Universidad de Castilla La Mancha – Septiembre – 2014

Opción A

Problema 1.- Un satélite de masa $1.08\cdot10^{20}$ kg describe una órbita circular alrededor de un planeta gigante de masa $5.69\cdot10^{26}$ kg. El periodo orbital del satélite es de 32 horas y 53 minutos.

a) Si la velocidad de escape desde la superficie del satélite es 239 m/s, calcular su radio en km.
b) Calcular hasta qué altura sobre la superficie del satélite subirá un objeto lanzado verticalmente a 50 m/s.
c) Calcular en km/s la velocidad del satélite en su órbita alrededor del planeta gigante.

Constante de gravitación $6.67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$.

Cuando un cuerpo alcanza la velocidad de escape, su energía es cero, es decir, un cuerpo con energía cero abandonará un campo gravitatorio:

$$E_\infty = E_{Sup.} + E_C \rightarrow 0 = -G\frac{M_S\, m}{R_S} + \frac{1}{2} m\, v_e^2 \rightarrow G\frac{M_S\, m}{R_S} = \frac{1}{2} m\, v_e^2 \rightarrow R_S = \frac{2\, G M_S}{v_e^2} = \frac{2\cdot 6.67\cdot10^{-11}\cdot 1.08\cdot10^{20}}{(239)^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{R_S = 2.52\cdot10^5\ m = 252\ km}$$

La energía cinética del objeto lanzado desde la superficie del satélite será:

$$E_C = \frac{1}{2} m\, v_e^2 = \frac{1}{2} m\, 50^2 \rightarrow \mathbf{E_C = 1250\ m\ Jul}$$

El objeto subirá hasta que toda su energía cinética se convierta en energía potencial, momento a partir del cual comenzará a descender:

$$E_C = E_{P.altura} - E_{P.Sup.} \rightarrow E_C = -G\frac{M_S\, m}{R_S + h} - \left(-G\frac{M_S\, m}{R_S}\right) \rightarrow E_C = -G\, M_S\, m\left(\frac{1}{R_S + h} - \frac{1}{R_S}\right)$$

$$\rightarrow 1250\ m = -6.67\cdot10^{-11}\cdot 1.08\cdot10^{20}\ m\left(\frac{1}{2.52\cdot10^5 + h} - \frac{1}{2.52\cdot10^5}\right) \rightarrow -1.73\cdot10^{-7} = \frac{1}{2.52\cdot10^5 + h} - \frac{1}{2.52\cdot10^5}$$

$$\rightarrow 3.794\cdot10^{-6} = \frac{1}{2.52\cdot10^5 + h} \rightarrow \mathbf{h = 11523.38\ m = 11.52\ km}$$

Para hallar la velocidad orbital del satélite, primero tenemos que hallar el radio de su órbita, para lo cual sabemos que la fuerza gravitatoria que el planeta ejerce sobre éste es igual a la fuerza centrípeta:

$$\left|\vec{F}_g\right| = \left|\vec{F}_c\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|\vec{F}_g\right| = G\dfrac{m\cdot M}{R^2} \\ \left|\vec{F}_c\right| = m\dfrac{v^2}{R} = m\dfrac{\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R = m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R \end{array}\right\} \rightarrow G\frac{m\cdot M}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot 5.69\cdot10^{26}\cdot(118380)^2}{4\pi^2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{R = 2.38\cdot10^8\ m}$$

La velocidad es igual a la longitud de la órbita partida el periodo:

$$v = \frac{2\,\pi\, R}{T} = \frac{2\,\pi\, 2.38\cdot10^8}{118380} \rightarrow \mathbf{v = 1.26\cdot10^4\ {}^{m}/_{s} = 12.6\ {}^{km}/_{s}}$$

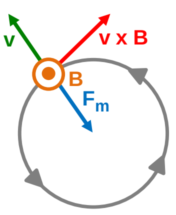
Problema 2.- Un electrón confinado dentro de un campo magnético uniforme de 0.1705 T describe una órbita circular de 0.2 mm de radio. Esta órbita está contenida en un plano perpendicular a las líneas del campo.

a) Explicar si el sentido de giro del electrón en su órbita será horario o antihorario. Se valorará la inclusión de un diagrama adecuado para ilustrar la explicación.
b) Calcular la velocidad y la energía del electrón en julios y en electrón voltios.
c) ¿Cuál es la frecuencia del electrón en su órbita?.

