# FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

## COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

**EJERCICIO 1 : Dadas las siguientes funciones : $f(x)=\frac{-3x+2}{4}$ y $g(x)=x^2+1$, halla :**

**a) $(f\circ g)(x)$ b) $(g\circ g)(x)$**

*Solución:*

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[x^2+1\right]=\frac{-3\left(x^2+1\right)+2}{4}=\frac{-3x^2-3+2}{4}=\frac{-3x^2-1}{4}$

b) $(g\circ g)(x)=g[g(x)]=g\left[x^2+1\right]=\left(x^2+1\right)^2+1=x^4+2x^2+1+1=x^4+2x^2+2$

**EJERCICIO 2 : Las funciones $f$ y $g$ están definidas por $f(x)=\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=x+1$. Calcula :**

**a) $(f\circ g)(x)$ b) $(g\circ g\circ f)(x)$**

*Solución:*

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[x+1]=\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{x^2+2x+1}{3}$

b) $(g\circ g\circ f)(x)=g[g[f(x)]]=g\left[g\left(\frac{x^2}{3}\right)\right]=g\left(\frac{x^2}{3}+1\right)=\frac{x^2}{3}+1+1=\frac{x^2}{3}+2$

**EJERCICIO 3 : Sabiendo que: $f(x)=3x^2$ y $g(x)=\frac{1}{x+2}$ Explica cómo se pueden obtener por composición, a partir de ellas, las siguientes funciones: $p(x)=\frac{3}{(x+2)^2}$ $q(x)=\frac{1}{3x^2+2}$**

*Solución:* $p(x)=(f\circ g)(x)$ $q(x)=(g\circ f)(x)$

**EJERCICIO 4 : Explica cómo se pueden obtener por composición las funciones *p(x)* y *q(x)* a partir de *f(x)* y *g(x)*, siendo: $f(x)=2x-3$ , $g(x)=\sqrt{x-2}$ , $p(x)=2\sqrt{x-2}-3$ y $q(x)=\sqrt{2x-5}$**

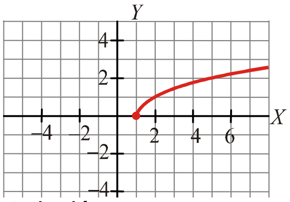
*Solución:* $p(x)=(f\circ g)(x)$ $q(x)=(g\circ f)(x)$

**EJERCICIO 5 : Las funciones $f$ y $g$ están definidas por: $f(x)=\frac{x-1}{3}$ y $g(x)=\sqrt{x}$. Explica cómo, a partir de ellas, por composición, podemos obtener: $p(x)=\sqrt{\frac{x-1}{3}}$ y $q(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{3}$**

*Solución:* $p(x)=(g\circ f)(x)$ $q(x)=(f\circ g)(x)$

## INVERSA DE UNA FUNCIÓN

**EJERCICIO 6** : **Esta es la gráfica de la función** ***y = f (x):***




**a) Calcula** $f^{-1}(0)$ **y** $f^{-1}(2)$.

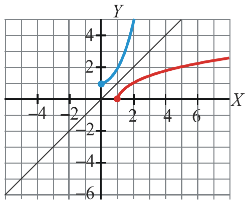
**b) Representa en los mismos ejes** $f^{-1}(x)$ **a partir de la gráfica de** $f(x)$.

*Solución:*

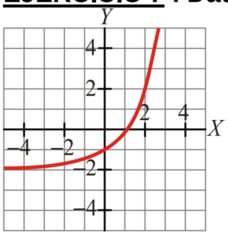
a) $f^{-1}(0) = 1$ porque $f(1) = 0$

$f^{-1}(2) = 5$ porque $f(5) = 2$

b)




**EJERCICIO 7** : **Dada la gráfica de la función** ***y = f (x)*****:**




**a) Calcula** $f^{-1}(-1)$ **y** $f^{-1}(0)$.

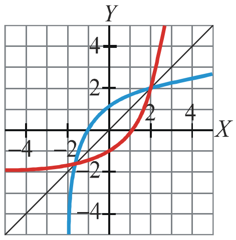
**b) Representa gráficamente en los mismos ejes** $f^{-1}(x)$, **a partir de la gráfica de** $f(x)$.

