

# DINÁMICA

La *Dinámica* es una parte de la Física que se ocupa del estudio de las interacciones entre los cuerpos. Dentro de la llamada **Física clásica** constituye uno de los ejes más importantes de otro capítulo mayor: la Mecánica, y con ella es posible dar una primera explicación a multitud de fenómenos que se producen en la Naturaleza. En esta tarea, desempeñó un papel muy fundamental uno de los mayores hombres de Ciencia de toda la historia: **Sir Isaac Newton**. A él se atribuyen (entre otras muchas cosas) los tres principios básicos que nos permiten entender y estudiar la Dinámica, aunque bien es cierto que poseía antecedentes poderosos, en concreto la obra de Galileo, Nicolás de Oresme, J. Kepler, etc. La titánica labor de este físico británico en este terreno pasó por tareas de síntesis y ampliación.



La obra de Newton abarca terrenos como el de la matemática, la Astronomía, la óptica, la religión e, incluso, la alquimia. De carácter uraño, llegó a ser en vida toda una autoridad en temas de física y matemática. **A la temprana edad de 21 años** ya había desarrollado la mayor parte de sus ideas en torno a la Gravitación Universal. Permaneció soltero durante toda su vida, obsesionado por los asuntos religiosos, convirtiéndose en un “experto” en la Biblia, tratando de enlazar sus ideas y descubrimientos con los textos (para él) sagrados. En la actualidad está enterrado en la Abadía de Websminster, lugar reservado a “los grandes” británicos. Para muchos, Newton ha sido el mayor científico de todos los tiempos, por encima, incluso de A. Einstein, quien paradójicamente, modificaría y perfeccionaría las ideas del propio Newton en algunos terrenos; pero eso es ya tema de otro curso de física: el del curso que viene.

## 1. REVISIÓN DEL CONCEPTO DE FUERZA.

Durante el tema anterior, nos hemos venido ocupando de describir el movimiento; pero para nada hemos entrado en el estudio de cuál es la causa que lo produce.

La Dinámica es la parte de la Física dedicada **al estudio de las interacciones**. El concepto de INTERACCIÓN es de suma utilidad, ya que con él seremos capaces de ofrecer una explicación a multitud de hechos físicos. Se trata de una idea preñada de sutilezas que conviene ir arañando desde el principio. Ya se estudió el curso pasado, por lo que conviene comenzar repasando sus ideas fundamentales que resumiremos en estos puntos:

- **Se trata de una Magnitud Física de CARACTER VECTORIAL.**
- **Mide la interacción entre DOS cuerpos ('los cuerpos NO tienen fuerza')**
- **Podemos reconocerla (o medirla) por los efectos que produce, a saber: modificaciones en el estado del movimiento de los cuerpos, y/o deformaciones (a nivel, incluso, microscópico).**
- **El modo de actuación puede llevarse a cabo bien "a distancia" bien "por contacto".**
- **Su unidad en el S.I. es el Newton (N)**

De entre las fuerzas que "actúan a distancia" hay que diferenciar dos tipos fundamentales: **las de origen gravitatorio** (que se ponían de manifiesto entre dos masas cualesquiera situadas a una cierta distancia y cuya cuantía venía regulada por la llamada ley de gravitación Universal, del propio Newton y que ya se estudió en el curso pasado) **y las de origen eléctrico** (puesta de manifiesto entre dos cuerpos cargados eléctricamente, y cuya intensidad viene regida por la ley de Coulomb, también vista ese mismo año).

Por la propia definición de fuerza esbozada en las líneas anteriores, cabe deducir una serie de **consecuencias fundamentales**. En primer lugar, si la Fuerza mide la interacción entre dos cuerpos, para que podamos hablar de su existencia, han de existir, precisamente eso: **dos cuerpos**; esto es: los cuerpos, por sí solos, "no tienen fuerza", aunque son capaces de ejercerla y 'padecerla'.

Por otro lado, según lo anterior, se desprende también que **las fuerzas jamás aparecerán solas**; siempre a pares y actuando en cuerpos diferentes. Por supuesto que, de igual modo, si a las fuerzas se las "reconoce" por sus efectos (deformaciones o modificaciones en el estado de movimiento de los cuerpos) si un cuerpo, por ejemplo, no altera su movimiento, cabe concluir que sobre él "no actúan fuerzas", o mejor: que las que actúen han de encontrarse compensadas (resultante nula).

Otra característica importante de este concepto es la de **su carácter vectorial**. Así, es muy frecuente que sobre un cuerpo estén actuando más de una fuerza, por lo que habremos de calcular y representar la resultante de las mismas. A este respecto, todo lo visto en el primer capítulo del curso sobre magnitudes vectoriales deberemos saberlo utilizar. De ahora en adelante (si no especificamos lo contrario) cuando hablemos de la fuerza que actúa sobre un cuerpo **nos estaremos refiriendo a la resultante de las mismas** que actúan sobre él.

Recuerda que había una 'colección' de fuerzas importantes que ya estudiamos el curso pasado y que tenían 'nombres propios': el peso (de la más importante), la Normal, Tensiones, Fuerza elástica, Fuerza de empuje, etc.

---

Q1. Dibuja las fuerzas que actúan sobre un objeto situado sobre una mesa. En otro esquema distinto, dibuja las que ese objeto ejerce.

---

Q2. Un objeto de 400 kg de masa está situado sobre una superficie perfectamente lisa, horizontal y sin rozamiento. ¿Cuál es la fuerza mínima que conseguirá moverlo: igual a su peso, menor que su peso, mayor que su peso, cualquiera?

---

Q3. ¿Cuál es la unidad de fuerza en el sistema cegesimal?

---

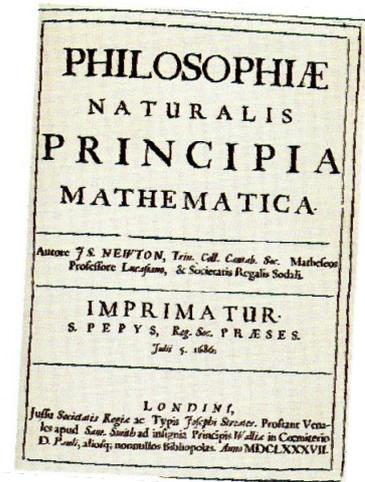
Q4. ¿Es posible que un cuerpo se mueva sin que sobre él actúe ninguna fuerza? ¿Y que comience a moverse? ¿Y que se detenga? EXPLICACIONES.

## 2. LEYES DE LA DINÁMICA

- **Ley de Inercia.**

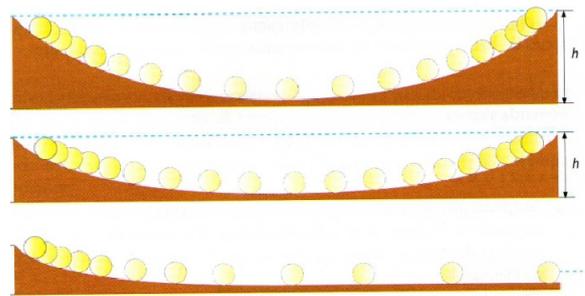
En 1684 Isaac Newton publica un famoso libro donde recogería sus principales aportaciones al terreno de la Dinámica: *Philosophiae naturalis principia mathematica*, conocido simplemente como 'Principia'. En la primera de sus tres partes recogería esas leyes de la dinámica, siendo la conocida como LEY DE INERCIA la primera de ellas. En palabras del propio Newton, esta ley establece:

« *Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado, por fuerzas impresas, a cambiar su estado* »



Esta es la que también se conoce con el nombre de 1ª ley de la Dinámica o primera ley de Newton, y si se examina con detalle, se verá que es una consecuencia directa de la propia definición de fuerza que hemos venido recordando.

En realidad esta ley parece ir en contra del 'sentido común' pues se tiene la creencia (errónea) de que para que un cuerpo se mantenga en movimiento es necesario que una fuerza actúe constantemente sobre él. Esta opinión perduró durante mucho tiempo, hasta que Galileo Galilei<sup>1</sup> llegara a la conclusión contraria: los cuerpos pueden mantenerse en movimiento sin la participación de ninguna fuerza. Su argumentación se basaba en la observación experimental del movimiento de una bola en planos inclinados. Galileo constató que cuando se dejaba caer una bola por uno de esos planos inclinados para luego ascender por otro, la bola recorría por este último la distancia necesaria para llegar hasta la misma altura que tenía en el instante inicial. Si disminuía el ángulo de inclinación, la bola recorría mayor distancia hasta conseguir esa misma altura del principio, de modo que si el ángulo de inclinación fuera nulo, la bola no se detendría nunca. No obstante, Galileo cometió el error de atribuir ese 'movimiento perpetuo' a la rotación de la Tierra y a su forma esférica, siendo posteriormente Descartes y sobre todo Newton, quienes le corrigieran.