Datos del electrón: masa $9.1\cdot10^{-31}$ kg; carga $1.6\cdot10^{-19}$ C.

La fuerza magnética que actúa sobre el electrón, dentro del campo magnético es igual a:

$$\vec{F}_m = -q\,\vec{v}\times\vec{B}$$



Como la carga es negativa (electrón), la fuerza magnética tendrá sentido opuesto al producto vectorial $\vec{v}\times\vec{B}$. Dicha fuerza magnética actúa como una fuerza centrípeta que varía la dirección de la velocidad pero no su módulo, apunta siempre hacia el centro de la trayectoria circular. Aplicando la regla de la mano derecha, se observa como el sentido del giro es antihorario (visto desde arriba).

Como hemos dicho, el módulo de la fuerza magnética es igual al módulo de la fuerza centrípeta:

$$\left|\vec{F}_m\right| = \left|\vec{F}_C\right| \rightarrow q\, v\, B\ \mathrm{sen}\ \theta = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \frac{q\, B\, R\ \mathrm{sen}\ 90}{m} = \frac{1.6\cdot10^{-19}\cdot 0.1705\cdot 2\cdot10^{-4}}{9.1\cdot10^{-31}} \rightarrow \mathbf{v = 5.99\cdot10^6\ {}^{m}/_{s}}$$

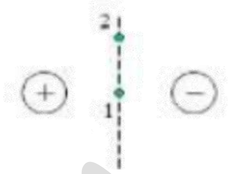
La energía cinética es igual a:

$$E_C = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} 9.1\cdot10^{-31}\cdot\left(5.99\cdot10^6\right)^2 \rightarrow \mathbf{E_C = 1.63\cdot10^{-17}\ Jul}\cdot\frac{1\ eV}{1.6\cdot10^{-19}\ Jul} = \mathbf{102.22\ eV}$$

La frecuencia es el número de veces que el electrón recorre la órbita en la unidad de tiempo (1 seg). Y el periodo es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa, por tanto:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v} = \frac{2\,\pi\cdot 2\cdot 10^{-4}}{5.99\cdot 10^{6}} \rightarrow \mathbf{T = 2.09\cdot 10^{-10}\,s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.09\cdot 10^{-10}} \rightarrow \mathbf{f = 4.76\cdot 10^{9}\,Hz}$$

Cuestión 1.- Consideremos los puntos 1 y 2 de la figura, situados sobre la mediatriz del eje de un dipolo eléctrico (dos cargas puntuales del mismo valor y distinto signo). Explicar razonadamente qué dirección y sentido tendrá el campo eléctrico en cada uno de esos puntos y en cuál de los dos será mayor su módulo (acompañar la explicación de un diagrama indicando dirección y sentido en cada caso)



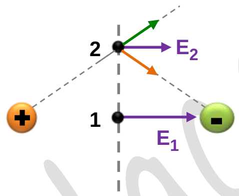
Los puntos 1 y 2 se encuentran a la misma distancia de ambas cargas al estar situados en la mediatriz del dipolo. Por tanto, la contribución de cada una de ellas al módulo del campo eléctrico es la misma:

$$E = K\,\frac{q}{R^2}$$

Además, la orientación simétrica de las contribuciones del campo eléctrico en todos los puntos de la mediatriz, supone que todas las componentes paralelas a ésta se anulen, por lo que el campo eléctrico será siempre perpendicular a la mediatriz.

Por otro lado, los puntos más cercanos al eje están a menor distancia de las cargas, por lo que el módulo del campo eléctrico será mayor cuanto más cerca del eje nos encontremos.

Por tanto, se concluye que el módulo del campo eléctrico será mayor en el **punto central** del dipolo (punto 1).



