Universidad de Castilla La Mancha – Septiembre – 2015

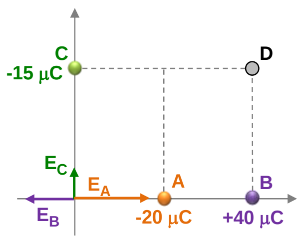
Opción A

Problema 1.- Tenemos tres partículas cargadas q_1 = -20 μC, q_2 = +40 μC y q_3 = -15 μC, situadas en los puntos de coordenadas A (2,0), B (4,0) y C (0,3), respectivamente. Calcula, sabiendo que las coordenadas están expresadas en metros:

a) El valor del campo eléctrico en el origen de coordenadas.
b) El potencial eléctrico en el punto D (4,3) .
c) El trabajo realizado por el campo para llevar una carga de +10 μC desde el origen de coordenadas al punto D.

Datos: Constante de la ley de Coulomb: $k = 9\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$; $1\ \mu C = 10^{-6}$ C.

El valor del campo eléctrico en el punto (0, 0):



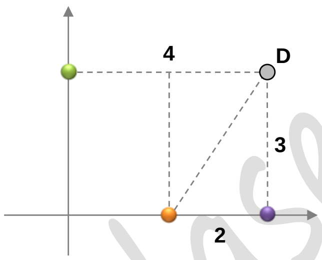
La distancia de las cargas al origen de coordenadas es:

$d_1 = 2$ m
$d_2 = 4$ m
$d_3 = 3$ m

$$E = k\frac{|q|}{d^2} \rightarrow \begin{cases} E_1 = 9\cdot10^9\,\dfrac{20\cdot10^{-6}}{2^2} \rightarrow \mathbf{E_1 = 45000\ \vec{i}\ V/m} \\ E_2 = 9\cdot10^9\,\dfrac{40\cdot10^{-6}}{4^2} \rightarrow \mathbf{E_2 = -\ 22500\ \vec{i}\ V/m} \\ E_3 = 9\cdot10^9\,\dfrac{15\cdot10^{-6}}{3^2} \rightarrow \mathbf{E_3 = 15000\ \vec{j}\ V/m} \end{cases} \rightarrow \mathbf{E_T = 22500\ \vec{i} + 15000\ \vec{j}\ V/m} \rightarrow E_T = \sqrt{E_X^2+E_Y^2} = \sqrt{22500^2+15000^2}$$

$$\rightarrow \mathbf{E_T = 2.704\cdot10^4\ V/m} \rightarrow \alpha = \text{arc.tg}\,\frac{E_Y}{E_X} = \text{arc.tg}\,\frac{15000}{22500} \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 33.69º}$$

El potencial eléctrico en el punto D (4, 3):



La distancia de las cargas al punto D:

$d_1 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ m
$d_2 = 3$ m
$d_3 = 4$ m

$$V_D = k\frac{q_1}{d_1} + k\frac{q_2}{d_2} + k\frac{q_3}{d_3} = k\left(\frac{q_1}{d_1}+\frac{q_2}{d_2}+\frac{q_3}{d_3}\right) = 9\cdot10^9\left[\frac{-20\cdot10^{-6}}{\sqrt{13}} + \frac{40\cdot10^{-6}}{3} - \frac{15\cdot10^{-6}}{4}\right] \rightarrow \mathbf{V_D = 36326.98\ V}$$

El trabajo necesario para llevar una carga de un punto a otro dentro de un campo electrostático es igual al valor de dicha carga multiplicada por la diferencia de potencial, por lo que primero tenemos que hallar el potencial en el origen de coordenadas:

$$V_0 = k\frac{q_1}{d_1} + k\frac{q_2}{d_2} + k\frac{q_3}{d_3} = k\left(\frac{q_1}{d_1}+\frac{q_2}{d_2}+\frac{q_3}{d_3}\right) = 9\cdot10^9\left[\frac{-20\cdot10^{-6}}{2} + \frac{40\cdot10^{-6}}{4} - \frac{15\cdot10^{-6}}{3}\right] \rightarrow \mathbf{V_0 = -4500\ V}$$

$$W = q\,(V_0 - V_D) = +10\cdot10^{-6}\,(-4500 - 36326.98) \rightarrow \mathbf{W = -0.813\ Jul}$$

