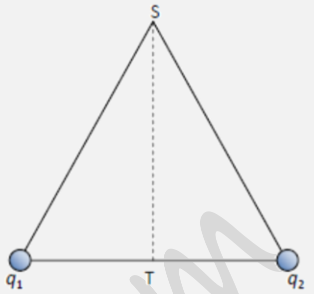
Universidad de Castilla La Mancha – Junio – 2009

Opción A

Problemas:

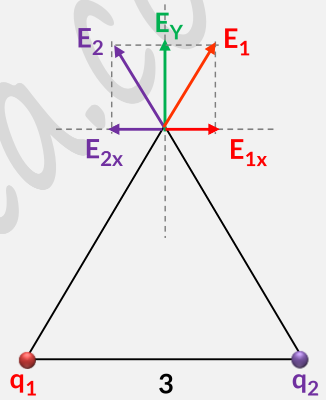
1.- En dos de los vértices de un triángulo equilátero de 3 m de lado se sitúan dos cargas puntuales iguales, $q_1=q_2= +3\ \mu C$ como se indica en la figura. Determina:



a) El campo electrostático en el vértice libre S
b) El potencial electrostático en el vértice libre S y en el punto T situado en el punto medio entre las cargas.
c) El trabajo realizado por las fuerzas eléctricas cuando desplazamos una carga puntual de $-2\mu C$ desde punto S hasta el punto T.

$k = 9'00 \cdot 10^9 N\ m^2C^{-2}$, $1\mu C=10^{-6}C$

El campo electrostático es una magnitud vectorial que se calcula como la suma de los vectores intensidad de campo debidos a cada carga en un punto dado. En este caso, en el punto S tenemos:



Como se ve en la figura, las componentes verticales de ambos vectores intensidad de campo son iguales y las componentes horizontales se anulan, por tanto, el vector intensidad de campo en el punto S será:

$$\vec{E} = 2\overrightarrow{E_y} = 2 \cdot k\ \frac{q}{R^2}(\vec{j}) = 2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{3 \cdot 10^{-6}}{3^2}(\vec{j}) = \rightarrow \vec{E} = 6000\ {}^{N}/{}_{C}\ \vec{j}$$

El potencial es una magnitud escalar, siendo en un punto la suma de los potenciales debidos a cada carga. En el punto S tenemos que los potenciales debidos a ambas cargas son iguales, ya que las cargas y la distancia que las separa del punto S son las mismas, por tanto

$$V_S = V_1 + V_2 = 2\ k\ \frac{q}{R} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{3 \cdot 10^{-6}}{3} \rightarrow V_S = 18000\ V$$

En el punto T ocurre lo mismo:

$$V_T = V_1 + V_2 = 2\ k\ \frac{q}{R} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{3 \cdot 10^{-6}}{1.5} \rightarrow V_T = 36000\ V$$

El trabajo necesario para llevar una carga de $-2\mu C$ desde S hasta T, será igual a:

$$W_{S \to T} = -q\Delta V = -2 \cdot 10^{-6}(36000 - 18000) \rightarrow W_{S \to T} = -0.036\ Jul$$

El que el signo del trabajo sea negativo, significa que lo realiza el campo eléctrico.

2.- El satélite artificial Swift de 1500 kg de masa, dedicado al estudio de explosiones de rayos gamma, gira en una órbita circular a una altura de 284 km sobre la superficie terrestre, determina:

a) La velocidad orbital del satélite y su energía mecánica
b) El periodo orbital expresado en minutos
c) El peso de un sensor de rayos X de 130 kg de masa que viaja con el satélite

($G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2kg^{-2}$, $M_{TIERRA}= 5'98 \cdot 10^{24}$ kg, R_{TIERRA}=6370 km)