Cuestión 2.- La velocidad de las ondas transversales en una cuerda tensa sujeta por sus dos extremos es 35 m/s. Cuando en esta cuerda se propagan ondas de 14 Hz, su interferencia da lugar al segundo armónico de una onda estacionaria. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

La longitud de onda la calculamos a partir de la velocidad de propagación:

$$v = \lambda\cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{35}{14} \rightarrow \mathbf{\lambda = 2.5\ m}$$

Por otro lado, la longitud de onda de una onda estacionaria en una cuerda fija sujeta por dos extremos es:

$$\lambda = \frac{2\,L}{n}$$

Como nos dice que se trata del segundo armónico → n=2:

$$\lambda = \frac{2\,L}{2} \rightarrow \lambda = L \rightarrow \mathbf{L = 2.5\ m}$$

Cuestión 3.- Un núcleo radiactivo N1 se desintegra emitiendo una partícula α, dando como resultado el núcleo N2. Este N2 emite una partícula β y origina el núcleo N2. A su vez, N3 se desintegra en N4 por emisión de otra partícula β (reacciones en la figura al margen) ¿Cuáles de los núcleos N1, N2, N3 y N4 tienen mayor y menor número atómico? ¿Cuáles de los núcleos N1, N2, N3 y N4 tienen mayor y menor número másico?

$$N1 \rightarrow N2 + \alpha$$
$$N2 \rightarrow N3 + \beta$$
$$N3 \rightarrow N4 + \beta$$

La emisión de una partícula α disminuye en dos unidades el número atómico (Z) y en cuatro unidades el número másico (A). La emisión de una partícula β aumenta en una unidad el Z y no varía el A:

	N1	N2	N3	N4
Número Atómico (Z)	Z_1	Z_1 - 2	Z_1 – 2 + 1 = Z_1 - 1	Z_1 – 1 + 1 = Z_1
Número Másico (A)	A_1	A_1 - 4	A_1 - 4	A_1 - 4

Por tanto, los núcleos N1 y N4 son los que tienen mayor Z, siendo el mismo para ambos, lo que nos indica que son isótopos del mismo elemento. El núcleo con menor Z es el N2.

En cuanto al número másico, el de mayor A es el N1 y los otros 3 núcleos poseen la misma masa (4 unidades menor).

Cuestión Experimental.- Enunciar y explicar brevemente la ley de Snell de la refracción. ¿Es posible que un rayo de luz que se propaga en agua alcance la superficie de separación con el aire y en lugar de refractarse se refleje completamente en dicha superficie, volviendo en su totalidad al agua sin que haya nada de luz refractada? Explicar brevemente. Índice de refracción del agua 1.33.

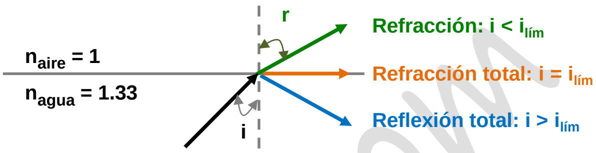
La ley de Snell se aplica a la luz que atraviesa una superficie de separación entre dos medios con distinto índice de refracción (distintas propiedades ópticas), establece que el producto del índice de refracción del primer medio por el seno del ángulo de incidencia, es igual al producto del índice de refracción del segundo medio por el ángulo de refracción:

$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \operatorname{sen} \hat{r}$$

Como el índice de refracción del agua (1.33) es mayor que el del aire (1), al calcular el ángulo de refracción con la ley de Snell:

$$\operatorname{sen} \hat{r} = \frac{n_{agua} \operatorname{sen} \hat{i}}{n_{aire}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{r} = n_{agua} \operatorname{sen} \hat{i} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{r} = 1.33 \operatorname{sen} \hat{i}$$

Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite (ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción vale 90º), el seno del ángulo de refracción será mayor que la unidad, con lo que el ángulo de refracción será mayor de 90º (sen 90º = 1), lo que se interpreta como un fenómeno de reflexión total, en el que el rayo de luz se refleja completamente en la superficie y vuelve al agua (no existe refracción).



