Nombre y apellidos: ____

1. Se desea situar un satélite artificial de navegación de la serie GALILEO, con una masa de **700 kg**, en una **órbita circular intermedia** (MEO) a una **altura** de **16000 km sobre** la **superficie** terrestre.
   Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s^2 Calcula:

   a) La **velocidad orbital** a esa altura. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.) $4,2 \cdot 10^3$ m/s
   b) El **período** de la órbita en segundos y en horas. 33510 s $\simeq$ 9,31 h (0,5 pt.)
   c) La **energía necesaria** de **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.) $3,75 \cdot 10^{10}$ J
   d) La **velocidad** de **escape desde** esa **órbita**. $5,96 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$ (1 pt.)

2. Tenemos una **masa** de **5 kg** situada en el punto $A(-3,0)$ y otra **masa** de **10 kg** situada en $B(3,0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: G = 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2
   a) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(0,4)$. $8 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 3,2 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$ (1,5 pt.)
   b) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $D(0,0)$. $3,71 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ \frac{N}{kg}$ (0,5 pt.)
   c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de **2 kg** desde el punto $C(0,4)$ hasta el punto $D(0,0)$. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. $2,67 \cdot 10^{-10}$ J (1 pt.)

3. Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas **órbitas** tienen **radios** de **9400** y **23000 km**, respectivamente. Fobos tarda **7,7 h** en dar una vuelta alrededor del planeta. Halla el **período** de Deimos en horas. 29,5 h (1 pt.)

4. CUESTIÓN: Señala cuál de las siguientes afirmaciones acerca de la **conservación del momento angular** de una partícula es **falsa** (**Justifica** la respuesta): (1 pt.)
   a) Si el momento angular se conserva, el **movimiento** es **plano**.
   b) El momento angular se conserva únicamente si la **fuerza total** es **nula**.
   c) El momento angular se conserva si la **fuerza total** es un **campo central**.

5. CUESTIÓN: Si un satélite artificial describe **órbitas circulares** alrededor de la Tierra, justifica cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta** respecto a su **energía mecánica** E_m y sus **velocidades orbital** v y de **escape** v_e : (1 pt.)

   a) $E_m < 0$ y $v > v_e$ b) $E_m > 0$ y $v > v_e$
   c) $E_m < 0$ y $v < v_e$ d) $E_m > 0$ y $v < v_e$

COMPLEMENTARIO

Isaac Newton

La intensidad de la gravedad en la superficie de la Tierra de radio R_T vale g_0. En un punto A, fuera del planeta, esa intensidad vale $g_A = g_0/2$, mientras que en un punto B, más alejado que A, vale $g_B = g_0/4$. Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s^2 Calcula:

a) Las distancias desde los puntos A y B al centro de la Tierra. (0,5 pt.)
b) La velocidad con que debe lanzarse un satélite situado en una órbita circular a la distancia del punto A para situarlo en una órbita a la distancia del punto B.
(Justifica la fórmula utilizada) (1 pt.)

$$\left.\begin{array}{l} r_A = 9 \cdot 10^6\ m \\ r_B = 1,27 \cdot 10^7\ m \end{array}\right\} v_n \simeq 3590\ m/s = 3,59 \cdot 10^3\ m/s$$

1. Se desea situar un satélite artificial de navegación de la serie GALILEO, con una masa de **700 kg**, en una **órbita circular intermedia** (MEO) a una **altura** de **16000 km sobre** la **superficie** terrestre.
Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s² Calcula:

a) La **velocidad orbital** a esa altura. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.)
b) El **período** de la órbita en segundos y en horas. (0,5 pt.)
c) La **energía necesaria** de **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
d) La **velocidad** de **escape desde** esa **órbita**. (1 pt.)

a) Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M, pero a partir de los datos: $g_0 = G\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G\cdot M = g_0 \cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{r}}$