Problema 2.- La ecuación de una onda transversal viene dada por la expresión: y(x, t)= 4 sen 2π (4x – 5t), donde todas las cantidades se expresan en el S.I. Determinar:

a) Cuál es el sentido de propagación de la onda y su frecuencia angular, frecuencia, periodo, número de ondas, longitud de onda, amplitud y velocidad de propagación, indicando sus unidades respectivas.
b) Deduce la expresión general de la velocidad de vibración transversal de los puntos del medio en que se transmite la onda, así como su valor máximo.
c) El intervalo de tiempo que transcurre entre dos estados de vibración de un mismo punto con una diferencia de fase de π radianes.

El sentido de propagación es **de izquierda a derecha** (sentido positivo del eje x), lo indica el signo negativo del ángulo.

$$y\,(x,t) = 4\cdot \text{sen}\, 2\pi\,(4x - 5t) = 4\cdot \text{sen}\,(8\pi x - 10\pi t) \quad y\,(x,t) = A\cdot \text{sen}\,(\omega t \pm kx + \delta_0) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{A = 4\ m} \\ \mathbf{\omega = 10\pi\ rad/s} \\ f = \dfrac{\omega}{2\pi} \rightarrow \mathbf{f = 5\ Hz} \\ T = \dfrac{1}{f} \rightarrow \mathbf{T = 0.2\ s} \\ \mathbf{k = 8\pi\ m^{-1}} \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{k} \rightarrow \mathbf{\lambda = 0.25\ m} \\ v = \dfrac{\omega}{k} \rightarrow \mathbf{v = 1.25\ m/s} \end{cases}$$

La velocidad de vibración es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} \rightarrow v = A(-\omega)\cdot \cos\,(kx - \omega t)$$

La velocidad será máxima cuando el coseno sea igual a -1:

$$v_{máx} = A\omega = 4 \cdot 10\pi \rightarrow \mathbf{v_{máx} = 40\pi\ m/s}$$

Para una diferencia de fase de π radianes:

$$\Delta\delta = \pi \rightarrow \delta_1 - \delta_2 = \pi \rightarrow |(8\pi x_1 - 10\pi t_1) - (8\pi x_2 - 10\pi t_2)| = \pi \rightarrow \mathbf{x_1 = x_2} \rightarrow 10\pi\,|t_2 - t_1| = \pi \rightarrow t_2 - t_1 = \frac{\pi}{10\pi} \rightarrow \mathbf{t = 0.1\ s}$$

Cuestión 1.- A partir de los datos orbitales terrestres (el periodo de revolución alrededor del Sol es 365 días y la distancia Tierra-Sol es $149.5\cdot 10^6$ km), calcula la duración del año marciano sabiendo que Marte se sitúa a $228\cdot 10^6$ km del Sol.

Según la tercera ley de Keppler:

$$T^2 = k\cdot r^3 \rightarrow \begin{cases} T_T^2 = k\cdot r_T^3 \\ T_M^2 = k\cdot r_M^3 \end{cases} \rightarrow \frac{T_T^2}{T_M^2} = \frac{r_T^3}{r_M^3} \rightarrow T_M = T_T\sqrt{\frac{r_M^3}{r_T^3}} = 365\ \text{días}\sqrt{\frac{\left(228\cdot 10^9\right)^3}{\left(149.5\cdot 10^9\right)^3}} \rightarrow \mathbf{T_M = 687.43\ días}$$

Cuestión 2.- Calcula la longitud de onda de un electrón que se mueve con una energía cinética de $1{,}6\cdot 10^{-17}$ J.
Datos: $m_{electrón} = 9.1\cdot 10^{-31}$ kg; constante de Planck $h = 6.63\cdot 10^{-34}$ J·s.