*Solución:*

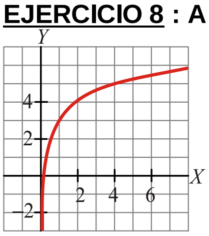
a) $f^{-1}(-1) = 0$ porque $f(0) = -1$

$f^{-1}(0) = 1$ porque $f(1) = 0$

b)




**EJERCICIO 8** : **A partir de la gráfica de** ***y = f (x):***




**a) Calcula** $f^{-1}(3)$ **y** $f^{-1}(5)$.

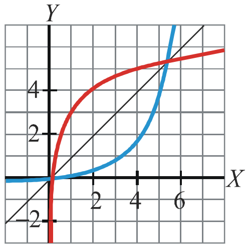
**b) Representa, en los mismos ejes,** $f^{-1}(x)$**.**

*Solución:*

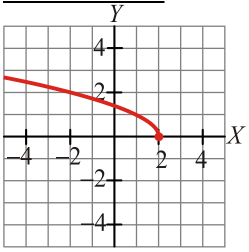
a) $f^{-1}(3) = 1$ porque $f(1) = 3$

$f^{-1}(5) = 4$ porque $f(4) = 5$

b)



**EJERCICIO 9** : **Esta gráfica corresponde a la función $y = f(x)$:**




**A partir de ella:**

**a) Calcula $f^{-1}(2)$ y $f^{-1}(0)$.**

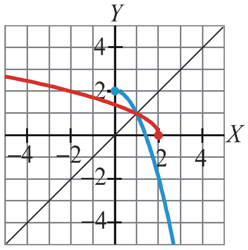
**b) Representa, en los mismos ejes, la función $f^{-1}(x)$.**

*Solución:*

a) $f^{-1}(2) = -2$ porque $f(-2) = 2$

$f^{-1}(0) = 2$ porque $f(2) = 0$

b)




**EJERCICIO 10** : **Halla la función inversa de:**

**a)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2-3x}{4}$ **c)** $f(x) = \dfrac{-x+3}{2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{-2x-1}{5}$ **e)** $f(x) = \dfrac{-2+7x}{3}$

*Solución:*

a) Cambiamos $x$ por $y$, y despejamos la $y$:

$x = \dfrac{2y-1}{3} \Rightarrow 3x = 2y-1 \Rightarrow 3x+1 = 2y \Rightarrow \dfrac{3x+1}{2} = y \Rightarrow$ Por tanto: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2}$

b) Cambiamos $x$ por $y$ y despejamos la $y$:

$x = \dfrac{2-3y}{4} \Rightarrow 4x = 2-3y \Rightarrow 3y = 2-4x \Rightarrow y = \dfrac{2-4x}{3} \Rightarrow$ Por tanto: $f^{-1}(x) = \dfrac{2-4x}{3}$

c) Cambiamos $x$ por $y$, y despejamos la $y$:

$x = \dfrac{-y+3}{2} \Rightarrow 2x = -y+3 \Rightarrow y = 3-2x \Rightarrow$ Por tanto: $f^{-1}(x) = 3-2x$

d) Cambiamos $x$ por $y$, y despejamos la $y$:

$x = \dfrac{-2y-1}{5} \Rightarrow 5x = -2y-1 \Rightarrow 2y = -5x-1 \Rightarrow y = \dfrac{-5x-1}{2} \Rightarrow$ Por tanto: $f^{-1}(x) = \dfrac{-5x-1}{2}$

e) Cambiamos $x$ por $y$ y despejamos la $y$:

$x = \dfrac{-2+7y}{3} \Rightarrow 3x = -2+7y \Rightarrow 3x+2 = 7y \Rightarrow \dfrac{3x+2}{7} = y \Rightarrow$ Por tanto: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{7}$

## FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICAS

**EJERCICIO 11** : **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

**a)** $y = 2^{1-x}$ **b)** $y = \log_{1/4} x$ c) $y = 1 - \log_2 x$ **d)** $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+2}$ e) $y = 3^{x+1}$

*Solución:*

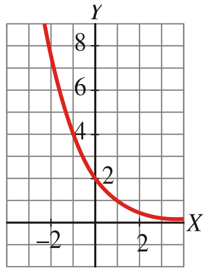
a)

• La función está definida y es continua en **R**.