El radio orbital $r = R_T + h = 6370\text{ km} + 16000\text{ km} = 22370\text{ km} \simeq 2,24\cdot 10^7\text{ m}$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2}{2{,}24\cdot 10^7}} \approx 4215.508088\ \frac{m}{s} \simeq 4,2\cdot 10^3\text{ m/s}$$

b) El período orbital se deduce de $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\cdot\pi\cdot 2{,}24\cdot 10^7}{4{,}2\cdot 10^3} \approx 33510.321638\text{ s} \simeq 33510\text{ s} \simeq 9{,}31\text{ h}$

c) Calculemos la energía de satelización: $\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$

$$-G\frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \qquad r = R_T + h$$

En B, está en órbita: $G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

$$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{Mm}{R_T} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{r} + G\frac{Mm}{R_T}$$

$E_{necesaria} = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$, $r = R_T + h$; como $GM = g_0 R_T^2$

$\boxed{E_{necesaria} = g_0 R_T^2 m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)}$ Energía de satelización ; Masa del satélite: $m = 700$ kg

$$E_{necesaria} = 9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2\cdot 700\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6} - \frac{1}{2\cdot 2{,}24\cdot 10^7}\right) \approx 3.752310\times 10^{10}\text{ J} \simeq 3{,}75\cdot 10^{10}\text{ J}$$

b) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} = \underbrace{\frac{1}{2}m\cdot 0^2}_{0} - \underbrace{G\frac{Mm}{\infty}}_{0} \\ \frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2 = G\frac{M\cancel{m}}{r}\end{array}\right\} v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2g_0\cdot R_T^2}{r}}$ Velocidad de escape

radio orbital

$$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2}{2{,}24\cdot 10^7}} \approx 5961.628710\ \frac{m}{s} \simeq 5{,}96\cdot 10^3\ \frac{m}{s} = 5{,}96\ \frac{km}{s}$$

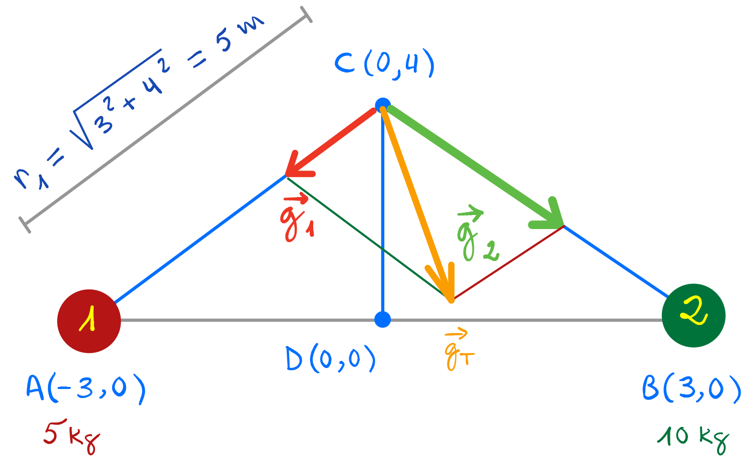
2. Tenemos una **masa** de **5 kg** situada en el punto $A(-3{,}0)$ y otra **masa** de **10 kg** situada en $B(3{,}0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: G = 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2

a) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(0{,}4)$. (1,5 pt.)

b) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $D(0{,}0)$. (0,5 pt.)

c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de **2 kg** desde el punto $C(0{,}4)$ hasta el punto $D(0{,}0)$. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia C(0,4)



$$\vec{u}_1 = \frac{(0,4)-(-3,0)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(0,4)-(3,0)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

$r_1 = r_2 = 5$ m

Según el principio de superposición $\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_1 = -G\frac{5}{5^2}\left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) = -8\cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 1{,}07\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = -G\frac{10}{5^2}\left(-\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) = +1{,}6\cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 2{,}13\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 8\cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 3{,}2\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg} \quad \text{en } C(0,4)$$

$$|\vec{g}_T| = \sqrt{g_{Tx}^2 + g_{Ty}^2} = \sqrt{(8\cdot 10^{-12})^2 + (3{,}2\times 10^{-11})^2} \approx 3.298480\times 10^{-11}\ \frac{N}{kg} \simeq 3{,}3\cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg}$$

b) Calculamos primero los vectores unitarios hacia D(0,0) $\vec{u}_1 = \vec{i}$, $\vec{u}_2 = -\vec{i}$, $r_1 = r_2 = 3$ m

