Universidad de Castilla La Mancha – Junio – 2007

Opción A

Problemas:

1.- Dos esferas conductoras aisladas, de 12 y 20 cm de radio, se encuentran en una zona del espacio vacío y con sus centros separados 10 m, están cargadas cada una con una carga de $25\cdot10^{-9}$ C. Las cargas se ponen en contacto mediante un hilo conductor y se alcanza una situación de equilibrio. Calcula:

a) ¿Qué fuerza se ejercen entre sí ambas esferas cuando están aisladas?
b) El potencial al que se encuentra cada una de las esferas antes de ponerlas en contacto.
c) La carga y el potencial de cada esfera cuando, una vez conectadas, se establece el equilibrio.

$k = 9'00\cdot10^{9}\,N\,m^{2}C^{-2}$

La fuerza entre ambas cargas se calcula mediante la ley de Coulomb:

$$F = k\cdot\frac{q\,q'}{r^2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{(25\cdot10^{-9})^2}{10^2} \to \boldsymbol{F_e = 5.6\cdot10^{-8}\,N}$$

El potencial de cada esfera aislada se puede calcular a partir de su carga y su radio:

$$V_1 = k\cdot\frac{q_1}{R_1} = 9\cdot10^9\cdot\frac{25\cdot10^{-9}}{0.12} \to \boldsymbol{V_1 = 1875\,V}$$

$$V_2 = k\cdot\frac{q_2}{R_2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{25\cdot10^{-9}}{0.20} \to \boldsymbol{V_2 = 1125\,V}$$

Al conectarse las esferas y establecerse el equilibrio, los potenciales se igualan. Además, como la carga se conserva, la carga total es la suma de las cargas de ambas esferas. Pero las cargas se redistribuyen hasta que ambas esferas adquieren el mismo potencial eléctrico:

$$V_1 = V_2 \to k\cdot\frac{q'_1}{R_1} \to F_e = k\cdot\frac{q'_2}{R_2} \to \boldsymbol{\frac{q'_1}{0.12} = \frac{q'_2}{0.20}}$$

La conservación de la carga nos proporciona la ecuación que nos falta para resolver el problema mediante un sistema:

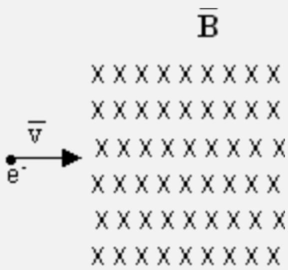
$$\boldsymbol{q'_1 + q'_2 = 25\cdot10^{-9}} \to \begin{cases} 0.20\,q'_1 = 0.12\,q'_2 \\ q'_1 + q'_2 = 25\cdot10^{-9} \end{cases} \to \{q'_1 = 25\cdot10^{-9} - q'_2 \to 0.20\,(25\cdot10^{-9} - q'_2) = 0.12\,q'_2 \to \boldsymbol{q'_2}$$

$$\boldsymbol{= 1.56\cdot10^{-8}\,C \to q'_1 = 9.375\cdot10^{-9}\,C}$$

El potencial eléctrico de ambas esferas, una vez que se alcanza el equilibrio, es el mismo. Lo calculamos a partir de las nuevas cargas:

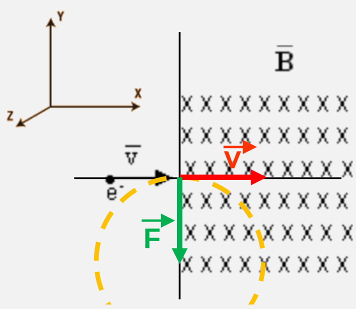
$$V'_1 = V'_2 = k\cdot\frac{q'_1}{R_1} = 9\cdot10^9\cdot\frac{9.375\cdot10^{-9}}{0.12} \to \boldsymbol{V'_1 = V'_2 = 703.125\,V}$$

2.- Un electrón se acelera desde el reposo por la acción de una diferencia de potencial de 500V, penetrando a continuación en un campo magnético uniforme de 0'04 T perpendicular a la trayectoria del electrón como indica la figura. Determinar:



a) La velocidad del electrón al entrar en el campo magnético.
b) La fuerza que el campo ejerce sobre el electrón.
c) El radio de la trayectoria del electrón en el interior del campo magnético.