Opción B

Problema 1.- Una cuerda tensa sujeta por sus dos extremos vibra de acuerdo con la ecuación $y = 5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$, donde x e y se expresan en cm y t en segundos.

a) Calcular la velocidad y la amplitud de las ondas viajeras cuya superposición da lugar a esta vibración.
b) Hallar la distancia entre nodos consecutivos. Si la longitud de la cuerda tensa es 48 cm, ¿qué armónico aparece en ella?
c) Calcular la velocidad de una partícula de la cuerda situada en la posición x = 1.5 cm cuando $t = \frac{9}{8}$ s.

Se trata de una onda estacionaria:

$$\begin{matrix} y = 2A \operatorname{sen} kx \cdot \cos \omega t \\ y = 5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} \cdot \cos 40\pi t \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 2A = 5 \rightarrow \mathbf{A = 2.5\ cm} \\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/3} \rightarrow \mathbf{\lambda = 6\ cm} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} \rightarrow \mathbf{T = 0.05\ s} \end{cases} \rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6}{0.05} \rightarrow \mathbf{v = 120\ ^{cm}/_{s} = 1.20\ ^{m}/_{s}}$$

En una onda estacionaria, dos nodos consecutivos están separados por media longitud de onda:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow \mathbf{d = 3\ cm}$$

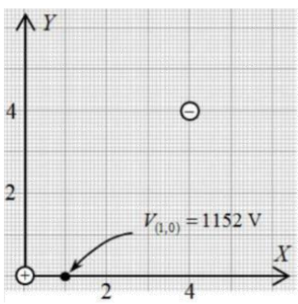
El armónico lo podemos calcular a partir de la relación entre la longitud de onda y la longitud de la cuerda:

$$\lambda = \frac{2\,L}{n} \rightarrow n = \frac{2\,L}{\lambda} = \frac{2 \cdot 48}{6} \rightarrow \mathbf{n = 16}$$

Para calcular la velocidad de vibración de una partícula, derivamos la posición con respecto al tiempo:

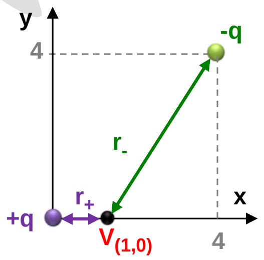
$$v = \frac{dy}{dt} \rightarrow v = -2A\omega \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \omega t \rightarrow \begin{matrix} x = 1.5\ cm \\ t = \frac{9}{8}\ s \end{matrix} \rightarrow v = -200\pi \operatorname{sen} \frac{1.5\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} 40\pi \frac{9}{8} \rightarrow \mathbf{v = 0\ ^{cm}/_{s}}$$

Problema 2.- Dos cargas iguales de signos contrarios +q y −q están colocadas tal y como se indica en la figura, con la carga positiva en el origen de coordenadas y la negativa en el punto (4, 4) (distancias medidas en metros). La constante de Coulomb es $k = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$.



a) Determinar el valor de q si el potencial eléctrico en el punto (1, 0) es +1152V.
b) Calcular el campo eléctrico (módulo y sentido) en el punto (0, 4). Se valorará un esquema adecuado.

Calcular el trabajo para trasladar una carga de $+10^{-10}$ C desde el punto (0, 4) hasta el punto (1, 0) ¿Cuál es el significado del signo resultante?

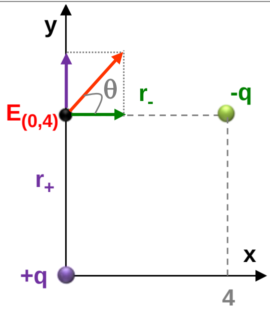


En el punto (1,0) es la suma de los potenciales debidos a las dos cargas:

$$V_T = V_+ + V_- \rightarrow V_T = K\frac{+q}{r_+} + K\frac{-q}{r_-} \rightarrow V_T = K\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) \rightarrow 1152 = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{q}{1} - \frac{q}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)$$