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G\frac{5}{3^2}\vec{i} - G\frac{10}{3^2}(-\vec{i}) = \frac{-G}{3^2}(5-10)\vec{i} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5}{3^2} \approx 3.705560\times 10^{-11}\ \vec{i}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_T \simeq 3{,}71\cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ \frac{N}{kg} \quad \text{en } D(0,0), \quad |\vec{g}_T| = 3{,}71\cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg}$$

c) $\boxed{W = \Delta E_c = -\Delta E_p}$ $\quad W_{C\to D} = -(E_{p_D} - E_{p_C})$, $m = 2$ kg

$$E_{p_C} = E_{p_C}(1) + E_{p_C}(2) = -G\frac{5\cdot 2}{5} - G\frac{10\cdot 2}{5} = -G\cdot\frac{30}{5} = -G\cdot 6 \simeq -4\cdot 10^{-10}\ J$$

$$E_{p_D} = E_{p_D}(1) + E_{p_D}(2) = -G\frac{5\cdot 2}{3} - G\frac{10\cdot 2}{3} = -G\cdot\frac{30}{3} = -G\cdot 10 = -6{,}67\cdot 10^{-10}\ J$$

$$W_{C\to D} = -(E_{p_D} - E_{p_C}) = -(-6{,}67\cdot 10^{-10}\ J + 4\cdot 10^{-10}\ J) = +2{,}67\cdot 10^{-10}\ J$$

$W_g > 0$ El trabajo lo realiza el campo gravitatorio.

Tiene sentido porque la masa se acerca a favor de la atracción gravitatoria de las otras dos.

3. Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas **órbitas** tienen **radios** de **9400** y **23000 km**, respectivamente. Fobos tarda **7,7 h** en dar una vuelta alrededor del planeta. Halla el **período** de Deimos en horas. (1 pt.)

$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte}$ 3ª ley de Kepler $\Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$

Fobos ≡ 1 $\quad T_1 = 7{,}7\,h \quad r_1 = 9400\ Km$

Deimos ≡ 2 $\quad T_2 = ? \quad r_2 = 23000\ Km$

$$T_2^2 = \frac{T_1^2}{r_1^3} \cdot r_2^3 \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2}{r_1^3} \cdot r_2^3} = \sqrt{\frac{7{,}7^2}{9400^3} \cdot 23000^3} \approx 29.470717\ h \simeq 29{,}5\,h \simeq 106200\ s$$

4. CUESTIÓN: Señala cuál de las siguientes afirmaciones acerca de la **conservación del momento angular** de una partícula es **falsa** (**Justifica** la respuesta): (1 pt.)

a) Si el momento angular se conserva, el **movimiento** es **plano**.

b) El momento angular se conserva únicamente si la **fuerza total** es **nula**.

c) El momento angular se conserva si la **fuerza total** es un **campo central**.

En una fuerza central el radio vector y la fuerza son paralelos.

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$ El momento de la fuerza es la variación del momento angular con respecto del tiempo.

$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},\ si\ \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte}$ Principio de conservación del momento angular

$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot sen\,\theta$ Módulo (θ = ángulo que forman)

$\vec{M} = 0$ no sólo cuando r o F son nulos sino también cuando $sen\,\theta = 0$, es decir, $\vec{r} \parallel \vec{F}$.

En el caso de la gravedad $\theta = 180°$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$; Se conserva.

La opción b es la falsa. El momento angular se conserva aunque la fuerza no sea nula.