$e = 1'602\cdot10^{-19}C$, $m_e = 9'109\cdot10^{-31}kg$



Al acelerar el electrón sólo interviene el campo eléctrico causado por la diferencia de potencial y dicho campo es conservativo, por tanto:

$$\Delta E_m = 0 \to E_{m.0} = E_{m.F} \to E_{C.0} + E_{P.0} = E_{C.F} + E_{P.F} \to 0 + E_{P.0} = E_{C.F} + E_{P.F} \to E_{C.F}$$

$$= -\Delta E_P \to E_{C.F} = -W \to \frac{1}{2}m\cdot v_f^2 = -q\Delta V \to v = \sqrt{\frac{2q\,\Delta V}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot1.60\cdot10^{-19}\cdot500}{9.11\cdot10^{-31}}} \to \boldsymbol{v = 1.32\cdot10^{7}\,\vec{\imath}\ {}^{m}/_{s}}$$

La fuerza viene determinada por la ley de Lorentz:

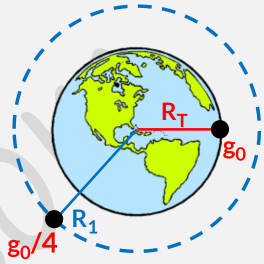
$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -1.60 \cdot 10^{-19} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1.32 \cdot 10^{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{vmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\vec{F} = -8.48 \cdot 10^{-14}\, \vec{\jmath}\, N}$$

Esta fuerza actúa como fuerza central:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_C| \rightarrow |\vec{F}_m| = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{m \cdot v^2}{|\vec{F}_m|} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot (1.32 \cdot 10^{7})^2}{8.48 \cdot 10^{-14}} \rightarrow \boldsymbol{R = 1.87 \cdot 10^{-3}\, m = 1.87\, mm}$$

Cuestiones:

3.- Calcula la distancia al centro de la Tierra de un punto donde la aceleración de la gravedad es g/4.
Dato: Radio terrestre = 6'37·10^{6} m.



En un punto de la superficie terrestre:

$$|\vec{P}| = |\vec{F}_g| \rightarrow m \cdot g_0 = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} \rightarrow \boldsymbol{g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}}$$

En un punto donde la aceleración de la gravedad es la cuarta parte que en la superficie terrestre:

$$\boldsymbol{\frac{g_0}{4} = G \cdot \frac{M_T}{R_1^2}}$$

En ambas ecuaciones, lo que no cambia es el producto $G \cdot M_T$:

$$\left.\begin{aligned} G \cdot M_T &= g_0 \cdot R_T^2 \\ G \cdot M_T &= \frac{g_0 \cdot R_1^2}{4} \end{aligned}\right\} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = \frac{g_0 \cdot R_1^2}{4} \rightarrow R_1 = \sqrt{4 \cdot R_T^2} \rightarrow \boldsymbol{R_1 = 2 \cdot R_t} = \sqrt{4 \cdot (6.37 \cdot 10^{6})^2} \rightarrow \boldsymbol{R_1 = 1.274 \cdot 10^{7} m}$$

Es decir, para que la aceleración de la gravedad se reduzca a la cuarta parte habrá que situarse a una distancia igual al doble del radio terrestre.

4.- Si la amplitud de un oscilador armónico simple se triplica, ¿en qué factor se modifica la energía? Razona la respuesta.