$$\rightarrow \mathbf{q = 1.6 \cdot 10^{-7}\ C}$$

En el punto (0,4) está a la misma distancia de las dos cargas (r = 4):



$$E_T = \sqrt{E_+^{\,2} + E_-^{\,2}} \rightarrow E_T = \sqrt{\left(K\,\frac{q}{r_+^{\,2}}\right)^2 + \left(K\,\frac{q}{r_-^{\,2}}\right)^2} \rightarrow E_T = \sqrt{\left(9\cdot 10^9\,\frac{1.6\cdot 10^{-7}}{4^2}\right)^2 + \left(9\cdot 10^9\,\frac{1.6\cdot 10^{-7}}{4^2}\right)^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{E_T = 127.3\cdot 10^{-7}\ {}^{N}/_{C}}$$

$$\theta = \text{arc.tg}\left(\frac{E_+}{E_-}\right) \rightarrow \theta = \text{arc.tg}\ (1) \rightarrow \mathbf{\theta = 45^o = \frac{\pi}{4}\ rad}$$

El trabajo necesario para trasladar una carga de $+10^{-10}$ C desde el punto (0, 4) hasta el punto (1, 0) es igual a: W= - q ΔV

$$V_{(0,4)} = K\,\frac{q}{r_+} + K\,\frac{q}{r_-} = 9\cdot 10^9\,\frac{1.6\cdot 10^{-7}}{4} + 9\cdot 10^9\,\frac{(-1.6\cdot 10^{-7})}{4} \rightarrow \mathbf{V_{(0,4)} = 0V}$$

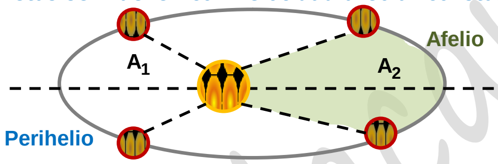
$$\rightarrow W = -\,q\,\Delta V = -\,q\,(V_{(1,0)} - V_{(0,4)}) = -\,10^{-10}\,(1152 - 0) \rightarrow W = -1.15\ 10^{-7}\ \text{Jul}$$

El signo negativo significa que el trabajo debe realizarlo un agente externo, al tener que aumentar la energía potencial (E_P=-qV).

Cuestión 1.- Enunciar las leyes de Kepler. Justificar razonadamente la 3ª ley.

Primera.- Los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol, situado en uno de los focos de la elipse.

Segunda.- La recta que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales (los planetas se mueven más rápidamente en el perihelio): los planetas se mueven con velocidad areolar constante.



$A_1 = A_2$

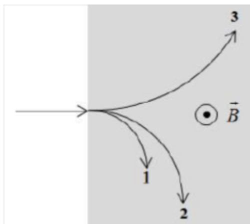
Tercera.- Los cuadrados de los periodos orbitales de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol: $T^2 = k \cdot r^3$

Esta tercera ley podemos justificarla si partimos de la base que la fuerza de gravitación entre el planeta y el sol es igual a la fuerza centrípeta necesaria para que el planeta describa su órbita:

$$\left|\vec{F_g}\right| = \left|\vec{F_C}\right| \rightarrow G\,\frac{M_S\,m_P}{R^2} = m_P\,\frac{v^2}{R} \rightarrow G\,\frac{M_S\,m_P}{R^2} = m_P\,\frac{\omega^2\,R^2}{R} \rightarrow G\,\frac{M_S}{R^2} = \omega^2\,R \rightarrow G\,M_S = \omega^2\,R^3 \rightarrow G\,M_S = \frac{4\,\pi^2}{T^2}\,R^3$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_S}\,R^3 \rightarrow \mathbf{k = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_S}} \rightarrow \mathbf{T^2 = k\ \ R^3}$$

Cuestión 2.- En la figura vemos las trayectorias de tres partículas cargadas que viajan perpendicularmente a las líneas de un campo magnético dirigido en sentido vertical (saliente del plano del papel, zona sombreada). Las tres partículas tienen igual masa y sus cargas tienen el mismo valor absoluto. Ordenar razonadamente sus velocidades de mayor a menor y explicar cuál es el signo de cada una de ellas.