Dado que el movimiento de los cuerpos es una cuestión relativa (o ligada a un sistema de referencia en concreto), esta ley está muy sujeta a la elección de los mismos, de tal modo que todos aquéllos sistemas considerados en reposo o en movimiento uniforme se los denomina SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES, para lo que se cumplen las leyes física (no solo la ley de inercia). Algo de esto ya hablamos en el tema anterior. Los sistemas de referencia en rotación o, en general, acelerados, constituyen sistemas de referencia NO inerciales, y en ellos no se cumplen las leyes de Newton.

Q5. ¿Es la Tierra un buen sistema inercial de referencia?

Q6. Imagina que viajas en un ascensor que desciende a velocidad constante, sin ventanas, y por tanto, sin referencias visuales externas. (a) ¿Qué marcaría una balanza que pusieras bajo tus pies?; (b) ¿Qué sucedería si dejas caer una moneda?

De esta forma, puede observarse que desde el punto de vista de la dinámica, “**reposo**” y **movimiento uniforme son equivalentes**. Por lo tanto, cabe preguntarse: ¿es posible distinguir uno de estos dos estados mediante algún experimento de mecánica? Galileo había demostrado que NO.

Evidentemente existen **infinidad de sistemas de referencia inerciales**, y ninguno de los que se escojan es preferente a los demás (como ya Galileo demostró), y ni se puede hallar alguno que sea el mejor. **Las leyes del movimiento de los cuerpos son iguales en todos los sistemas inerciales.**

Otra cuestión de interés (y que también se abordó en el curso pasado) tiene que ver con la situación de un cuerpo sometido a varias fuerzas de tal modo que todas están contrarrestadas (resultante nula). Acabamos de ver que entonces ‘seguirá como está’, de modo que si es ‘reposo’ (equilibrio de traslación) esa será una condición interesante. Ojo que el que las fuerzas estén contrarrestadas exige atender a su carácter vectorial.

- **Ley de Acción y Reacción.**

Tradicionalmente considerada como la tercera de las leyes de Newton, ésta es igualmente una ‘consecuencia’ de la definición de fuerza que hemos venido dando; y más concretamente de que ese concepto marca la acción **ENTRE DOS** cuerpos.

En palabras de Newton:

*« Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de los cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentidos opuestos »*

A la hora de aplicar esta ley hay que tener presente **algunos puntos muy importantes**:

- *Aunque las fuerzas de acción y de reacción sean iguales en módulo, están aplicadas en cuerpos diferentes.*
- *El que sean iguales estas fuerzas, no significa que los efectos sean los mismos.*
- *Debemos tener claro qué (y cuáles son) son fuerzas que actúan sobre un cuerpo y cuáles son las fuerzas que ejerce un cuerpo.*

No se insistirá lo suficiente en el hecho de que **las leyes de la dinámica afectan por igual a todos los tipos de fuerzas**, ya sean de origen gravitatorio y/o electromagnético. A propósito de esto, estudia y analiza la siguiente situación que ahora se te presenta:

---

Q6. Cuando acercamos un imán a una puntilla, ¿quién atrae a quién?

---

Q7. Si las fuerzas en la naturaleza aparecen siempre a pares, ¿cómo es posible que un cuerpo pueda comenzar a moverse?

---

Q8. Un caballo rehúsa a tirar de un carro. El ‘razonamiento del caballo’ es el siguiente: *“De acuerdo con la tercera ley de Newton, sea cual sea la fuerza que yo ejerza sobre el carro, éste ejercerá otra igual, pero de sentido contrario, sobre mí, y por lo tanto, la fuerza resultante será cero y no tendré ninguna posibilidad de mover el carro”*. ¿Qué falla en este razonamiento?

---

Q9. Explica *los efectos* de la ley de acción y reacción en el sistema Tierra-Luna.

---

Q10. Explica qué fuerza es la que impulsa a un saltador de altura a elevarse por encima del listón. ¿Y a un coche a ponerse en movimiento? ¿Y a una persona andando? ¿Y un avión ‘a reacción’?

---

Q11. Un objeto de 6 kg de masa cuelga del techo de una habitación mediante dos cuerdas que lo mantienen en equilibrio. Una de las cuerdas forma un ángulo de 24º con el techo, mientras que la otra forma 66º. Si ambas cuerdas sujetan al cuerpo por el mismo punto, determina las tensiones de cada cuerda.

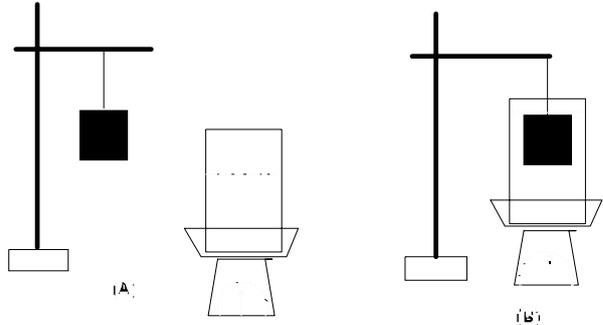
---

Q12. Un péndulo posee una masa de 2 kg atada a su extremo libre. Si soltamos la masa desde una posición horizontal, estudiar las fuerzas que actúan sobre ella en los puntos más alejados de su trayectoria y cuando pasa por la de equilibrio. Especula con la posibilidad de que estén contrarrestadas.

¿Recuerdas el principio de Arquímedes que se estudió el curso pasado?

Establece que "todo cuerpo que se sumerge en un líquido experimenta una fuerza de empuje, vertical y hacia arriba. Tal fuerza de empuje puede medirse por el peso del líquido desalojado por el cuerpo".

Suponte que tenemos un cuerpo colgando de una cuerda y un recipiente con agua sobre una balanza. A continuación introducimos el cuerpo en el interior del agua pero sin soltarlo de la cuerda y sin que toque las paredes del recipiente. ¿Qué indicaría la balanza: más, menos o igual que antes? Explica tu respuesta."



- **Ley fundamental de la dinámica.**

Hemos visto que una fuerza resultante NULA no produce **variaciones** en el estado del movimiento de los cuerpos. Queda por ver qué sucede cuando tal circunstancia NO se da, esto es **qué pasa** – dinámicamente hablando- **cuando el movimiento de un cuerpo SÍ varía** (posee aceleración) o qué efectos producen en los cuerpos resultantes NO nulas. De esto se ocupa la *segunda* ley de la dinámica (o de Newton), o ley fundamental.

Intuitivamente al menos, se ve que ha de existir una relación entre variación de movimiento (aceleración, vector) y resultante de fuerza NO nula. Esa relación marca la esencia de esta segunda ley. Imaginemos un carro sobre un camino perfectamente liso. Si estando inicialmente en reposo le damos un empujón, se pone en movimiento, con el que continuará indefinidamente y en línea recta, según la ley de inercia que hemos estudiado. Pero supongamos que la acción de la fuerza pueda repetirse todas las veces que deseemos sobre el mismo cuerpo y con la misma intensidad. Entonces, los incrementemos de velocidad (aceleraciones) suministrados en cada impulso deberán ser iguales. Pero *¿qué pasa si el carro está unas veces cargado y otras vacío?* Evidentemente, adquirirá menos velocidad cuando está con carga que sin ella. De aquí se puede extraer una importante conclusión:

*"si una misma fuerza actúa sobre dos cuerpos diferentes, al principio en reposo, sus velocidades resultantes NO serán iguales, lo cual se expresa diciendo que la velocidad adquirida depende de la MASA del cuerpo, y será menor si la masa es MAYOR"*

Según esto, poseemos un método para poder determinar la masa, o más exactamente, para hallar **la relación entre las masas de distintos cuerpos**, ya que si sobre dos masas en reposo actúan dos fuerzas idénticas, y la velocidad final de una es, por ejemplo, triple que la de la otra, se puede concluir que la primera tiene una masa tres veces MENOR que la segunda.

En realidad, en la práctica, la masa no se determina así, sino con ayuda de una balanza, aunque esto no quita de que el primer procedimiento sea, también, correcto.

Es curioso observar un dato: mientras que el primer procedimiento -basado en la ley de inercia- no tiene nada que ver con la atracción de la Tierra, el procedimiento de la balanza, sí. A pesar de todo, tanto por un camino como por otro, el resultado hallado coincide. ¿Casualidad? Esta es una de las "más famosas casualidades" en la historia de la Física que trajo consigo, entre otras cosas, la aparición y desarrollo de la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein. Esta coincidencia ha sido una de las mayores claves para la comprensión de la Naturaleza. Para distinguirlas de algún modo, se las ha denominado **masa inercial y masa gravitatoria**, según cuál sea el procedimiento empleado para calcularla.