Calculamos la velocidad a partir de la energía cinética:

$$E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.6\cdot 10^{-17}}{9.1\cdot 10^{-31}}} \rightarrow \mathbf{v = 5.96\cdot 10^6\ m/s^2}$$

La longitud de onda la podemos calcular a partir de la relación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m\,v} = \frac{6.63\cdot 10^{-34}}{9.4\cdot 10^{-31}\cdot 5.96\cdot 10^6} \rightarrow \mathbf{\lambda = 1.23\cdot 10^{-10}\ m = 1.23\ Å}$$

Cuestión 3.- Se observa que 100 g de una muestra radioactiva se desintegra un 12% cada día. ¿Cuál es su constante de desintegración radioactiva y su tiempo de vida medio? ¿Qué masa de muestra quedará a los 30 días?

Según la ley de desintegración radiactiva y teniendo que si se desintegra un 12%, significa que en un día, si partimos de una cantidad N_0, quedarán el 88% de N_0:

$$N = N_o\cdot e^{-\lambda\cdot t} \rightarrow 0.88N_o = N_o\cdot e^{-\lambda\cdot 1} \rightarrow \frac{0.88N_o}{N_o} = e^{-\lambda} \rightarrow \lambda = -\ \text{Ln}\ 0.88 \rightarrow \mathbf{\lambda = 0.1279\ días^{-1}}$$

El tiempo de vida medio:

$$t_{1/2} = \frac{\text{Ln}\ 2}{\lambda} = \frac{\text{Ln}\ 2}{0.1279} \rightarrow \mathbf{t_{1/2} = 5.42\ días}$$

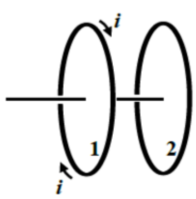
Al cabo de 30 días, el número de semividas radiactivas transcurrido es: $\frac{30\ \text{días}}{5.42\ \text{días}} = \mathbf{5.53}$

Cada vez que transcurre una semivida, significa que la cantidad de isótopo radiactivo se reduce a la mitad, con lo que:

$$m = m_o\left(\frac{1}{2}\right)^{5.53} = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{5.53} \rightarrow \mathbf{m = 2.16\ gr}$$

Cuestión Experimental.- Tenemos dos espiras conductoras enfrentadas como se muestra en la figura. Por la espira 1 circula una corriente de intensidad i en el sentido indicado. Razona el sentido de la corriente inducida en la espira 2 cuando:

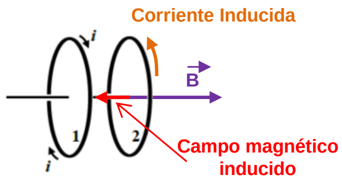
a) Manteniendo constante la corriente i, la espira 2 se acerca a la espira 1.
b) Manteniendo constante la corriente i, la espira 2 se aleja de la espira 1.
c) Manteniendo fija la distancia entre las dos, aumenta la intensidad de corriente i de la espira 1.



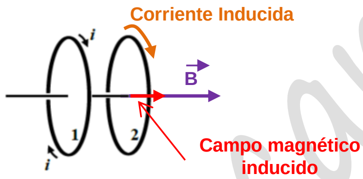
Según la ley de Lenz: *"El sentido de la corriente inducida es tal que el campo creado por dicha corriente tiende a oponerse a la creación del flujo magnético que la ha originado"*

La corriente i que circula por la espira 1 crea un campo magnético $\vec{B}$ en la espira 2 dirigido hacia la derecha.

(a) Si la espira 2 se acerca a la espira 1 manteniendo constante la corriente i, el flujo magnético aumentará a través de 2 a medida que se acerca. La corriente inducida en 2 tenderá a oponerse a dicho aumento de flujo, generando un campo magnético inducido en sentido opuesto al campo magnético $\vec{B}$, es decir, hacia la izquierda. Por tanto, la corriente inducida en 2, vista desde la espira 1, será de **sentido antihorario**.