La energía mecánica de un oscilador armónico simple viene dada por:

$$E_m = \frac{1}{2}\, k \cdot A^2$$

Si la amplitud se triplica:

$$E'_m = \frac{1}{2}\, k \cdot (3A)^2 \rightarrow \boldsymbol{E'_m = 9E_m}$$

Es decir, la energía mecánica se multiplica por 9.

5.- Explica un experimento para observar el fenómeno de la reflexión total y medir el ángulo límite. Detalla los materiales e instrumentos de medida utilizados, el procedimiento experimental y el fundamento teórico del experimento

6.- Se tienen 200 g de una muestra radiactiva cuya velocidad de desintegración es tal que al cabo de un día nos quedan solo el 75% de la misma. Calcula:

a) La constante de desintegración.
b) La masa que quedará después de 22 días.

Según la ley de decaimiento radiactivo: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$
Por otro lado, la masa de la muestra:

$$m = N \cdot \frac{1\, mol}{N_{Avogadro}} \cdot \frac{PM\, gr}{1\, mol}$$

Esta expresión es la misma para m y mo. Por tanto:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow 0.75 \cdot 200 = 200 \cdot e^{-\lambda \cdot 1 día} \rightarrow Ln\, \frac{150}{200} = -\lambda \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0.29\, d^{-1}}$$

A los 22 días quedarán:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} = 200 \cdot e^{-0.29 \cdot 22 días} \rightarrow \boldsymbol{m = 0.34\, gr}$$

Opción B

Problemas:

1.- La ecuación de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda, expresada en unidades del S.I. es:

$$y(x,t) = 0'03 sen(2t + 10x + \pi/6)$$

Determina:

a) La frecuencia, la longitud de onda y velocidad de propagación de dicha onda.
b) La diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda separados una distancia de 20 cm.
c) La velocidad máxima de vibración de un punto cualquiera de la cuerda.

Comparamos la ecuación dada con la ecuación de una onda armónica:

$$\begin{matrix} y(x,t) = 0'03\ sen\left(2t + 10x + \frac{\pi}{6}\right) \\ y(x,t) = A\ sen(\omega t \pm kx + \delta_0) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} A = 0.03\ m \\ \omega = 2\ {rad}/{s} \\ +: sentido\ negativo\ OX \\ k = 10\ m^{-1} \\ \delta_0 = \frac{\pi}{6}\ rad \end{cases}$$

La frecuencia está relacionado con la frecuencia angular:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} \rightarrow \boldsymbol{f = 0.318\ Hz}$$

La longitud de onda la calculamos a partid del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{10} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0.628\ m}$$

La velocidad de propagación a partir del número de onda y la frecuencia angular:

$$k = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{2}{10} \rightarrow \boldsymbol{v = 0.2\ {m}/{s}}$$

Fase del primer punto: $\delta_1 = 2t + 10x_1 + \frac{\pi}{6}$

Fase del segundo punto: $\delta_2 = 2t + 10x_2 + \frac{\pi}{6}$

Diferencia de fase entre ambos:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \left|\left(2t + 10x_1 + \frac{\pi}{6}\right) - \left(2t + 10x_2 + \frac{\pi}{6}\right)\right| = |x_1 - x_2| = 0.2 \rightarrow \boldsymbol{\Delta\delta = 0.2\ rad}$$

La velocidad de vibración viene dada por la derivada de la posición en función del tiempo:

$$v(x,t) = \frac{dy}{dt} = A\omega\ cos(\omega t + kx + \delta_0)$$

La velocidad máxima se alcanzará cuando el coseno tome el valor de +1:

$$v_{Máx.} = A\omega = 0.03 \cdot 2 \rightarrow \boldsymbol{v_{Máx.} = 0.06\ {m}/{s}}$$

2.- Un satélite en órbita geoestacionaria describe una órbita circular en el plano ecuatorial de la Tierra de forma que se encuentra siempre encima del mismo punto de la Tierra, es decir su periodo orbital es 24 horas. Determina:

a) El radio de su órbita y la altura a la que se encuentra el satélite sobre la superficie terrestre
b) La velocidad orbital
c) Su energía mecánica si la masa del satélite es 72kg