Los párrafos anteriores nos permiten escribir la relación matemática entre fuerza, masa inercial y aceleración en una de las ecuaciones **más importantes de TODA LA FISICA** clásica:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

No conviene olvidar a propósito de esta ecuación que:

- Se trata de una ecuación vectorial y ya sabemos lo que eso significa.
- Que la aceleración que aparece en ella puede ser tanto tangencial, como normal o incluso ambas. Si la aceleración es de tipo normal, a la fuerza se la denomina **fuerza centrípeta**. Conviene recordar que la aceleración normal mide los cambios en la dirección de la velocidad. Así por ejemplo, la fuerza que actúa sobre la Luna en su giro sobre la Tierra es de tipo centrípeta. En esos casos donde la aceleración es sólo de tipo centrípeta, la ecuación de la segunda ley de Newton puede quedar escrita:

$$\vec{F} = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u} = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \vec{u}$$

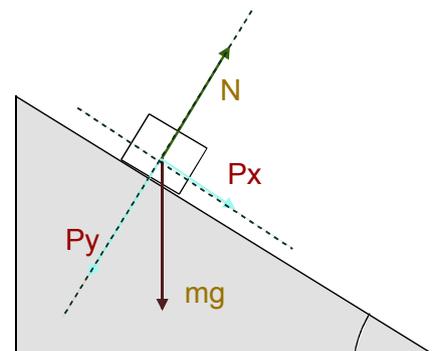
donde  $u$  es un vector unitario dirigido hacia el centro de giro. (Siempre que escribimos  $F$  nos estamos refiriendo a la resultante de las fuerzas)

- Esta segunda ley marca la relación (vectorial) entre RESULTANTE de fuerzas y VARIACIÓN del movimiento (aceleración) de tal modo que esa resultante posee la misma dirección y el mismo sentido que la aceleración (que NO de la velocidad)
- Si se observa con detalle, esta segunda ley, incluye también a la primera.

### Un caso de Interés: **EL PLANO INCLINADO.**

¿Por qué al situar un cuerpo sobre una superficie inclinada y lisa (sin rozamiento) éste se desliza?

El buscar una explicación a este y a otros hechos similares, requiere, en primer lugar, efectuar **un análisis dinámico de la situación**. Como podemos ver en la figura, son varias las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en esta situación: su peso (fuerza Tierra-cuerpo) y la que ejerce el suelo sobre el cuerpo ("Normal"). NO se ha dibujado la fuerza de rozamiento, en la que con más detalle hablaremos más adelante. Si tras soltar el objeto desde la posición indicada, éste comienza a moverse (esto es, deja de estar en reposo y se pone en marcha) ha experimentado una aceleración, de modo que ésta ha debido proporcionársela una resultante NO nula de las fuerzas que actúan sobre ese objeto. De modo que una vez dibujadas las fuerzas, la siguiente misión consiste en determinar esa resultante. Para ello, necesitaremos hacer uso de nuestros conocimientos en suma de vectores, que como aquí, no tienen la misma dirección. Para eso, podemos descomponer el peso respecto a un sistema de referencia como el representado, en el que uno de sus ejes se mantiene paralelo al propio plano. Nacen así las componentes señaladas  $P_x$  y  $P_y$ .



La **elección de los sistemas de ejes** para el cálculo de la resultante de las fuerzas es importante. Para ello, hay que recordar que esa resultante que vamos a calcular ha de tener LA MISMA DIRECCIÓN y SENTIDO que la aceleración

de la que participa el cuerpo; por lo tanto, localizando ésta, habremos localizado el mejor sistema de ejes. En este caso la aceleración que nos ocupa es solo aceleración tangencial.

La aplicación de la segunda ley de Newton que acabamos de estudiar, nos permite escribir:

$$Px\vec{i} + (N - Py)\vec{j} = m.a\vec{i}$$

y como ya sabemos, para que estos dos vectores sean iguales, ha de cumplirse que sus componentes lo sean, esto es:

$$Px\vec{i} = m.a\vec{i}$$
$$(N - Py)\vec{j} = 0$$

es decir:

$$m.g.\cos\alpha = N$$
$$m.g.\sen\alpha = m.a$$

esto es:

$$a = g.\sen\alpha$$

Este valor de la aceleración (que como se ve es independiente de la masa del objeto) es con la aceleración con que descenderá el cuerpo por el plano inclinado.

Si se considera el rozamiento, (lo haremos algo más tarde) habrá que estudiar la cuantía de cada una de las fuerzas que en esa dirección intervienen para poder describir y caracterizar el movimiento.

Veamos otros ejemplos simples de aplicación de esta potente ley física.

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

- ¿Es cierto que...
  - Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es cero, el cuerpo estará en reposo.
  - El movimiento de un cuerpo siempre tiene lugar en la dirección de la resultante de la fuerza.
  - Si la velocidad de un cuerpo es cero, la resultante de las fuerzas en ese instante debe ser también cero.
- Un hombre de 70 kg de masa se encuentra equipado con patines, sobre una pista de hielo. Si empuja a un objeto de 20 kg de masa, inicialmente en reposo, con una fuerza de 140 N, ¿qué aceleración actuará sobre cada uno?
- Dos masas, M1 y M2, respectivamente cuelgan parejas mediante *un cable de masa despreciable (máquina de Atwood)* que pasa por la garganta de una polea. Si se dejan en libertad y admitiendo que no existen rozamientos importantes, determinar la aceleración de caída/subida de cada masa. ¿Qué ocurriría si las masas fueran iguales? (NOTA: si la masa del cable NO fuera despreciable, el tratamiento sería muy diferente, ya que se introduce en el sistema otro cuerpo –la cuerda- cuya masa y aceleración habrá que considerar)
- Determinar qué relación debe existir entre las masas de una máquina de Atwood para que el conjunto se mueva con una aceleración que sea el 2 % de la de la gravedad.
- Un globo, con todos sus accesorios, pesa 1900 kp y desciende con una aceleración 10 veces menor que la de la gravedad. Determinar la masa de lastre que debería lanzarse por la borda para que el globo suba con la misma aceleración.
- Un *péndulo cónico* está formado por una masa de 10 kg, colgada de una cuerda de 1,5 metros de longitud, que describe círculos en un plano horizontal, con velocidad angular constante. Si el cuerpo gira a razón de 3 rad/s, describiendo un círculo de 1 m de radio, determinar la tensión de la cuerda y el ángulo que forma con la vertical.
- En las carreteras, suelen peraltarse las curvas, inclinándolas hacia el centro de la curva, para garantizar que, aún en las peores condiciones (suelo resbaladizo, neumáticos desgastados, etc.), un vehículo sea capaz de tomar la curva con éxito. Calcula la velocidad máxima con que un vehículo puede tomar una curva de radio R, peraltada un ángulo  $\alpha$ , si despreciamos los rozamientos. (NOTA: ten presente que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el vehículo ha de estar dirigida hacia el centro de giro)
- Un cuerpo de 2 kg de masa gira sobre una mesa, atado a una cuerda, describiendo una circunferencia de 0,5 m de radio. La velocidad de giro es constante e igual a 1 m/s. Determina la fuerza con que tira la cuerda de él.
- Se hace girar un cubo de agua siguiendo una circunferencia vertical de radio R. Si la velocidad del cubo en su parte más alta es V, determina la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua. Calcula también el valor MINIMO de velocidad,  $V_{\min}$ , para que el agua NO caiga.

10. Según la expresión anteriormente obtenida para la aceleración de caída del cuerpo por el plano inclinado, ¿qué sucedería si ese plano ofreciera una inclinación de  $90^\circ$ ? Analizar la situación.

11. Un/a estudiante quiere escapar de la habitación de su novia/o por la ventana. Para ello, anuda unas sábanas y sabe que éstas son capaces de soportar la mitad de su peso: para un valor mayor, el/la intrépido/a estudiante se romperá la crisma. Sin embargo, como buen/na estudiante de física encontró un método para salir airoso/a de la habitación empleando las sábanas anudadas y sin romperse nada. ¿Cómo lo haría?

12. Desde lo más alto de un plano inclinado  $30^\circ$  sobre la horizontal se deja caer un cuerpo que emplea 2,5 segundos en llegar al final del mismo. A) ¿cuál será la rapidez con que llega al final de este plano?. B) ¿qué altura tenía ese plano?

13. COMENTAR la siguiente afirmación: "En el movimiento circular de una bola atada a una cuerda, la bola está en equilibrio porque la fuerza centrífuga debida a su movimiento es equilibrada por la tensión de la cuerda"

14. El vector de posición de un objeto móvil de 5 kg de masa, viene dado por la expresión:

$$\vec{r} = 3t \vec{i} - (t^2 + \frac{1}{3}) \vec{j}$$

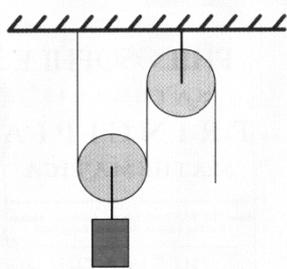
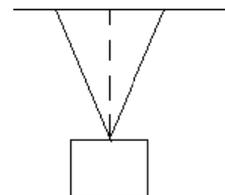
Determina:

- a) Ecuación para la trayectoria del objeto.
- b) Velocidad inicial.
- c) Resultante de las fuerzas que actúa sobre él.