Para calcular la velocidad orbital nos valemos de que la fuerza gravitatoria actúa como fuerza central, es decir:

$$|\overrightarrow{F_g}| = |\overrightarrow{F_C}| \rightarrow G\ \frac{M\ m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\ M}{R}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot\ 5.98 \cdot 10^{24}}{(284 + 6370) \cdot 10^3}} \rightarrow v = 7742.33\ {}^{m}/{}_{s}$$

El periodo está relacionado con la velocidad orbital por medio de la velocidad angular:

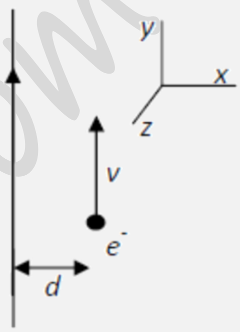
$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{R} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{v/R} = \frac{2\,\pi\,R}{v} = \frac{2\,\pi\cdot(284+6370)\cdot 10^3}{7742.33} \rightarrow \boldsymbol{T = 85399.96\ seg = 89.99\ min}$$

El peso del sensor será:

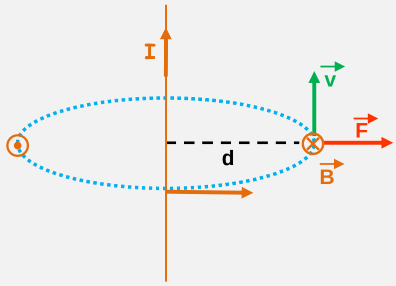
$$P = m\cdot g = m\cdot G\cdot\frac{M}{R^2} = 130\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5.98\cdot 10^{24}}{(6.65\cdot 10^6)^2} \rightarrow \boldsymbol{P = 1.17\cdot 10^{11}\ N}$$

Cuestiones:

3.- Un electrón circula paralelo a un hilo conductor a una distancia d de éste con una velocidad v, por el hilo circula una corriente eléctrica de intensidad I. Escribe la expresión vectorial del campo magnético en el punto donde se encuentra el electrón y de la fuerza magnética ejercida sobre el electrón



El campo magnético producido por una corriente rectilínea indefinida tiene dirección tangencial a las líneas de campo (circunferencias concéntricas al hilo) en el plano perpendicular a la corriente, y su sentido lo dicta la regla de la mano derecha. Su expresión vectorial viene dada por:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0\,I}{2\pi\,d}\,\vec{u}_d \rightarrow \boldsymbol{\vec{B} = -\frac{\mu_0\,I}{2\pi\,d}\,\vec{\imath}}$$

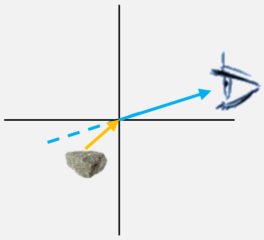
La Fuerza magnética que actúa sobre el electrón viene dada por la Ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}) = -q_e\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & v \\ -\dfrac{\mu_0\,I}{2\pi\,d} & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\vec{F} = -q_e\frac{\mu_0\,I}{2\pi\,d}\,\vec{\jmath}}$$

Es una fuerza repulsiva.

4.- Observamos una pequeña piedra que esta incrustada bajo una plancha de hielo, razona si su profundidad aparente es mayor o menor que su profundidad real. Traza un diagrama de rayos para justificar tu respuesta.

La profundidad aparente es menor que la real. Al pasar el rayo de un medio de mayor índice de refracción (n_{hielo}=1.3) a otro de menor índice de refracción (n_{aire}=1), se refracta alejándose de la normal. Si prolongamos este rayo vemos el objeto aparentemente a menor distancia que la normal.