(b) Si la espira 2 se aleja de la espira 1 manteniendo constante la corriente i, el flujo magnético disminuirá a través de 2 a medida que se aleje. La corriente inducida en 2 tenderá a oponerse a dicha disminución de flujo, generando un campo magnético inducido en el mismo sentido del campo magnético $\vec{B}$, es decir, hacia la derecha. Por tanto, la corriente inducida en 2, vista desde la espira 1, será de **sentido horario**.



(c) Si se mantiene fija la distancia entre ambas espiras y aumenta la intensidad de corriente i en la espira 1, también lo hará en la espira 2 (aumentará el flujo magnético). La corriente inducida en 2 tenderá a oponerse a dicho aumento de flujo, generando un campo magnético inducido en sentido opuesto al campo magnético $\vec{B}$, es decir, hacia la izquierda. Por tanto, la corriente inducida en 2, vista desde la espira 1, será de **sentido antihorario**. Es el mismo caso que el apartado a.

Opción B

Problema 1.- Un satélite artificial de 820 kg gira alrededor de un planeta describiendo una órbita geoestacionaria (es decir, se mantiene siempre en la vertical del mismo punto del ecuador), de modo que da una vuelta completa cada 24 horas. La masa y el radio del planeta son $5.98\cdot10^{24}$ kg y 6370 km, respectivamente.

a) Calcular a qué altura sobre la superficie del planeta se encuentra este satélite.
b) Calcular la velocidad del satélite en su órbita.
c) Determinar la energía mecánica del satélite y su energía potencial.

Constante de gravitación $G = 6.67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Para que el satélite no se salga de su órbita: $|\vec{F_g}| = |\vec{F_c}|$

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{F_g}| = G\dfrac{m\cdot M}{R^2}\\ |\vec{F_c}| = m\dfrac{v^2}{R} = m\dfrac{\omega^2R^2}{R} = m\omega^2R\end{array}\right\} \rightarrow G\dfrac{m\cdot M}{R^2} = m\omega^2R \rightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{G\cdot M}{\omega^2}} \rightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{G\cdot M}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{6.67\cdot10^{-11}\cdot5.98\cdot10^{24}\cdot(8.64\cdot10^4)^2}{4\pi^2}}$$

$$\rightarrow \mathbf{R = 42250\cdot10^3\ m}$$

Este radio es el de la órbita del satélite, por lo que la altura sobre la superficie del planeta será:

$$h = R_O - R_T = 42250 - 6370 \rightarrow \mathbf{h = 35880\ km}$$

Para calcular la velocidad en la órbita:

$$|\vec{F_g}| = |\vec{F_c}| \rightarrow G\frac{m\cdot M}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot5.98\cdot10^{24}}{42250\cdot10^3}} \rightarrow \mathbf{v = 3.07\cdot10^3\ m/s}$$

La energía mecánica del satélite en la órbita es:

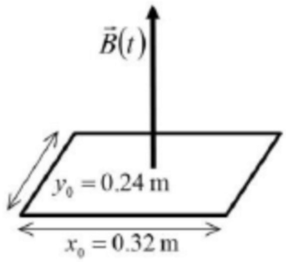
$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{m\cdot M}{R}\right) = \frac{1}{2}820\left(3.07\cdot10^3\right)^2 - 6.67\cdot10^{-11}\frac{820\cdot5.98\cdot10^{24}}{42250\cdot10^3} \rightarrow \mathbf{E_M = -3.87\cdot10^9\ Jul}$$

Problema 2.- Una espira conductora rectangular (dimensiones $x_0 = 0.32$m e $y_0 = 0.24$ m) y cuya resistencia eléctrica 5Ω, se encuentra dentro de un campo magnético perpendicular al plano de la espira. Este campo magnético disminuye uniformemente con el tiempo según la relación:

$$B(t) = 0.25 \cdot (1 - t/50)$$

El tiempo t está en segundos y el campo magnético B en tesla. Se pide:

a) El flujo magnético a través de la espira en t = 0.
b) Calcular la fuerza electromotriz inducida y la intensidad de corriente que circula por la espira cuando t = 15 s y cuando t = 40 s. ¿Hay alguna diferencia entre esos valores calculados en distintos tiempos?
c) Explicar cuál es el sentido de la corriente inducida.