15. Una persona de 72 kg de masa está situado en el interior de un ascensor. Determina la fuerza que soporta el suelo de éste en los siguientes casos: a) el ascensor está quieto; (b) el ascensor sube con rapidez constante de 0,8 m/s; (c) baja con rapidez constante de 0,8 m/s; (d) sube con una aceleración constante de  $0,14 \text{ m/s}^2$ ; (e) baja con una aceleración constante de  $0,14 \text{ ms}^{-2}$

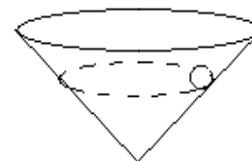
16. El autor *Cyrano de Bergerac*, en uno de sus libros, comenta el siguiente procedimiento para viajar a la Luna: "Tomé un imán extrayendo de él un pedazo del tamaño de una bala de cañón. Luego hice construir una carretilla de hierro muy ligera. Finalmente subí a ella, y sujetándome al asiento con fuerza, lancé la bola de imán hacia lo alto. Al momento, la carretilla subió y cada vez que yo llegaba a donde estaba el imán, lo cogía y rápidamente lo volvía a lanzar. Más adelante descubrí que, simplemente con sostener la bola en mi mano en alto, yo no dejaba de subir porque la carretilla corría continuamente hacia el imán." Evidentemente este párrafo es un 'atentado' a las leyes de Newton. Comenta por qué.

17. Se cuelga del techo una caja que pesa 250 N mediante dos cuerdas que forman un mismo ángulo  $\phi$  con la vertical. Determina la tensión de las cuerdas en función de  $\phi$ . ¿Aumenta la tensión o disminuye cuando se abre el ángulo entre las dos cuerdas?

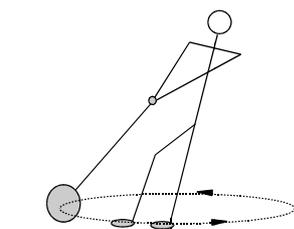


18. El esquema de la figura corresponde a una **polea compuesta** de tal modo que se usa para elevar objetos. Supongamos que el cuerpo tiene una masa de 50 kg y se sube con rapidez constante. Determina la tensión a la que está sometida cada cuerda, así como la fuerza que actúa sobre cada uno de los enanches, si se admite que la masa de las poleas es despreciable.

19. Se ha soltado una bolita de masa  $m$  en el interior de un cono, lanzándola de forma que describe un círculo de radio  $R$  a velocidad constante  $v$ . La pared del cono forma un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal. Demuestra si la velocidad con la que hay que lanzar la bolita depende de su masa.



20. Supongamos conocidas las masas de la Tierra ( $M$ ) y de la Luna ( $m$ ), así como la distancia que los separa ( $d$ ). ¿Con qué rapidez se mueve la Luna en su órbita alrededor de la Tierra? (NOTA: recuerda la ley de Gravitación Universal que se vio el curso pasado)



21. Una persona ata al extremo de una cuerda una masa de 3 kg y la hace girar en un plano horizontal, tal y como se ve en la figura, a un ritmo constante de 38 rpm. Si el radio de los giros es de 1,7 m, se pide: (a) Valor de la tensión de la cuerda; (b) En una segunda experiencia, esta misma persona hace rotar la misma masa en un plano vertical con la misma cuerda (de 1,3 m de longitud). ¿Cuál ha de ser la rapidez angular de giro mínima para que la masa complete un círculo?

## Fuerza de Rozamiento.

Ha llegado el momento de comenzar a tener en cuenta una importante fuerza que en buena parte de las ocasiones está presente: *la fuerza de rozamiento*. En general, suele denominarse así a **toda fuerza que se opone al deslizamiento de los objetos sobre una superficie**. Esta fuerza de rozamiento posee una serie de características:

- La fuerza de rozamiento es *paralela* a la superficie de contacto, y NO depende del valor de esa superficie, aunque Sí del tipo de éstas.
- El módulo de la fuerza de rozamiento tiene *cualquier valor* desde cero hasta un valor máximo. La fuerza máxima de rozamiento es igual a la fuerza mínima para iniciar el movimiento. Iniciado el movimiento, la fuerza de rozamiento disminuye y permanece constante durante todo el movimiento. A la fuerza de rozamiento que actúa desde que el objeto está en reposo hasta que se pone en marcha, se la llama **fuerza de rozamiento estática**. A la fuerza de rozamiento que actúa mientras el objeto se desliza se la denomina **fuerza de rozamiento dinámica**.
- El módulo de la fuerza de rozamiento está estrechamente relacionada con la fuerza que la superficie es capaz de ejercer sobre el cuerpo, esto es, con la Normal. Ambas son proporcionales, siendo el factor de proporcionalidad conocido como *coeficiente de rozamiento*,  $\mu$ . Se trata de un número adimensional (sin unidades) que depende del tipo de superficies puestas en contacto. En general se cumple que  $\mu_e > \mu_d$ .

$$F_r = \mu \cdot N$$

### 3. EL EQUILIBRIO EN UN MOMENTO.

En las cuestiones que se han estado resolviendo cuando al resultante de las fuerzas es nula, se ha venido introduciendo la idea de 'equilibrio' cuando no se registraba movimiento (uniforme) para esos cuerpos. Sin embargo, esa condición de equilibrio de exigir una resultante de fuerzas nula, lo único que nos asegura es que el cuerpo ('en reposo') NO se traslada. Nada impide que no pueda girar. **El equilibrio 'perfecto' en un cuerpo se conseguirá cuando ni gire ni se traslade**. Para abordar esta situación necesitamos definir una magnitud que nos permita evaluar la capacidad de giro de los cuerpos sometidos a interacción. Tal magnitud es **EL MOMENTO**.

Ya en el primer tema dedicado al cálculo vectorial se adelantó algo de esta magnitud y de su importancia física. Ahora vamos a introducir un segundo nivel de aproximación a ella.

---

Q13. Sobre una tabla horizontal y rugosa situamos un objeto de masa  $M$ . Por uno de sus extremos vamos levantándola observando que la fuerza de rozamiento es capaz de frenar el deslizamiento del objeto. Pero llega un cierto ángulo en el que el cuerpo comienza a deslizar. Establecer la relación entre el coeficiente de rozamiento y el ángulo de inclinación.

---

Q14. Determina la aceleración con que se desliza un objeto por un plano inclinado de  $30^\circ$  con la horizontal, si el coeficiente de rozamiento es 0,2.

---

Q15. Una antigua atracción de feria consistía en un gran cilindro (de radio  $R$ ) que podía girar por el eje principal que lo cruza por su centro cuando las personas estaban en su interior. Al subirse, las personas se pegaban a la pared, el cilindro comienza a girar, y en cierto instante el suelo empieza a descender sin que las personas se caigan ni corran peligro alguno. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento con las personas es  $\mu$ , calcula la rapidez angular mínima de giro para que las personas NO caigan cuando 'desaparezca el suelo bajo sus pies'

---

Q16. En el techo de un coche hemos puesto una caja. Determina cuál deberá ser el  $\mu$  para que la caja no resbale cuando aceleramos el vehículo a  $0,82 \text{ m/s}^2$ .

---

Q17. ¿Para qué hará falta aplicar más fuerza: para levantar a pulso una caja de 90 kg o para arrastrarla por un suelo rugoso con un  $\mu = 1,14$ ?

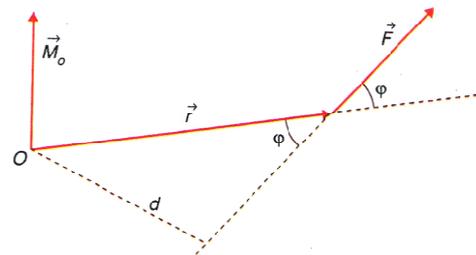
Hay montones de situaciones físicas en donde aparecen involucrados los giros: al abrir una puerta, al rotar un volante, apretar/aflojar un tornillo.... Esas mismas experiencias cotidianas nos muestran que **el giro se consigue tanto mejor no solo cuando mayor es la fuerza que se aplica al cuerpo (con un punto fijo) sino que tal efecto se incrementa/disminuye con la distancia del punto de aplicación de la fuerza a ese punto fijo**. Evidentemente también se pueden hacer girar objetos sin puntos fijos, y de ellos hablaremos luego. En cualquiera de los casos, la magnitud **MOMENTO** de una fuerza respecto de un punto,  $\vec{M}_O$ , nos permite medir esa 'capacidad de giro'.

Como recordarás del primer tema de cálculo vectorial, se define el momento de una fuerza respecto de un punto como el producto vectorial del vector de posición y la fuerza:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Recuerda que el vector de posición tiene su origen en el punto en cuestión y por extremo, el origen de F. Por tratarse de una definición de producto vectorial el módulo de M será:

$$M = r \cdot F \cdot \text{sen } \alpha = d \cdot F$$

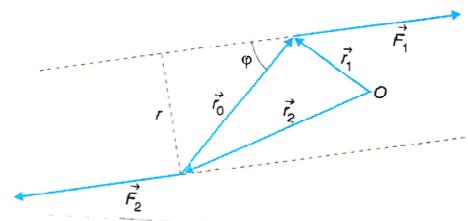


Donde **d es la distancia desde el punto a la recta dirección de F**.