5.-

a) En qué consiste el efecto fotoeléctrico
b) ¿Se produce corriente fotoeléctrica cuando luz ultravioleta de 100 nm de longitud de onda incide sobre una superficie de zinc cuya función de trabajo es 4'31 eV?

h=6'626·10^{-34}J s, c=3'00·108 m s^{-1}, 1 eV = 1'602·10^{-19}J , 1nm=10^{-9}m)

El efecto fotoeléctrico es la emisión de electrones por parte de un metal cuando es iluminado por radiación electromagnética de determinada longitud de onda. Esta radiación electromagnética produce dos fenómenos en el metal:

- Por una parte arranca electrones de la superficie del metal, para lo cual es preciso que sus fotones tengan una energía mínima para vencer las fuerzas que ligan a los electrones en el metal. Dicha energía mínima se conoce con el nombre de trabajo de extracción, y es característica de cada metal, y la frecuencia mínima necesaria para aportar el trabajo de extracción se conoce como frecuencia umbral (frecuencia mínima de la radiación electromagnética incidente por debajo de la cual no se produce emisión de fotones): $W_{extracción} = h\cdot f_0$

- Por otro lado comunica energía cinética a los electrones liberados (siempre que la frecuencia de la radiación incidente sea mayor que la frecuencia umbral): $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

La ecuación de Einstein para explicar el efecto fotoeléctrico es:

$$E_i = W + E_C$$

El efecto fotoeléctrico se dará siempre y cuando la frecuencia del haz incidente sea mayor que la frecuencia umbral del metal. La frecuencia umbral la calculamos a partir del trabajo de extracción:

$$W = h \cdot f_0 \rightarrow f_0 = \frac{W}{h} = \frac{4.31 eV \cdot \frac{1.602 \cdot 10^{-19} Jul}{1\ eV}}{6.626 \cdot 10^{-34}} \rightarrow \boldsymbol{f_0 = 2.99 \cdot 10^{15}\ Hz}$$

La frecuencia de la luz incidente la calculamos a partir de la longitud de onda de dicho haz:

$$c = f \cdot \lambda \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^{-9}} \rightarrow \boldsymbol{f = 3 \cdot 10^{15}\ Hz}$$

Por tanto, como la frecuencia de la luz incidente es aproximadamente igual que la frecuencia umbral **SÍ** se producirá efecto fotoeléctrico.

Cuestión Experimental:

6.- En el laboratorio del instituto medimos cinco veces el tiempo que un péndulo simple de 80'0 cm de longitud tarda en describir 40 oscilaciones de pequeña amplitud. Los resultados de la medición se muestran en la tabla. Determina el valor de la aceleración de la gravedad

Experiencia	Nº Oscilaciones	Tiempo
1ª	40	72 s
2ª	40	74 s
3ª	40	72 s
4ª	40	71 s
5ª	40	70 s

El periodo de un péndulo simple viene dado en función de la gravedad, por lo que podemos despejar ésta de la expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

El periodo de cada péndulo es igual al tiempo invertido por cada uno de ellos entre 5 oscilaciones, por tanto, podemos calcular la gravedad para cada péndulo y luego calcular la media aritmética:

Experiencia	Nº Osc.	Tiempo	$T = \frac{t}{40\ osc.}$	g(m/s²)
1ª	40	72 s	1.8	9.747
2ª	40	74 s	1.85	9.228
3ª	40	72 s	1.8	9.747
4ª	40	71 s	1.775	10.024
5ª	40	70 s	1.75	10.313

$$g = \frac{9.747 + 9.228 + 9.747 + 10.024 + 10.313}{5}$$

$$\boldsymbol{g = 9.81\ {}^{m}/_{s^2}}$$

Opción B

Problemas:

1.- En una cuerda se propaga una onda armónica cuya ecuación expresada en el sistema internacional de unidades es:

$$y(x,t) = 0'2\ sen(2t + 4x + \pi/4)$$

Calcula:

a) El periodo, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación
b) La velocidad y aceleración máxima de vibración de un punto cualquiera de la cuerda
c) La diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda separados por una distancia de 50 cm