Si consideramos que el campo magnético tiene el sentido positivo del eje Z, y que el vector superficie tiene la misma dirección, el flujo magnético en t = 0s:

$$\phi(t) = \vec{B}\cdot\vec{S} = |\vec{B}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\theta \rightarrow \begin{cases}\vec{B} = 0.25\left(1 - \frac{t}{50}\right)\vec{k} \\ \vec{S} = 0.32\cdot 0.24\,\vec{k}\end{cases} \rightarrow \theta = 0^o \rightarrow \phi(t) = 0.25\left(1 - \frac{t}{50}\right)\cdot 0.32\cdot 0.24\cdot\cos 0$$

$$\rightarrow \phi(t) = 1.92\cdot 10^{-2}\left(1 - \frac{t}{50}\right) \rightarrow \mathbf{\phi(0) = 1.92\cdot 10^{-2}\ T\cdot m^2}$$

La *fem* inducida la calculamos usando la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \rightarrow \varepsilon = -1.92\cdot 10^{-2}\left(-\frac{1}{50}\right) \rightarrow \mathbf{\varepsilon = 3.84\cdot 10^{-4}\ V}$$

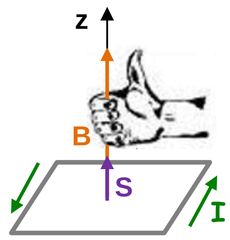
La *fem* (la derivada) no depende del tiempo, por lo que será la misma para t = 15s y para t = 40s.

Para calcular la corriente, usamos la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{3.84\cdot 10^{-4}}{5} \rightarrow \mathbf{I = 7.68\cdot 10^{-5}\ A}$$

Como en el caso anterior, la intensidad de corriente no depende del tiempo, por lo que será la misma para t=15s y para t=40s.

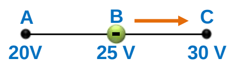
Como hemos considerado que el vector $\vec{S}$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{B}$, según la regla de la mano derecha, la *fem* tendrá un sentido antihorario.
Como la *fem* es positiva, el campo eléctrico inducido que produce la variación del flujo magnético, también tendrá sentido antihorario. Por tanto, la corriente inducida circulará en sentido antihorario.



Cuestión 1.- Tres puntos alineados A, B y C tienen un potencial de 20 V, 25 V y 30 V respectivamente. Si se coloca una carga negativa en el punto intermedio B y se la deja evolucionar libremente, deduce hacia dónde se moverá espontáneamente dicha carga, hacia el punto A o hacia el punto C.

El trabajo necesario para llevar una carga de un punto a otro viene dado por: $W = \Delta E_P = q\,(V_2 - V_1)$

Cuando el trabajo es positivo, se realiza en contra de las fuerzas del campo. Por lo que si el sistema se deja evolucionar libremente, la carga negativa irá hacia el punto donde el potencial sea más alto, ya que así la diferencia $(V_2 - V_1)$ será positiva y por tanto, el trabajo será negativo (realizándose a favor de las fuerzas de campo eléctrico), es decir, irá hacia el punto **C**.



Cuestión 2.- Una masa de 93.75 g está unida a un resorte de constante elástica 50 N/m. Se le aparta 10 cm de su posición de equilibrio y se le deja oscilar libremente. Calcula la velocidad de dicha masa cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.