El efecto giratorio depende por lo tanto, del módulo de la fuerza y de la distancia de la fuerza al punto de giro, por el camino más corto.

En ocasiones, el cuerpo que puede girar NO posee un punto fijo.

En esos casos, para que se produzca la rotación, es preciso aplicar UN PAR DE FUERZAS, entendiéndose por ello NO solo dos fuerzas cualesquiera, sino que han de ser dos fuerzas de igual módulo, direcciones paralelas y sentidos opuestos. Cuando se cumplen estas características tenemos lo que en física se conoce como PAR DE FUERZAS, y uno de los efectos principales que produce es, precisamente, un giro. Evidentemente la resultante de un par de fuerzas es cero, y por tanto el objeto NO se traslada, pero sí rota, y por tanto esa capacidad de rotación se la mide con EL MOMENTO.



Para determinar el momento total respecto O, sumaremos los momentos de cada una de las fuerzas respecto del punto O (en la figura):

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_0 \times \vec{F}_1$$

El módulo de este último producto vectorial es  $M = r_0 \cdot F_1 \cdot \text{sen } \rho = r \cdot F_1$  que como se ve, es independiente del punto respecto del que se tomen los momentos, siendo r la distancia de separación entre sus direcciones.

En realidad, en contra de lo que pueda suponerse estos conceptos introducidos son muy útiles ya que todo movimiento de un objeto puede considerarse –por complicado que sea– como una combinación de una traslación (de su centro de masas<sup>2</sup>) y de una rotación respecto de un eje que pase por ese centro de masas. En aras de la aplicabilidad, **se suelen considerar positivos** los momentos que tienen el mismo sentido que las agujas del reloj (recuerda la regla del tornillo de la que hablamos en el capítulo de producto vectorial) **y negativos** los de sentido contrario.

<sup>2</sup> El centro de masas de un sistema de partículas es un punto tal que si toda la masa del sistema estuviera concentrada en él, el sistema se comportaría como una única partícula. De hecho, la resultante de todas las fuerzas exteriores se aplica en ese punto.

Así las cosas, las condiciones de equilibrio a las que ha de someterse un cuerpo pueden resumirse en dos:

$$\sum \vec{F}_{\text{exteriores}} = 0$$

$$\sum \vec{M}_{0,\text{exteriores}} = 0$$

De hecho, de esta segunda condición se deduce **la ley de la palanca**.

#### 4. CANTIDAD DE MOVIMIENTO o MOMENTO LINEAL.

En realidad, para los griegos y escolásticos aristotélico-tomistas de la Edad Media, la afirmación de que no es necesaria una fuerza ni agente externo **para mantener** un objeto en movimiento con velocidad constante y en línea recta, hubiera parecido absurda. Hasta los días de Galileo y Newton, el movimiento uniforme sin una causa persistente y continua no fue, generalmente, concebible.

El intento de liberar la idea del movimiento y de estudiarlo como un fenómeno independiente se remonta, en realidad, al fraile franciscano del siglo XIV, **William Ockam** (muerto en 1347). La universidad de París, donde él enseñó, llegó a ser un centro de estudios sobre mecánica durante la alta Edad Media y, aunque representaba una opinión minoritaria en su tiempo, influyó posteriormente, de modo muy intenso en hombres como Leonardo de Vinci y el propio Galileo.

Fruto de la labor de Ockam es el primer esbozo sobre la llamada **cantidad de movimiento**, que posteriormente sería mejorado y ampliado. Para el fraile y sus discípulos, un cuerpo móvil posee una cantidad de movimiento, **definida por el producto de la masa del cuerpo por la velocidad que lleva**, y que puede (o no) variar a lo largo de su recorrido. Es fácil comprobar que hay una mayor dificultad para acelerar o frenar un camión que se mueve con UNA MISMA velocidad que una bicicleta: dicho de otro modo, hay una mayor resistencia a que se les cambien el movimiento. Tal resistencia a ese cambio de movimiento es lo que venimos denominando inercia. Sin embargo, la inercia de un cuerpo 'es una cualidad' y si deseamos comparar cuánta más inercia tiene el camión que la bicicleta hemos de asignarle un valor cuantitativo. El valor numérico que nos da *la medida de la inercia* es lo que ya hemos bautizado como 'masa inercial' y parece claro con el ejemplo del camión y la bicicleta que la velocidad y la masa inercial son los dos conceptos claves **para caracterizar** 'el estado' de un movimiento. La magnitud que relaciona la masa y la velocidad del cuerpo, se denomina **CANTIDAD de MOVIMIENTO** (o momento lineal) que videntemente resultará una magnitud vectorial.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

La unidad de cantidad de movimiento en el S.I. es el  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ .

Al haber introducido esta nueva magnitud para ayudarnos a caracterizar los movimientos, las leyes de Newton adquieren un sentido más amplio. La ley de inercia es

---

Q18. ¿Por qué cuesta más trabajo abrir una puerta empujando cerca de sus bisagras?

---

Q19. Deseamos volcar una caja de 650 kg puesta en un suelo horizontal aplicando una fuerza paralela al suelo y en el centro. La caja tiene una altura de 80 cm y 40 cm de base. ¿Qué fuerza mínima será necesario aplicar en su centro para conseguirlo? Al irse levantando la caja, ¿habrá que aplicar una fuerza cada vez mayor o menor?

---

Q20. Estamos rodando por un suelo liso un bidón de 500 kg y 40 cm de radio. ¿Qué fuerza (paralela al suelo) mínima hay que aplicarle en su centro para hacerlo subir por un escalón de 6 cm de alto?

---

Q21. Una pelota de tenis de 250 g es lanzada a 20 m/s y devuelta por un jugador en sentido opuesto a 15 m/s. Determinar la cantidad de movimiento antes y después del golpe.

---

Q22. Un objeto de 400 g se mueve con una velocidad  $\mathbf{v} = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$  en S.I. Determinar la *variación* de cantidad de movimiento entre los instantes 2 y 3 s

reformulable en unos términos más precisos al admitir que si sobre un cuerpo NO actúan fuerzas exteriores (una partícula aislada), y por tanto NO variar ni su masa ni su velocidad, **LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PERMANECE CONSTANTE**. Observa que visto de este modo, lo que exige la ley de inercia no es exactamente que se conserve la velocidad, sino el *producto* de masa por velocidad. Estrictamente hablando NO hay partículas aisladas, de modo que se consideran así cuando están lo suficientemente alejadas unas de otras como para considerar que no perciben sus mutuas influencias.

La segunda ley de la Dinámica (la ley fundamental) también admite una reformulación, del siguiente modo tan interesante:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Podemos recordar que

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}$$

con lo que esta segunda ley puede escribirse como

$$\sum \vec{F} = m \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}$$

y puesto que estamos asumiendo que **la masa permanece invariable**:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) \\ \sum \vec{F} &= \frac{d}{dt} \vec{p} \end{aligned}$$

Esto es, a partir de haber introducido el concepto de momento lineal, la resultante de las fuerzas NO nulas que actúan sobre un cuerpo se emplea en provocar una variación en su cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Un resultado que reluce de este último modo de escribir la segunda ley de Newton, es **la relación existente entre la fuerza y el tiempo de actuación de la misma**. Así pueden conseguirse *iguales efectos al actuar una fuerza intensa sobre un cuerpo en un breve instante, que otra de menor intensidad actuando un lapso de tiempo más grande*. Estas ideas constituyen la esencia de otra magnitud (vectorial) llamada **impulso mecánico, (I)** definida como **el producto de la fuerza por el tiempo de actuación de la misma**, cumpliéndose (en primera aproximación) la igualdad entre impulso y variación de momento lineal:

$$\sum \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{I} = \Delta \vec{p}$$

Como no podía ser de otro modo, también la tercera ley de Newton (acción-reacción) se ve influida por la introducción del concepto de cantidad de movimiento, si bien como veremos ahora, nos va a conducir a una de las leyes de conservación más importante de la Física: la LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

---

Q23. Un objeto móvil de 4 kg de masa lleva de ecuación  $\mathbf{r} = (t^2+2)\mathbf{i} - t\mathbf{k}$ . Determina la fuerza resultante que actúa sobre él en  $t = 2$  s.

---

Q24. ¿Por qué al caernos de un segundo piso y chocarnos contra el suelo de cemento los resultados son más desastroso que si caemos sobre una colchoneta?

---

Q25. Un guisante seco de 0,4 g de masa es disparado con una pajita de plástico bajo la acción de una fuerza de 0,35 N durante los 0,14 s que permanece en la cañita. Determina la rapidez que tendrá al salir disparado.

---

Q26. ¿Por qué los jugadores profesionales de baloncesto NO juegan en canchas de cemento y solo lo hacen en las que tiene un suelo de madera con cámara de aire debajo?

---

Q27. Una pelota de 55 g choca contra una raqueta a 144 km/h y rebota con la misma rapidez. El contacto dura 15 centésimas de segundo. Determina la variación de cantidad de movimiento y la fuerza ejercida sobre la pelota, admitiendo que la pelota incide y rebota perpendicularmente a la raqueta.