• Hacemos una tabla de valores:

• La gráfica es:

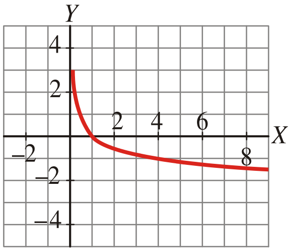
| X | -∞ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | +∞ | 8 | 4 | 2 | 1 | ½ | 0 |



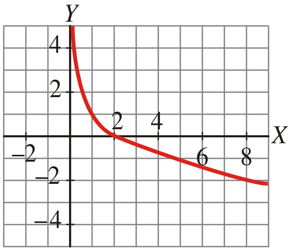

b)
- Dominio = ( 0, +∞)
- Hacemos una tabla de valores:

| X | $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\infty}$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^{0}$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^{1}$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^{+\infty}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 16 | 4 | 1 | ¼ | 1/16 | +∞ |
| Y | -∞ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | +∞ |

- La gráfica es:




- La gráfica será:



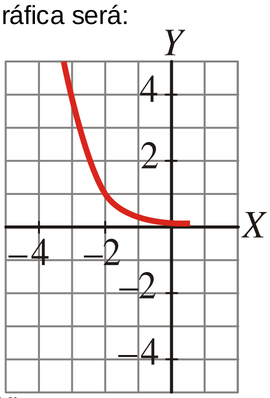

c)
- Dominio = ( 0, +∞)
- Hacemos una tabla de valores.

| X | $2^{-\infty}$ | $2^{-2}$ | $2^{-1}$ | $2^{0}$ | $2^{1}$ | $2^{2}$ | $2^{+\infty}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | ¼ | ½ | 1 | 2 | 4 | +∞ |
| Y | +∞ | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -∞ |

d)
- La función está definida y es continua en **R**.
- Hacemos una tabla de valores:

| X | -∞ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | +∞ | 1 | ¼ | 1/64 | 1/256 | 1/1024 | 0 |

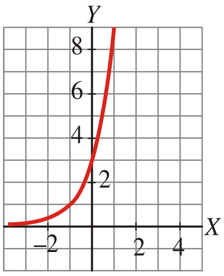
- La gráfica será:



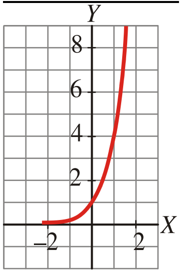

e)
- La función está definida y es continua en **R**.
- Hacemos una tabla de valores:

| X | -∞ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 1/3 | 1 | 3 | 9 | 27 | +∞ |

La gráfica es:



**EJERCICIO 12** : **Consideramos la gráfica:**




**a) Halla la expresión analítica de la función correspondiente.**
**b) ¿Cuál es el dominio de dicha función?**
**c) Estudia la continuidad y el crecimiento.**

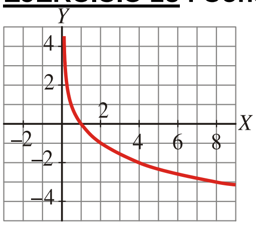
*Solución:*

a) Es una función exponencial de base mayor que 1, que pasa por los puntos (0, 1), (1, 4)... Su expresión analítica es $y = 4^x$.

b) Dominio = **R**

c) Es una función continua y creciente.