$G = 6'67 \cdot 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$, $M_{TIERRA} = 5'98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{TIERRA} = 6370$ km

La fuerza gravitatoria actúa como fuerza central, además el periodo lo podemos relacionar con la frecuencia angular y esta con la velocidad orbital:

$$|\vec{F_g}| = |\vec{F_C}| \rightarrow G\frac{M\,m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow G\frac{M}{R} = v^2 \rightarrow G\frac{M}{R} = (\omega \cdot R)^2 \rightarrow G\frac{M}{R} = \omega^2 \cdot R^2 \rightarrow G\frac{M}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R^2 \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} \rightarrow \boldsymbol{R = 4.225 \cdot 10^7\ m}$$

La altura de la órbita será igual a:

$$h = R - R_T = 4.225 \cdot 10^7 - 6370 \cdot 10^3 \rightarrow \boldsymbol{h = 3.588 \cdot 10^7\ m}$$

Su velocidad orbital será:

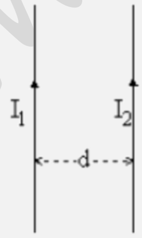
$$|\vec{F_g}| = |\vec{F_C}| \rightarrow G\frac{M\,m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot\ 5.98 \cdot 10^{24}}{4.225 \cdot 10^7}} \rightarrow \boldsymbol{v = 3072.56\ {}^{m}/_{s}}$$

Su energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}m \cdot v^2 - G\frac{M\,m}{R} = \frac{1}{2}72 \cdot (3072.56)^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 72}{4.225 \cdot 10^7} \rightarrow \boldsymbol{E_M = -3.39 \cdot 10^8\ Jul}$$

Cuestiones:

3.-



a) Explica detalladamente por qué se atraen los dos conductores paralelos de la figura por los que circulan en sentido ascendente dos corrientes eléctricas I_1 e I_2

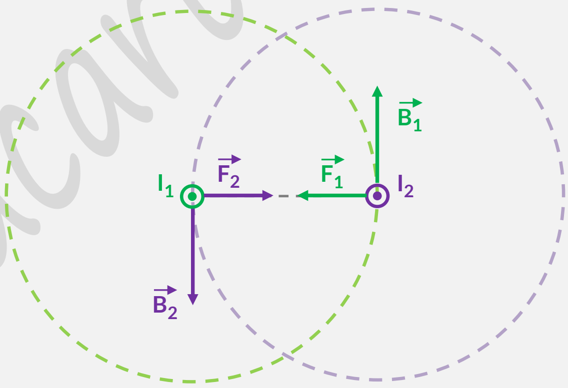
b) Determina el valor de dicha fuerza por unidad de longitud si $I_1 = I_2 = 2A$ y d=1 m.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A

Las fuerzas magnéticas entre dos conductores rectilíneos por los que circula corriente son iguales y de sentidos opuestos, como vemos en la figura (vista desde arriba). Estas fuerzas son perpendiculares al campo y al conductor (actúan en dirección radial):

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \ell}{d}\ \vec{u_r}$$

En este caso, como las dos corrientes tienen el mismo sentido, su producto siempre será positivo y la fuerza será atractiva.



La fuerza por unidad de longitud será:

$$\frac{\vec{F}}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{2 \cdot 2}{1} \rightarrow \boldsymbol{\frac{\vec{F}}{\ell} = 8 \cdot 10^{-7}\ {}^{N}/_{m}}$$

4.- En un televisor convencional de tubo de rayos catódicos un haz de electrones es acelerado mediante un campo eléctrico. Estima la velocidad máxima de los electrones si parten desde el reposo y la diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo es de 1 kilovoltio.