Comparamos la ecuación dada con la ecuación de una onda armónica:

$$\begin{matrix} y(x,t) = 0'2\ sen(2t + 4x + \pi/4) \\ y(x,t) = A\ sen(\omega t \pm kx + \delta_0) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} A = 0.2\ m \\ \omega = 2\ {}^{rad}/_{s} \\ +: sentido\ negativo\ OX \\ k = 4\ m^{-1} \\ \delta_0 = \frac{\pi}{4}\ rad \end{cases}$$

La longitud de onda la calculamos a partid del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{4} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0.5\pi\ m}$$

La velocidad de propagación a partir del número de onda y la frecuencia angular:

$$k = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{2}{4} \rightarrow \boldsymbol{v = 0.5\ ^{m}/_{s}}$$

El periodo está relacionado con la longitud de onda y la velocidad de propagación:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0.5\pi}{0.5} \rightarrow \boldsymbol{T = \pi\ s}$$

Por último, la frecuencia es la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow \boldsymbol{f = \frac{1}{\pi}\ s^{-1}}$$

La velocidad de vibración viene dada por la derivada de la posición en función del tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\ cos(\omega t + kx + \delta_0)$$

Esta velocidad será máxima cuando el coseno tome el valor de 1:

$$v_{máx} = A\omega = 0.2 \cdot 2 \rightarrow \boldsymbol{v_{máx} = 0.4\ ^{m}/_{s}}$$

La aceleración de vibración viene dada por la derivada de la velocidad en función del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\ sen\ (\omega t + kx + \delta_0)$$

Esta aceleración será máxima cuando el seno tome el valor de -1:

$$a_{máx} = A\omega^2 = 0.2 \cdot 2^2 \rightarrow \boldsymbol{a_{máx} = 0.8\ ^{m}/_{s^2}}$$

Fase del primer punto: $\delta_1 = 2t + 4x_1 + \frac{\pi}{4}$

Fase del segundo punto: $\delta_2 = 2t + 4x_2 + \frac{\pi}{4}$

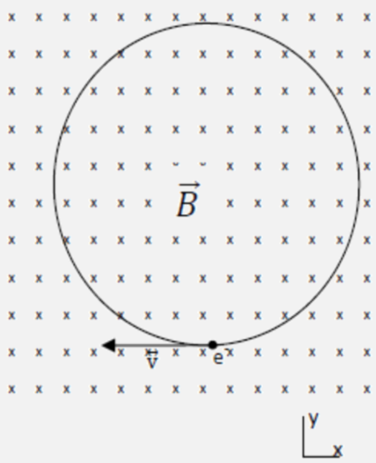
Diferencia de fase entre ambos:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \left|\left(2t + 4x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(2t + 4x_2 + \frac{\pi}{4}\right)\right| = |x_1 - x_2| = 0.5 \rightarrow \boldsymbol{\Delta\delta = 0.5\ rad}$$

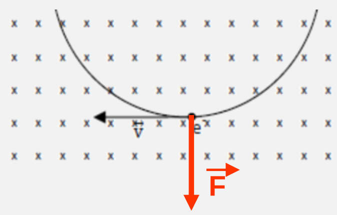
2.- Un electrón describe una órbita circular en el seno de un campo magnético uniforme de 0'080T perpendicular al plano de la órbita con un módulo de velocidad de 3'0·10^{6}m/s. Determina:

a) La expresión vectorial de fuerza magnética ejercida sobre el electrón cuando éste se encuentra en el punto inferior de la órbita.
b) El módulo de la aceleración del electrón y el radio de la órbita
c) El tiempo que invierte el electrón en describir una órbita completa.

e = 1'602·10^{-19}C , me = 9'109·10^{-31}kg



La Fuerza magnética que actúa sobre el electrón viene dada por la Ley de Lorentz. Si observamos la figura vemos que el campo magnético está dirigido en el sentido negativo del eje z, y la velocidad el negativo del eje x. Por tanto:



$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = -1.602 \cdot 10^{-19} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.08 \end{vmatrix} = -1.602 \cdot 10^{-19}(-2.4 \cdot 10^5 \vec{j})$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\vec{F} = -3.84 \cdot 10^{-14}\ \vec{j}\ N}$$

Es una fuerza repulsiva.