Ya sabemos que esta 3ª ley describe una propiedad importante de las fuerzas: éstas siempre se presentan por parejas; de modo que si un cuerpo A ejerce una acción (fuerza) sobre otro cuerpo B, éste otro ejercerá sobre el primero (A) una fuerza igual (en módulo) y de sentido contrario.

Existe una consecuencia sencilla, pero muy importante, de esta tercera ley en el caso de **dos objetos aislados** de su medio ambiente de modo que las únicas fuerzas que actúan sobre ellos son las que se ejercen entre sí.

Bajo estas condiciones, sea  $m_1$  y  $\mathbf{v}_1$  la masa y velocidad inicial de uno de esos cuerpos, y  $m_2$  y  $\mathbf{v}_2$  las correspondientes al otro. Las fuerzas que cada uno de ellos ejerce sobre el otro las denominaremos  $F_{12}$  y  $F_{21}$ . En realidad la relación entre ambas puede escribirse como

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

y recordando la nueva formulación de la 2ª ley:

$$\vec{F}_{12} = m_2 \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_2$$

$$\vec{F}_{21} = m_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_1$$

o sea:

$$0 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$$

$$0 = m_2 \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_2 + m_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_1$$

$$0 = \frac{d}{dt} (m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2)$$

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = \text{constante}$$

Acabamos de ver, por tanto, que para dos cuerpos sujetos únicamente a sus interacciones mutuas, **la suma VECTORIAL de las cantidades de movimiento de los cuerpos permanece constante a lo largo del tiempo**. Este resultado es equivalente a la tercera ley de Newton. De hecho, parece que Newton llegó a su enunciado de la acción y reacción estudiando la cantidad de movimiento de dos cuerpos antes y después de que chocaran. Cuando dos objetos chocan, se ejercen fuerzas muy grandes entre sí durante el breve tiempo en que están en contacto. A partir de medidas cuidadosas hechas por sus predecesores, Newton sabía que independientemente del tipo de colisión o choque que se produjera, **la suma de las cantidades de movimiento de los dos cuerpos en colisión es la misma antes y después del choque**. Hay que subrayar que *lo que permanece invariable es la suma (total) de las cantidades de movimiento*, que no así los momentos lineales individuales de cada cuerpo implicado.

Aquí se ha demostrado la aplicación para sólo dos cuerpos, cada uno de los cuales experimenta sólo la acción de una fuerza ejercida por el otro. En realidad, mediante una generalización mayor, puede verse que esta ley puede aplicarse a un sistema de cuerpos aislados, sin importar el número de los mismos.

---

Q28. Una patinadora de 50 kg que se mueve a 3 m/s se abraza a un patinador de 70 kg que se movía en sentido opuesto a 2 m/s. Determina la velocidad (vector) con la que se mueven ambos tras unirse.

---

Q29. Un fusil de 4 kg dispara balas de 8 g con una rapidez de 150 m/s. Determina la rapidez de retroceso del fusil.

---

Q30. Una persona se cae de un árbol. Cuando choca con el suelo, la fuerza que ejerce éste contra la persona ¿es igual al peso de la persona? ¿Por qué depende de la altura de la caída? ¿Por qué depende también de si el suelo es duro o blando?

---

Q31. Una partícula de 300 g se mueve a 0,8 m/s según el sentido positivo del eje OX y choca con otra partícula de 410 g que estaba en reposo. Tras el choque, la primera de las partículas se mueve a 0,32 m/s y formando un ángulo de 30º con OX. Determina la rapidez y dirección de movimiento de la segunda partícula, así como la variación de momento lineal de cada una de ellas.

---

## BOLETÍN DE PROBLEMAS

1. Un átomo de Ra de número másico 224 en reposo, se desintegra espontáneamente emitiendo una partícula alfa (núcleo de He) con una rapidez de 105 m/s. ¿Cuál es la velocidad y sentido del movimiento que adquiere el núcleo residual?

Solución: 1818,1 m/s

2. Con qué rapidez máxima deberá un vehículo tomar una curva de 90 m de radio que está peraltada  $8^\circ$  y con un coeficiente de rozamiento de 1,64.

3. Dos bloques de 10 kg y 20 kg, respectivamente, que están en contacto uno con otro se encuentran inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Si se aplica una fuerza horizontal de 8 N: a) ¿Qué aceleración adquiere el conjunto?; b) ¿qué otras fuerzas operan sobre el sistema?; c) ¿Cuál es el valor de las fuerzas de contacto entre ambos bloques?

Solución: 0.26 m/s<sup>2</sup>; 2.66 N

4. En un partido de pelota vasca, un pelotari golpea desde 20 metros una pelota de 200 gramos que sale despedida de su mano (a 1 metro sobre el suelo) formando un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal. La pelota golpea horizontalmente contra la pared y, tras rebotar, cae a 15 metros de ella. ¿Qué impulso ha ejercido la pared sobre la pelota?

Solución: 6,23 kg m/s

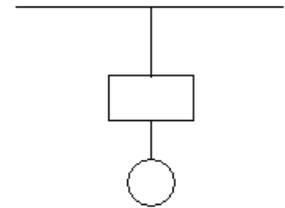
5. Deseamos medir la relación entre las masas de dos carritos A y B que colisionan. Para ello lanzamos el carrito A con una rapidez de 0,7 m/s contra el carrito B que está en reposo. Después del impacto, A rebota con una rapidez de 0,3 m/s, mientras que B sale despedido con una rapidez de 0,5 m/s. ¿Cuál de las dos masa es mayor y en qué proporción?

Solución: la masa de B es el doble de la masa de A

6. Un vagón que dispone de un contenedor abierto por la parte superior tiene una masa total de 1250 kg y se mueve a una velocidad de 30 km/h sobre una vía recta. En cierto momento comienza a llover y el contenedor se llena a razón de 5 L/min. A) ¿Con qué velocidad se moverá al cabo de una hora y media de incesante lluvia (se desprecia el rozamiento). B) Expresa la rapidez del vagón en función del tiempo.

Solución: a) 22 km/h

7. Del techo cuelga una caja de 800 g y de ella cuelga una bola de 200 g. Determina las tensiones de las dos cuerdas

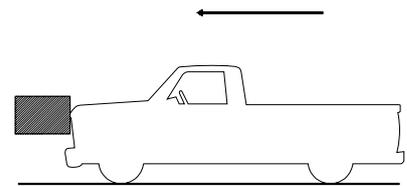


8. Un obrero de 90 kg levanta una caja de 50 kg mediante una polea. Determina la fuerza entre el obrero y el suelo cuando tira de la cuerda a velocidad constante. ¿Cuál es la aceleración máxima que puede imprimirle a la caja para no despegarse él mismo del suelo?

9. Desde un helicóptero que está a 1000 m de altura lanzamos horizontalmente y hacia "la derecha" un proyectil de 10 kg de masa con una rapidez de 200 m/s. Despreciando rozamientos, calcula la cantidad de movimiento (vector) del proyectil 10 segundos después de su lanzamiento.

10. En un choque entre dos bolas de billar idénticas, de 0,5 kg cada una, la velocidad de la bola que iba en movimiento antes del choque era de  $\mathbf{V}_a = 16 \mathbf{i}$  m/s. Después del choque esa bola tenía una velocidad de  $\mathbf{V}'_a = 8 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$  mientras que la otra tenía una velocidad de  $\mathbf{V} = 7 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j}$  m/s. ¿Son posibles esos datos? Explicar.

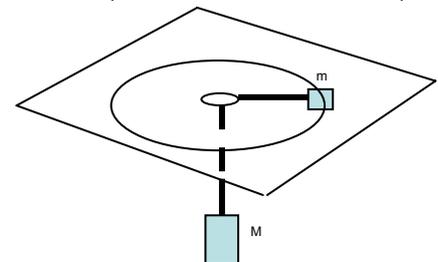
11. ¿Con qué aceleración deberá moverse el vehículo de la figura (de masa M) para que el objeto de masa m no deslice por la superficie vertical de contacto (es decir, que no caiga). El coeficiente de rozamiento entre ambos es  $\mu$ .



12. Dos patinadoras gemelas aseguran muy serias que tienen una masa de 45 kg cada una de ellas. Marchan con velocidades opuestas de 2 m/s. Se encuentran, se enlazan y, ante el asombro de los espectadores (todos entendidos en física), no quedan en reposo en la pista sino que marchan, muy lentamente, hacia la derecha con una velocidad de 10 cm/s. Una de las dos (adicta en secreto al chocolate) ha engordado. ¿Cuál de ellas? ¿Cuánto pesaría?