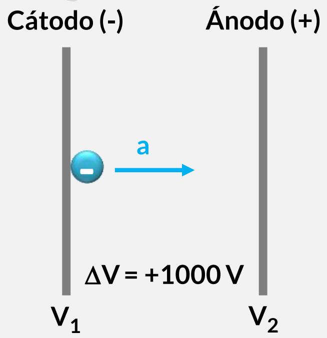
$m_e = 9'11 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1'602 \cdot 10^{-19}$C

Por conservación de la energía:

$$E_m = cte \rightarrow E_{C.1} + E_{P.1} = E_{C.2} + E_{P.2} \xrightarrow{v_1=0} E_{P.1} = E_{C.2} + E_{P.2} \rightarrow \boldsymbol{E_{C.2} = E_{P.2} - E_{P.1}}$$

Por otro lado:

$$\Delta E_P = q \cdot \Delta V = -1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1000 \rightarrow \boldsymbol{\Delta E_P = -1.602 \cdot 10^{-16}\ Jul}$$

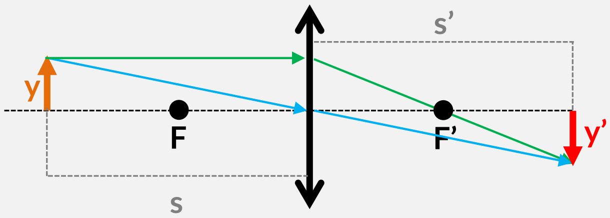


Es decir, los electrones ganarán $1.602 \cdot 10^{-16}$ Jul que los invertirán en energía cinética, por tanto:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = 1.602 \cdot 10^{-16} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-16}}{9.11 \cdot 10^{-31}}} \rightarrow \boldsymbol{v = 1.87 \cdot 10^7\ {}^{m}/_{s}}$$

5.- Obtén gráficamente la imagen de un objeto situado a una distancia de una lente delgada convergente igual a dos veces su distancia focal. Indica las características de la imagen obtenida.

Hacemos el trazado de rayos:



La ecuación de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{s}\xrightarrow{s=-2f'}\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{-2f'}\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{2f'}\rightarrow \boldsymbol{s'=2f'=-s}$$

El aumento de la imagen será:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\rightarrow y'=y\cdot\frac{s'}{s}\rightarrow y'=y\cdot\frac{-s}{s}\rightarrow \boldsymbol{y'=-y}$$

La imagen es real, invertida y del mismo tamaño.

6.- ¿Cuál es la hipótesis cuántica de Planck?

Cuando un trozo de metal se calienta sus átomos absorben la radiación térmica y emiten radiación electromagnética. Si la temperatura no es muy alta no se aprecia cambio de color alguno en el metal, aunque desprende calor (REM no visible: infrarroja). Si seguimos aumentando la temperatura la REM emitida se corresponde con las frecuencias de la luz visible. El metal adquiere primero un color rojo oscuro, después rojo intenso, amarillo y a temperaturas elevadas podremos apreciar un amarillo muy pálido, casi blanco.
Los datos experimentales de la radiación emitida por un emisor perfecto (el cuerpo negro), indican que el poder emisivo cae bruscamente para longitudes de onda pequeñas (frecuencias altas).
Max Planck en 1900 presentó una expresión teórica que se adaptaba muy bien a la curva experimental obtenida para la emisión de radiación por el cuerpo negro:

$$E = h\cdot f$$

Siendo h una constante igual a $6.63\cdot10^{-34}$ J s
Para llegar a esta expresión Planck tuvo que introducir una extraña hipótesis: "*Los intercambios de energía entre materia y radiación tienen lugar no de manera continua, sino por cantidades discretas e indivisibles o cuantos de energía (proporcional a la frecuencia de la radiación)*".
Su hipótesis se resume en que: **La energía se absorbe y emite en forma de cuantos. La absorción y emisión de energía por la materia se realiza "a saltos"**.