Para que el electrón describa una trayectoria circular, la fuerza magnética tiene que tener en mismo módulo que la fuerza centrípeta:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_C| \rightarrow 3.84 \cdot 10^{-14} = m \cdot a_c \rightarrow a_c = \frac{3.84 \cdot 10^{-14}}{9.109 \cdot 10^{-31}} \rightarrow \boldsymbol{a_c = 4.22 \cdot 10^{16}\ m/_{s^2}}$$

El radio de la órbita lo calculamos a partir de la aceleración:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_c} = \frac{(3 \cdot 10^6)^2}{4.22 \cdot 10^{16}} \rightarrow \boldsymbol{R = 2.13 \cdot 10^{-4} m}$$

El tiempo que tarda en describir una órbita completa es el periodo:

$$T = \frac{2\pi\ m}{q\ B} = \frac{2\pi\ 9.109 \cdot 10^{-31}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.08} = \frac{(3 \cdot 10^6)^2}{4.22 \cdot 10^{16}} \rightarrow \boldsymbol{T = 4.46 \cdot 10^{-10}\ seg}$$

Cuestiones:

3.- La Tierra tiene un campo eléctrico cerca de su superficie que es aproximadamente de 150N/C dirigido hacia abajo. Comparar las fuerzas eléctrica y gravitatoria ejercidas sobre un electrón en la superficie terrestre. Indica la dirección y sentido de la fuerza eléctrica.
$e = 1'602 \cdot 10^{-19}$C , $m_e = 9'109 \cdot 10^{-31}$kg , $g=9'81 ms^{-2}$

La fuerza eléctrica ejercida sobre el electrón viene dada por:

$$|\vec{F}_e| = E \cdot q = 150 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \rightarrow \boldsymbol{|\vec{F}_e| = 2.403 \cdot 10^{-17}\ N}$$

Como la carga es negativa, la fuerza tiene sentido contrario al campo eléctrico, es decir la fuerza está dirigida **hacia arriba**.

La fuerza gravitatoria ejercida sobre el electrón viene dada por:

$$|\vec{F}_g| = g \cdot m = 9.81 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \rightarrow \boldsymbol{|\vec{F}_g| = 8.93 \cdot 10^{-30}\ N}$$

Es decir, **la fuerza gravitatoria es mucho menor** de hecho es **$2.69 \cdot 10^{12}$ veces menor**.

$$\frac{|\vec{F}_e|}{|\vec{F}_g|} = \frac{2.403 \cdot 10^{-17}}{8.93 \cdot 10^{-30}} = 2.69 \cdot 10^{12}$$

4.-

a) Escribe y comenta la Ley de Gravitación Universal
b) Dos planetas esféricos tienen la misma masa $m_1 = m_2$, pero la aceleración de la gravedad en la superficie del primero es tres veces mayor que en la del segundo, $g_1 = 3\ g_2$. Calcula la relación entre los radios de los dos planetas.

La ley de gravitación universal es una ley física que describe la interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa. Fue enunciada por Newton, quien dedujo que la fuerza con que se atraen dos cuerpos de diferente masa únicamente depende del valor de sus masas y del cuadrado de la distancia que los separa. También observó que dicha fuerza actúa de tal forma que es como si toda la masa de cada uno de los cuerpos estuviese concentrada únicamente en su centro. Esta ley predice que la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas M y m separados una distancia es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir:

$$\vec{F}_g = -G\frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_R$$

Siendo G la constante de la Gravitación Universal ($6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$). Es decir, cuanto más pesados sean los cuerpos y más cercanos se encuentren, con mayor fuerza se atraerán.