Sol.: la de la izquierda; 500 N

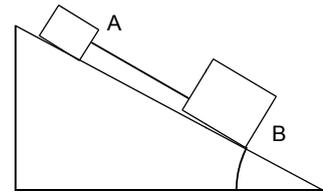
13. ¿A qué velocidad ha de girar sobre la superficie el cuerpo m para que la masa M permanezca en equilibrio? (No hay rozamiento) ( $M = 3,5$  kg;  $m = 0,5$  kg;  $r = 50$  cm)



14. Un camión va cargado con cajas de huevos. El coeficiente de rozamiento entre las cajas y el suelo del camión es 0,3. Suponiendo que el camión se mueve a 72 km/h, calcula la distancia mínima en que debe detenerse, frenando de manera uniforme, para que las cajas no deslicen.

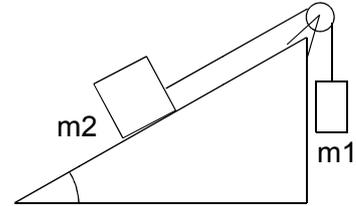
15. Determina el peralte que deberá tener una curva de 60 m de radio para que se pueda tomar una curva con una velocidad de 50 km/h aunque esté cubierta de hielo.

16. El objeto A tiene una masa de 3 kg y está unido a otro B de 2 kg mediante una cuerda ligera e inextensible. El coeficiente de rozamiento entre A y el plano es de 0,3 y entre B y el plano 0,2. Determina la aceleración de los objetos y la tensión de la cuerda. (El ángulo del plano señalado es de  $32^\circ$ )



17. Sobre una mesa descansa un libro SIN rozamiento. Encima del libro se coloca un estuche. Si entre el libro y el estuche el coeficiente de rozamiento es  $\mu$ , ¿qué condición deberá cumplirse para que al tirar del libro con una fuerza paralela de módulo  $F$  se muevan el libro y el estuche conjuntamente?

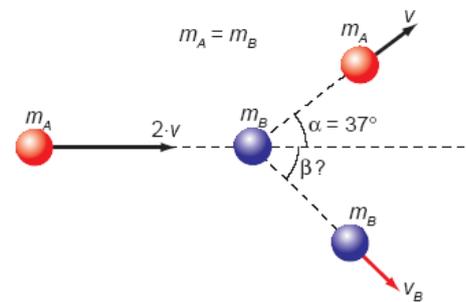
18. Estudia el sistema de la figura y deduce en qué condiciones, en función de las masas de los cuerpos, del coeficiente de rozamiento y del ángulo del plano inclinado, el sistema evoluciona hacia la derecha, hacia la izquierda o queda en equilibrio.



19. Un cuerpo de 10 kg se mueve en cierto momento con una velocidad  $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}$  (SI). Al cabo de 12 s su velocidad es  $12\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ . Si la fuerza que actúa es constante, determina las componentes de esa fuerza y su valor.

Sol.:  $5\mathbf{i} + 3,33\mathbf{j}$ ; 6 N

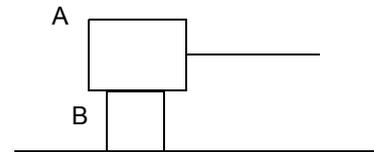
20. Una bola de billar golpea a otra que se encuentra en reposo, y tras el choque, se mueven ambas como se indica en la figura. Sabiendo que las dos bolas tienen la misma masa y que la primera reduce su velocidad a la mitad, calcula el ángulo que forma la dirección en que sale la segunda bola con la dirección en que se movía la primera. [Sol.:  $26,6^\circ$ ]



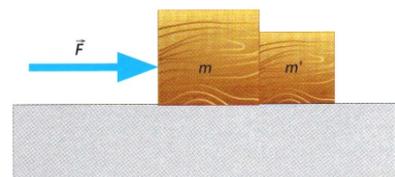
21. Un tronco de un árbol, de 50 kg, se desplaza flotando en un río a 10 m/s. Un cisne de 10 kg intenta aterrizar en el tronco mientras vuela a 10 m/s en sentido contrario al de la corriente. Sin embargo, resbala a lo largo del tronco, saliendo por el otro extremo con una velocidad de 4 m/s. Calcula la velocidad con que se moverá el tronco en el instante en que el cisne lo abandona. Considera despreciable el rozamiento del tronco con el agua. [Sol.: 8,8 m/s]

22. Un misil de masa  $M$  vuela horizontalmente a 330 m del suelo con una rapidez constante de 270 km/h. En cierto momento estalla en dos trozos. Uno de ellos, de masa  $\frac{2}{5}M$ , sale disparado hacia el suelo con un ángulo de  $28^\circ$  bajo la horizontal de vuelo, llegando a alcanzar una distancia en tierra de 180 m. ¿Cuál fue la velocidad del segundo trozo y qué altura máxima desde el suelo llegó a alcanzar?

23. Un cuerpo A de 12 kg está situado sobre otro cuerpo B de 4 kg. Del bloque superior tiramos de una cuerda de masa despreciable de modo que todo el conjunto se desplaza con cierta aceleración común. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre los bloques es 0,18 y que NO hay rozamiento importante en el suelo, calcular la fuerza que se aplicó a la cuerda y la fuerza que hizo moverse al bloque B.

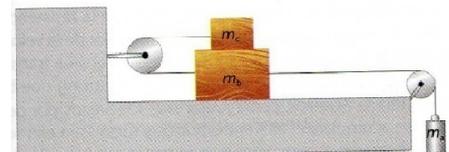


24. Los cuerpos  $m$  y  $m'$  de la figura reposan en contacto sobre una superficie lisa y horizontal. Aplicamos una fuerza  $F$  directamente sobre  $m$ , (a) ¿Qué aceleración adquieren los cuerpos y qué fuerza neta actúa sobre cada uno de ellos?; (b) Resolver la misma situación admitiendo que hay un coeficiente de rozamiento  $\mu$  igual para los dos objetos; (c) Ídem si los coeficientes de rozamientos son distintos para cada cuerpo.



25. En el sistema de la figura, las masas valen  $m_a = 15$  kg;  $m_b = 5$  kg y  $m_c = 3$  kg, y el coeficiente de rozamiento entre b y c es 0,3, no existiendo rozamiento apreciable sobre la mesa. Calcula la aceleración del sistema y las tensiones de las cuerdas.

Sol.  $5,6 \text{ ms}^{-2}$ ;  $T_1 = 25,6 \text{ N}$ ;  $T_2 = 63 \text{ N}$



## 5. Recordando a R. HOOKE.

El resultado de colgar un objeto a un muelle sujeto al techo, es producir una deformación en el mismo, observable por el estiramiento que el muelle experimenta. Este simple experimento admite algunas consideraciones. Así por ejemplo, es fácilmente entendible que ese alargamiento es tanto mayor cuanto mayor sea también el peso del objeto que se le cuelga. También, la cuantía de la deformación en el muelle dependerá de la naturaleza del mismo. Por último, cabe admitir que la fuerza que actúa sobre el muelle (numéricamente igual a la que éste es capaz de ejercer) tendrá un sentido contrario a la deformación que se ha producido.

Estas ideas constituyen la esencia de la denominada **ley de Hooke**, que ya se estudió también en el curso pasado, en honor de Robert Hooke (1635-1703) científico inglés, contemporáneo de Newton. La ecuación que nos permite determinar la fuerza que ejerce el muelle sobre el objeto que cuelga (o lo estira) se la conoce con el nombre de "ley de Hooke" y puede expresarse como:

$$\vec{F} = -k \cdot x \vec{u}$$

siendo "x" la **deformación producida**, y **u** un vector unitario en la dirección de F. **K es una constante** que depende de la naturaleza del muelle y que en el Sistema internacional viene expresada en N/m. Como puede observarse, esta fuerza es de sentido contrario a la deformación producida.

---

Q32. Una masa de 4 kg se ata al extremo de un muelle vertical de modo que observamos que se estira 8,2 cm. Seguidamente hacemos rotar la masa unida al muelle en un plano horizontal ('al estilo del péndulo cónico') con una rapidez angular constante de 30 rpm . Determina cuánto se estira ahora el resorte.