Se trata de un movimiento armónico simple de amplitud 0.1 m. La energía mecánica asociada a dicho MAS es:

$$E_M = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,50\cdot 0.1^2 \rightarrow \mathbf{E_M = 0.25\ Jul}$$

La energía mecánica se conserva durante todo el movimiento, siendo ésta la suma de las energías cinética y potencial en cada momento, por lo que cuando x = 0.05m:

$$E_P = \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,50\cdot 0.05^2 \rightarrow \mathbf{E_P = 6.25\cdot 10^{-2}\ Jul} \rightarrow E_M = E_P + E_C \rightarrow E_C = E_M + E_P = 0.25 - 6.25\cdot 10^{-2} \rightarrow \mathbf{E_C = 0.1875\ Jul}$$

$$\rightarrow E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.1875}{0.09375}} \rightarrow \mathbf{v = 2\ {}^{m}/_{s}}$$

Cuestión 3.- La masa atómica del $^{16}_{8}O$ es 15,9994 u. Calcula la energía que se desprende en la formación de su núcleo, expresando el resultado en MeV.
Datos: $m_{protón}$ = 1,007276 u; $m_{neutrón}$ = 1,008665 u; 1 u = 1,66· 10^{-27} Kg; c = $3·10^8$ m/s; 1 eV = $1,6·10^{-19}$ J; 1 MeV = 10^6 eV.

El $^{16}_{8}O$ posee:

- 8 electrones
- 8 protones
- 8 neutrones

Por lo que el defecto de masa:

$$\Delta m = |\, m_{núclido} - [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] \,| = |15.994 - [8(1.007276) + 8(1.008665)]|$$

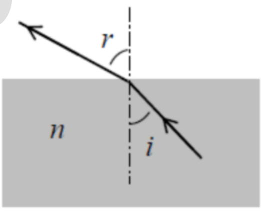
$$\rightarrow \mathbf{\Delta m = 0.133528\ uma} \cdot \frac{1.66 \cdot 10^{-27}\ kg}{1\ uma} = \mathbf{2.21 \cdot 10^{-28}\ kg}$$

Con lo que la energía que se desprende en la formación del núcleo será, según Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 2.21 \cdot 10^{-27} \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \rightarrow \mathbf{E = 1.99 \cdot 10^{-11}\ Jul} \cdot \frac{1\ eV}{1.6 \cdot 10^{-16}\ Jul} \cdot \frac{1\ MeV}{10^6\ eV} = \mathbf{124.68\ meV}$$

Cuestión Experimental.- Un rayo de luz que se propaga en una lámina de vidrio de índice de refracción n = 1.5242 alcanza la superficie de la misma y se refracta tal y como se indica en la figura. El índice de refracción del aire que rodea a la lámina es igual a 1. Se pide:

a) Justificar que el ángulo de refracción r es mayor que el ángulo de incidencia i.
b) ¿Cuál es el mayor valor del ángulo de incidencia para el cual habrá rayo refractado? Explicar razonadamente.



Aplicando la ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \operatorname{sen} \hat{r} \rightarrow n_{vidrio} \operatorname{sen} \hat{i} = n_{aire} \operatorname{sen} \hat{r} \rightarrow 1.5242 \operatorname{sen} \hat{i} = 1 \cdot \operatorname{sen} \hat{r} \rightarrow \mathbf{1.5242 \operatorname{sen} \hat{i} = \operatorname{sen} \hat{r}}$$

Esta igualdad implica que el sen $\hat{r}$ > sen $\hat{i}$, por tanto, el ángulo de refracción ($\hat{r}$) tiene que ser mayor que el ángulo de incidencia ($\hat{i}$), ya que cuanto mayor sea el ángulo, mayor será el seno.

El máximo valor que puede tener el ángulo refractado es 90º (si fuera mayor el rayo volvería a entrar en el vidrio y se daría el fenómeno de la reflexión y no de la refracción). A este valor de $\hat{r}$, le corresponde un valor de $\hat{i}$ llamado ángulo límite, que es igual a:

$$1.5242 \operatorname{sen} \hat{i}_L = \operatorname{sen} 90º \rightarrow \operatorname{sen} \hat{i}_L = \frac{1}{1.5242} \rightarrow \mathbf{\hat{i}_L = 41º}$$