En el caso de los dos planetas, la fuerza gravitatoria en función de la aceleración de la gravedad viene dada por:

$$|\vec{F}_g| = g \cdot m \xrightarrow{g_1 = 3\ g_2} \frac{F_1}{F_2} = \frac{3g_2 \cdot m_1}{g_2 \cdot m_2} \xrightarrow{m_1 = m_2} \boldsymbol{F_1 = 3F_2}$$

La fuerza gravitatoria en función de los radios viene dada por la ley de la gravitación universal:

$$F_g = G\frac{M \cdot m}{R^2} \xrightarrow{F_1 = 3\ F_2} G\frac{M \cdot m_1}{{R_1}^2} = 3\ G\frac{M \cdot m_2}{{R_2}^2} \rightarrow \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 3 \rightarrow \boldsymbol{\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{3}}$$

5.- El ${}^{238}_{92}U$ se desintegra radiactivamente para producir ${}^{234}_{90}Th$

a) Indica el tipo de emisión radiactiva y escribe la ecuación de dicha reacción nuclear
b) Calcula la energía liberada en la reacción

c=3'00·10^8 m s^{-1}, m (^{238}U)=238'050784u, m (^{234}Th)=234'043593u, m (^{4}He)=4'002602 u, 1u=1'66·10^{-27}kg

En la desintegración radiactiva que ha sufrido el ${}^{238}_{90}U$, el número másico se ha reducido en 4 unidades y el número atómico en dos unidades. Se trata de una radiación de partículas alfa, es decir, núcleos de ${}^{4}_{2}He$ que son expulsados del núcleo atómico.

$${}^{238}_{90}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$$

El defecto de masa en esta reacción es de:

$$\Delta m = M({}^{238}_{90}U) - M({}^{234}_{90}Th) + M({}^{4}_{2}He) = 238.050784 - 234.043593 + 4.002602 \rightarrow \boldsymbol{\Delta m} = 8.009793\ u \cdot \frac{1.66 \cdot 10^{-27} kg}{1u} = \mathbf{1.32 \cdot 10^{-26} kg}$$

La energía liberada en la reacción es de:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 1.32 \cdot 10^{-26} (3 \cdot 10^8)^2 \rightarrow \boldsymbol{E = 1.19 \cdot 10^{-9}\ Jul}$$

Cuestión Experimental:

6.- En un laboratorio de investigación se han medido los siguientes ángulos de refracción cuando un haz luminoso incide desde el agua (n_{agua}=1'33) hacía un superficie de un material transparente desconocido cuyo índice de refracción pretendemos determinar. Calcula el índice de refracción de dicho material. ¿Qué ley física has tenido en cuenta para calcular el índice de refracción?

Experiencia	Ángulo de Incidencia	Ángulo de Refracción
1ª	18º	14º
2ª	26º	20º
3ª	35º	27º
4ª	44º	33º

La refracción sigue la Ley de Snell: el producto del seno del ángulo de incidencia por el índice de refracción del medio de donde proviene la luz es igual al producto del seno del ángulo de refracción por el índice de refracción del medio al que va la luz.

$$n_1\ sen\ \hat{\imath} = n_2\ sen\ \hat{r}$$

Para calcular el índice de refracción aplicamos la ley de Snell a los datos de la tabla. Por último, el índice de refracción del material desconocido será la media aritmética de los distintos índices calculados:

$$n_2 = n_1 \cdot \frac{sen\ \hat{\imath}}{sen\ \hat{r}} \rightarrow \boldsymbol{n_2 = 1.33 \cdot \frac{sen\ \hat{\imath}}{sen\ \hat{r}}}$$

Experiencia	$\hat{\imath}^o$	$\hat{r}^o$	n_2
1ª	18	14	1.699
2ª	26	20	1.705
3ª	35	27	1.680
4ª	44	33	1.696

$$n_2 = \frac{1.699 + 1.705 + 1.680 + 1.696}{4} \rightarrow \boldsymbol{n_2 = 1.695}$$