**EJERCICIO 13** : **Considera la siguiente gráfica:**




**a) Escribe la expresión analítica de la función correspondiente.**
**b) Estudia la continuidad y el crecimiento de la función e indica cuál es su dominio de definición.**

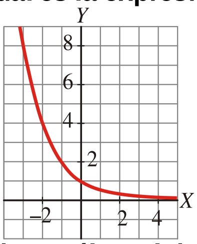
*Solución:*

a) Es una función logarítmica con base menor que 1, que pasa por los puntos (1, 0), (2, −1), $(4, -2)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$... Su expresión analítica es : $y = log_{1/2}x$

b) • Es una función continua.
• Es decreciente.
• Dominio = $(0, +\infty)$

**EJERCICIO 14** :

**a) ¿Cuál es la expresión analítica de la función correspondiente a esta gráfica?**




**b) Indica cuál es el dominio de definición y estudia la continuidad y el crecimiento de la función.**

*Solución:*

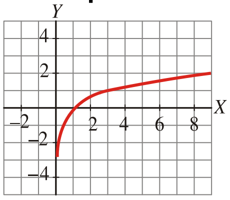
a) Es una función exponencial con base menor que 1, que pasa por los puntos ( −2, 4), ( −1, 2), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$...

Su expresión analítica será: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) • Dominio = **R**
• Es continua.
• Es decreciente.

**<u>EJERCICIO 15</u> :**

**a) Halla la expresión analítica de la función cuya gráfica es:**



**b) Estudia los siguientes aspectos de la función: dominio, continuidad y crecimiento.**

*Solución:*

a) Es una función logarítmica que pasa por los puntos ( 1, 0), ( 3, 1), ( 9, 2)... Su expresión analítica será:

$y = log_3 x$

b) • Dominio $= (0, +\infty)$

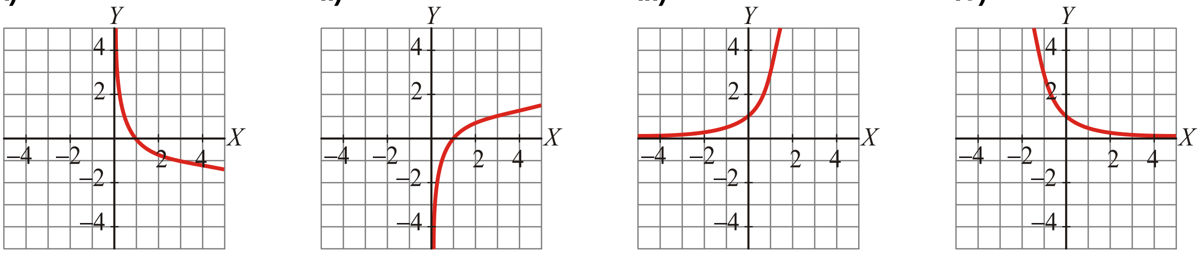
• Es continua.

• Es creciente.

**<u>EJERCICIO 16</u> : Asocia cada una de las siguientes gráficas con su expresión analítica:**

**a)** $y = 3^x$ **b)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **c)** $y = \log_3 x$ **d)** $y = \log_{1/3} x$

**I)** **II)** **III)** **IV)**

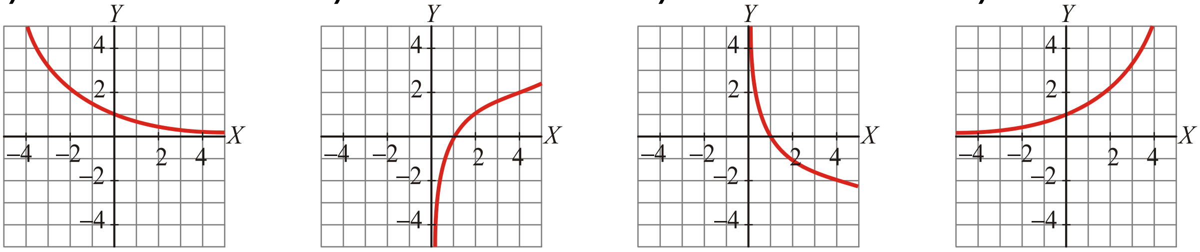


*Solución:* a) III b) IV c) II d) I

**<u>EJERCICIO 17</u> : Asocia a cada gráfica su ecuación:**

**a)** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **b)** $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **c)** $y = log_2 x$ **d)** $y = log_{1/2} x$

