada en el punto **(5,12)**. (0,5 pt.)

c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** la misma masa de **2 kg** desde el punto **(5,12)** hasta el **infinito**. **Interpreta el signo del trabajo**. (1 pt.)

Calculamos primero los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{(5,12)-(0,0)}{\sqrt{5^2+12^2}} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right) = \frac{5}{13} \vec{i} + \frac{12}{13} \vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(5,12)-(10,0)}{\sqrt{5^2+12^2}} = \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right) = -\frac{5}{13} \vec{i} + \frac{12}{13} \vec{j}$$



a) Según el principio de superposición $\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$

$$\vec{g}_1 = -G \frac{m_1}{r_1^2} \vec{u}_1 = -G \frac{3}{13^2} \left(\frac{5}{13} \vec{i} + \frac{12}{13} \vec{j} \right) = -4,55 \cdot 10^{-13} \vec{i} - 1,09 \cdot 10^{-12} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -G \frac{m_2}{r_2^2} \vec{u}_2 = -G \frac{30}{13^2} \left(-\frac{5}{13} \vec{i} + \frac{12}{13} \vec{j} \right) = +4,55 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,09 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 4,1 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$|\vec{g}_T| = \sqrt{g_{Tx}^2 + g_{Ty}^2} = \sqrt{(4,1 \cdot 10^{-12})^2 + (1,2 \cdot 10^{-11})^2} \approx 1,268110 \times 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 1,27 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

b) $\vec{F} = m\vec{g}$, $m = 2 \text{ kg} \Rightarrow$

$$\vec{F}_T = 2 \text{ kg} \cdot (4,1 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}) = 8,2 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 2,4 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}$$

$$|\vec{F}_T| = 2 \text{ kg} \cdot 1,27 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 2,54 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

c) $W = \Delta E_c = -\Delta E_p$ $W_{C \rightarrow \infty} = -(E_{p\infty} - E_{pC})$

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}, \text{ luego } E_{p\infty} = 0$$

$$E_{pC}(1) = -G \frac{3 \cdot 2}{13}, E_{pC}(2) = -G \frac{30 \cdot 2}{13} \Rightarrow E_{pC} = E_{pC}(1) + E_{pC}(2) = -G \frac{66}{13} = -6,61 \times 10^{-11} \times \frac{66}{13} \approx -3,355850 \times 10^{-10} \text{ J}$$

$$W_{C \rightarrow \infty} = -(0 - (-3,36 \cdot 10^{-10} \text{ J})) = -3,36 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realizamos en contra del campo gravitatorio.

Tiene sentido porque estamos alejando la masa en contra de la atracción gravitatoria de las otras dos.



COMPLEMENTARIO

Se lanza un cuerpo **verticalmente** hacia arriba **desde la superficie** de la Tierra con una **velocidad** de **4000 m/s**. Calcula la **altura máxima** que alcanzará. Despreciamos el rozamiento con la atmósfera. Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ km}$ (1,5 pt.)

Isaac Newton

Resolvemos el problema por conservación de la energía.

$E_{m_A} = E_{m_B}$. En la altura máxima (h en el punto B), la velocidad $v_B = 0$. $r = R_T + h$

$$-G \frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m v_A^2 = -G \frac{M_T m}{R_T + h} + \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_A^2 = 2 \cdot G M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2 \quad (\text{sustituimos})$$

$$v_A^2 = 2 \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right) = 2 \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{R_T + h - R_T}{R_T \cdot (R_T + h)} \right) = 2 \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot \frac{h}{R_T^2 + h \cdot R_T}$$

$$v_A^2 R_T^2 + v_A^2 h R_T = 2 g_0 R_T^2 h \Rightarrow$$

$$h = \frac{v_A^2 R_T}{2 g_0 R_T - v_A^2} = \frac{4000^2 \times 6370 \times 10^3}{2 \times 9,8 \times 6370 \times 10^3 - 4000^2} \approx 936317.201338 \text{ m}$$

$$h \approx 9,4 \cdot 10^5 \text{ m}$$

2º método. Alternativamente podemos despejar primero $r = R_T + h$ y finalmente calcular $h = r - R_T$