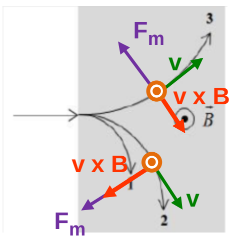


Cuando una partícula con masa m y carga q penetra en un campo magnético uniforme con una velocidad, sufre una fuerza magnética que actúa como si fuera una fuerza centrípeta que la obliga a cambiar su trayectoria, describiendo un movimiento circular uniforme. Por tanto, el módulo de la velocidad no varía, aunque sí su dirección. El radio de la órbita que describe la partícula será:

$$\left|\vec{F_m}\right| = \left|\vec{F_C}\right| \rightarrow q\ v\ B = m\,\frac{v^2}{R} \rightarrow \mathbf{R = \frac{m\ v}{q\ B}}$$

En el caso de estas tres partículas que tienen igual masa y carga, el radio será directamente proporcional a la velocidad de cada una. Por lo que si observamos la figura, el orden creciente de los radios es: $R_3 > R_2 > R_1$, es decir: $\mathbf{v_3 > v_2 > v_1}$.

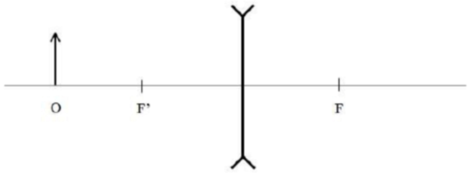
El radio de la curvatura nos lo indica la dirección de la fuerza magnética:



$$\vec{F_m} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

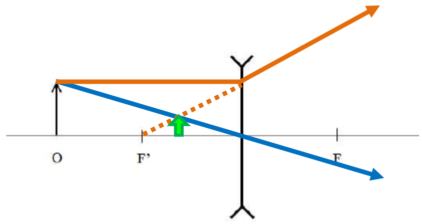
Si nos fijamos en la expresión de la fuerza de Lorentz podemos decir que si la carga es positiva la fuerza magnética tendrá el mismo sentido que el producto vectorial del vector velocidad por el vector campo magnético, y si la carga es negativa ambos vectores serán opuestos. Por tanto, observando la figura: **1** y **2** son **positivas** y **3** es **negativa**.

Cuestión 3.- Construir un esquema de rayos para determinar la imagen del objeto formado por la siguiente lente divergente:



Al ser una lente divergente, la imagen será derecha y estará disminuida, se forma donde se unen los rayos:

- **Rayo 1**. paralelo al eje óptico y tras ser refractado en la lente, pasa por el foco imagen de la misma.
- **Rayo 2**. pasa por el centro óptico de la lente. No sufre desviación alguna y atraviesa la lente en línea recta.



Cuestión Experimental.- Para determinar la aceleración de la gravedad en el laboratorio de Física se miden los tiempos invertidos por cuatro péndulos de diferentes longitudes en realizar cinco oscilaciones. Los resultados aparecen en la tabla. Explicar qué tratamiento de datos hay que hacer y calcular la aceleración de la gravedad.

L (m)	t (s)
1.5	12.3
2.4	15.5
2.8	16.8
3.1	17.7

El periodo de un péndulo simple viene dado en función de la gravedad, por lo que podemos despejar ésta de la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2\frac{L}{T^2}$$

El periodo de cada péndulo es igual al tiempo invertido por cada uno de ellos entre 5 oscilaciones, por tanto, podemos calcular la gravedad para cada péndulo y luego calcular la media aritmética:

m (kg)	t(s)	$T = \frac{t}{5\ \text{oscilaciones}}$	g(m/s^2)
1.5	12.3	2.46	9.79
2.4	15.5	3.1	9.86
2.8	16.8	3.36	9.79
3.1	17.7	3.54	9.77

$$g = \frac{9.79 + 9.86 + 9.79 + 9.77}{4} \rightarrow \mathbf{g = 9.80\ m/s^2}$$