**I)** **II)** **III)** **IV)**



*Solución:* a) I b) IV c) II d) III

## PROBLEMAS FUNCIONES EXPONENCIALES

**EJERCICIO 18 : Un trabajador va a ganar, durante el primer año, un sueldo de 15 000 euros, y el aumento del sueldo va a ser de un 2% anual.**
**a) ¿Cuál será su sueldo anual dentro de un año? ¿Y dentro de dos años?**
**b) Halla la expresión analítica que nos da su sueldo anual en función del tiempo (en años)**

*Solución:*
a) Dentro de un año ganará: $15\,000 \cdot 1{,}02 = 15\,300$ euros
Dentro de dos años ganará: $15\,000 \cdot 1{,}02^2 = 15\,606$ euros.
b) Dentro de $x$ años su sueldo será de $y$ euros, siendo: $y = 15\,000 \cdot 1{,}02^x$

**EJERCICIO 19 : En un contrato de alquiler de una casa figura que el coste subirá un 2% cada año. Si el primer año se pagan 7 200 euros (en 12 recibos mensuales):**
**a) ¿Cuánto se pagará dentro de 1 año? ¿Y dentro de 2 años?**
**b) Obtén la función que nos dé el coste anual al cabo de $x$ años.**

*Solución:*
a) Dentro de un año se pagarán $7\,200 \cdot 1{,}02 = 7\,344$ euros.
Dentro de un año se pagarán $7\,200 \cdot 1{,}02^2 = 7\,490{,}88$ euros.
b) Dentro de x años se pagarán: $y = 7\,200 \cdot 1{,}12^x$ euros

**EJERCICIO 20 : Una población que tenía inicialmente 300 individuos va creciendo a un ritmo del 12% cada año.**
**a) ¿Cuántos individuos habrá dentro de un año? ¿Y dentro de 3 años?**
**b) Halla la función que nos da el número de individuos según los años transcurridos.**

*Solución:*
a) Dentro de un año habrá: $300 \cdot 1{,}12 = 336$ individuos
Dentro de tres años habrá: $300 \cdot 1{,}12^3 \approx 421$ individuos
b) Dentro de $x$ años habrá $y$ individuos, siendo: $y = 300 \cdot 1{,}12^x$ (tomando $y$ entero)

**EJERCICIO 21 : Un coche que nos costó 12 000 euros pierde un 12% de su valor cada año.**
**a) ¿Cuánto valdrá dentro de un año? ¿Y dentro de 3 años?**
**b) Obtén la función que nos da el precio del coche según los años transcurridos.**

*Solución:*
a) Dentro de un año valdrá: $12\,000 \cdot 0{,}88 = 10\,560$ euros
Dentro de tres años valdrá: $12\,000 \cdot 0{,}88^3 = 8\,177{,}66$ euros
b) Dentro de $x$ años valdrá $y$ euros, siendo: $y = 12\,000 \cdot 0{,}88^x$

**EJERCICIO 22 : Colocamos en una cuenta 2 000 euros al 3% anual.**
**a) ¿Cuánto dinero tendremos en la cuenta al cabo de un año? ¿Y dentro de 4 años?**
**b) Halla la expresión analítica que nos da la cantidad de dinero que tendremos en la cuenta en función del tiempo transcurrido (en años).**

*Solución:*
a) Dentro de un año tendremos: $2\,000 \cdot 1{,}03 = 2\,060$ euros
Dentro de cuatro años tendremos: $2\,000 \cdot 1{,}03^4 = 2\,251{,}02$ euros
b) Dentro de $x$ años tendremos $y$ euros, siendo: $y = 2\,000 \cdot 1{,}03^x$