5. CUESTIÓN: Si un satélite artificial describe **órbitas circulares** alrededor de la Tierra, justifica cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta** respecto a su **energía mecánica** E_m y sus **velocidades orbital** v y de **escape** v_e : (1 pt.)

a) $E_m < 0$ y $v > v_e$ b) $E_m > 0$ y $v > v_e$

c) $E_m < 0$ y $v < v_e$ d) $E_m > 0$ y $v < v_e$

La energía mecánica $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$

Si la masa está en órbita $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^{\cancel{2}}} = m \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow m v^2 = G \frac{Mm}{r}$

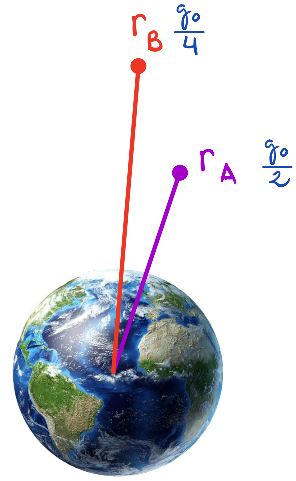
$\Bigg\}\ E_m = -\frac{1}{2} \cdot G \frac{Mm}{r} < 0$

Luego $E_m < 0$ y puesto que el satélite está en órbita $V < V_e$. Podemos comparar:

$v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$ y $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$; obviamente $\sqrt{G \frac{M}{r}} < \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

La respuesta correcta es c.

COMPLEMENTARIO



La intensidad de la gravedad en la superficie de la Tierra de radio R_T vale g_0. En un punto A, fuera del planeta, esa intensidad vale $g_A = g_0/2$, mientras que en un punto B, más alejado que A, vale $g_B = g_0/4$. Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s² Calcula:

a) Las distancias desde los puntos A y B al centro de la Tierra. (0,5 pt.)

b) La velocidad con que debe lanzarse un satélite situado en una órbita circular a la distancia del punto A para situarlo en una órbita a la distancia del punto B.
(Justifica la fórmula utilizada) (1 pt.)

a) $g_A = \frac{g_0}{2} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_A^2} = \frac{1}{2}\cdot G\frac{M_T}{R_T^2}$

Luego $r_A^2 = 2\cdot R_T^2 \Rightarrow r_A = \sqrt{2}\cdot R_T = \sqrt{2}\cdot 6{,}37\cdot 10^6 \simeq 9\cdot 10^6$ m

$g_B = \frac{g_0}{4} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_B^2} = \frac{1}{4}\cdot G\frac{M_T}{R_T^2}$

Luego $r_B^2 = 4\cdot R_T^2 \Rightarrow r_B = \sqrt{4}\cdot R_T = 2\cdot 6{,}37\cdot 10^6 \simeq 1{,}27\cdot 10^7$ m

b) $E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B} \Rightarrow \boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$

$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{r_B}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A}\right)$$

$F_{c_B} = F_{g_B} \Rightarrow G\frac{M}{r_B} = v_B^2 \qquad F_{c_A} = F_{g_A} \Rightarrow G\frac{M}{r_A} = v_A^2$

$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_B}\right) - \left(\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_A} - G\frac{Mm}{r_A}\right)$$

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_B} + \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_A}$$

$$\boxed{E_{necesaria} = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$ Energía de transferencia orbital

No conocemos ni G ni la masa de la Tierra. $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G\cdot M_T = g_0\cdot R_T^2$

$E_{necesaria} = \frac{g_0 R_T^2 m}{2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$ Además $E_{necesaria} = \frac{1}{2}mv_n^2 \leftarrow$ Ésta es la velocidad pedida

$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_n^2 = \frac{g_0 R_T^2 \cancel{m}}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \Rightarrow \boxed{v_n = R_T\cdot\sqrt{g_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}}$ Velocidad de transferencia orbital

No conocemos la masa del satélite, pero se simplifica

$$v_n = 6{,}37\cdot 10^6\cdot\sqrt{9{,}81\left(\frac{1}{9\cdot 10^6} - \frac{1}{1{,}27\cdot 10^7}\right)} \approx 3589.646504 \text{ m/s}$$

$v_n \simeq 3590$ m/s $= 3{,}59\cdot 10^3$ m/s