---

Q33. Un objeto de 400 g se mueve con una velocidad  $\mathbf{v} = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$  en SI. Determinar la *variación* de cantidad de movimiento entre los instantes 2 y 3 s

## MÁS PROBLEMAS FINALES

1. Un átomo de Uranio se desintegra en dos partes cuyas masas valen  $2,5 \cdot 10^{-25}$  kg y  $1,5 \cdot 10^{-25}$  kg. Sin tener presente otras partículas de masa despreciable, determinar en qué relación están las velocidades de ambos fragmentos.
2. Un hombre de 80 kg de masa está patinando con una rapidez de 6 m/s y choca con un niño de 40 kg que está patinando en sentido contrario a 9 m/s. ¿Cuál es la velocidad de los dos juntos cuando chocan?
3. Un núcleo atómico, inicialmente en reposo, se descompone radiactivamente emitiendo un electrón con un momento lineal de  $9,22 \cdot 10^{-16}$  g.cm/s y, perpendicularmente a la dirección del electrón, un neutrino con un momento lineal de  $5,33 \cdot 10^{-16}$  g.cm/s. ¿En qué dirección retrocederá el núcleo residual y cuál será su momento lineal?
4. Un tenista recibe una pelota de 55 g de masa, con una rapidez de 72 km/h; y la devuelve, en sentido contrario, con una rapidez de 36 km/h. Determina el impulso que recibe la pelota y la fuerza (media) que aplica el tenista, si el contacto de la pelota con la raqueta dura una centésima de segundo.
5. Al dinamitar una roca, ésta sale despedida en tres fragmentos. Dos de ellos, de 10 y 20 kg de masa salen en ángulo recto a 15 y 10 m/s respectivamente. Deducir la masa del tercer fragmento, cuya rapidez es de 5 m/s.
6. Una misma fuerza, ¿producirá el mismo efecto al actuar durante 1 segundo sobre un cuerpo de 4 kg que si actúa durante 4 segundos sobre un cuerpo de 1 kg?
7. Un vagón de 890 kg está detenido en una vía cuando se dirige hacia él otro vagón de 1300 kg con una rapidez de 24 km/h en línea recta. Tras la colisión, ambos quedan enganchados, pero ¿a qué velocidad se moverán? ¿Cuál hubiera sido la velocidad tras la colisión si inicialmente el vagón de 890 kg se dirige hacia el segundo con una rapidez de 14 km/h?  
¿Y si el vagón de 890 kg llevara inicialmente una rapidez de 8 km/h en la misma dirección y sentido que el que colisiona con él a 24 km/h?

8. Se ha determinado que el cráneo humano se rompe cuando se lo golpea ejerciendo una presión de  $5000 \text{ N/cm}^2$ . Un martillo de  $2 \text{ kg}$  de masa y  $5 \text{ cm}^2$  de sección se suelta desde una altura  $h$  y por desgracia cae sobre la cabeza de una persona calva de forma que el golpe ocurre con toda la sección del martillo. Si el contacto entre la cabeza y el martillo dura una milésima de segundo, ¿a partir de qué altura habrá rotura de cráneo?

9. Una barca está en reposo. Juan, de  $70 \text{ kg}$ , salta desde la proa (hacia fuera) con una rapidez de  $4 \text{ m/s}$  y justo en el mismo instante, Beatriz, de  $50 \text{ kg}$  lo hace desde la popa con una rapidez de  $3 \text{ m/s}$ . Determinar la rapidez de la barca justo después de ambos saltos sabiendo que la masa de la barca es de  $100 \text{ kg}$ .

10. Un vagón de  $50 \text{ t}$  de masa se mueve con una rapidez de  $12 \text{ Km/h}$  y choca contra una plataforma de  $30 \text{ t}$  de masa que se encuentra en la vía. Encontrar la velocidad del movimiento en conjunto del vagón y la plataforma, justamente después de que comience a funcionar el enganche automático. Calcular la distancia, recorrida por el vagón y la plataforma después del embrague, si la fuerza de resistencia es igual al  $5 \%$  del peso.

11. Calcular la fuerza que un objeto de  $60 \text{ kg}$  ejerce sobre el piso de un ascensor cuando:

- Está en reposo.
- Asciende con una velocidad constante de  $1 \text{ m/s}$ .
- Asciende con una aceleración cte. de  $1 \text{ ms}^{-2}$
- Desciende con aceleración cts. de  $1 \text{ ms}^{-2}$
- Si el ascensor y el objeto pesan juntos  $500 \text{ kg}$ , ¿qué tensión deberá ejercer el cable del motor en el caso c)?

12. Un cuerpo de  $0,5 \text{ kg}$  recorre una circunferencia vertical atado al extremo de una cuerda de  $0,5 \text{ m}$  de longitud a celeridad cte. de  $6 \text{ m/s}$ . Hallar la tensión de la cuerda cuando el cuerpo está:

- En el punto más bajo de la circunferencia.
- En el más alto.
- Al mismo nivel que el centro de la circunferencia.
- Formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal.

13. Una partícula de  $2 \text{ kg}$  se mueve con una velocidad de  $2\mathbf{i}$  (SI). Otra de  $4 \text{ kg}$  lo hace a  $4\mathbf{j}$  (SI). Estas dos partículas chocan y se observa que la 2ª partícula se mueve según el eje OX y que la otra forma un ángulo de  $90^\circ$  con dicho eje. Se pide:

- Velocidad de las partículas tras la colisión.
- El momento lineal total del sistema antes y después de la colisión. ¿Se conserva?
- El momento lineal final de la 1ª partícula tras el choque.
- La variación de los momentos lineales que experimentan cada partícula.

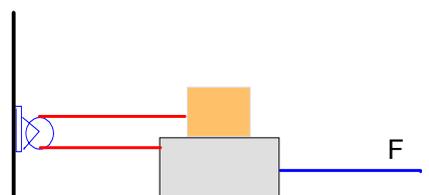
14. Una partícula  $\alpha$  choca con un núcleo de carbono y se desvía de modo que su trayectoria después del choque forma un ángulo de  $42^\circ$  con la trayectoria inicial. Suponemos que el núcleo de carbono está en reposo en el punto  $(0,0)$  y que tras el choque se pone en movimiento formando un ángulo de  $-68^\circ$  con la trayectoria inicial de la partícula  $\alpha$ . Calcular la relación de las rapidezces de ambas partículas tras el choque.

15. Un cuerpo A de  $4 \text{ kg}$  se mueve con una velocidad de  $10 \text{ m/s}$  en el sentido positivo del eje OX, chocando contra otra masa de  $16 \text{ kg}$  en reposo en el punto  $(0,0)$ . Tras el choque, A sale a  $5 \text{ m/s}$  bajo un ángulo de  $60^\circ$  con OX. Calcular: a) Rapidez de B; b) Ángulo que forma la partícula B con el eje OX

16. Una partícula puntual de masa  $m$ , sujeta al extremo de una cuerda de longitud  $L$ , gira describiendo circunferencias horizontales de radio  $R$ , siendo  $v$  su rapidez según un "péndulo cónico". Determinar el ángulo que forma la cuerda con la vertical, así como la tensión que experimenta.

17. Un cohete que se desplaza en línea recta y con velocidad uniforme de  $2000 \text{ km/h}$ , sufre una explosión dividiéndose en dos partes; una de ellas, de  $2/5$  de la masa total se mueve formando un ángulo de  $30^\circ$  por encima de la horizontal y con una velocidad de  $1000 \text{ km/h}$ . Determinar la velocidad y dirección del segundo fragmento (DE SELECTIVIDAD)

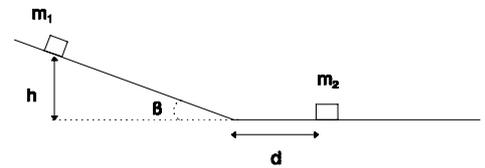
18. Un bloque de  $8 \text{ kg}$  de masa, descansa sobre otro mayor de  $20 \text{ kg}$  unidos entre sí por una cuerda que pasa por una polea, tal y como se recoge en la figura. Entre ambos bloques existe un coeficiente de rozamiento de  $0,15$ , mientras que no existe rozamiento alguno con el suelo. Del bloque mayor se tira (mediante una cuerda de masa despreciable) con una fuerza de  $60 \text{ N}$ . Determina la aceleración con que se mueve cada bloque y la tensión de la cuerda que une a los dos.



19. El bloque mayor del problema anterior (sólo él) está situado sobre un suelo rugoso ( $\mu = 0,12$ ). Mediante una cuerda (de masa despreciable) se tira de él formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal de tal forma que el bloque se mueve con una aceleración de  $0,15 \text{ ms}^{-2}$ . Determina el valor de la fuerza con que se tira del bloque.

20. Un proyectil de  $5 \text{ g}$  de masa se dispara horizontalmente sobre un bloque de madera de  $3 \text{ Kg}$  que se halla en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de  $0,2$ . El proyectil permanece empotrado en el bloque, y se observa que éste desliza  $25 \text{ cm}$  sobre la superficie. ¿Cuál era la velocidad del proyectil?

21. Desde lo alto de un plano inclinado y a una altura de  $5 \text{ metros}$  se deja un cuerpo de masa  $2 \text{ kg}$ . Al final de del plano y a  $2 \text{ metros}$  de la base, se encuentra otro cuerpo de masa  $2 \text{ kg}$  con el que colisiona. (ver figura). La colisión es totalmente inelástica. Si el coeficiente de rozamiento entre la superficie y los cuerpos es de  $0,2$ , y el ángulo de inclinación es  $30^\circ$ , calcular el tiempo transcurrido desde que se suelta el cuerpo en lo alto de la rampa hasta que se detienen.



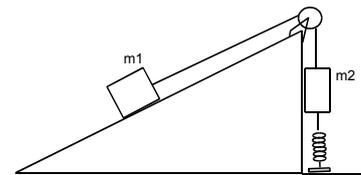
22. Una bola de billar lleva una velocidad de  $\mathbf{V}_1 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  respecto de un sistema de referencia situado en la esquina de la mesa, y choca con una segunda bola que se encuentra en reposo. Después del choque, la segunda bola se mueve con una velocidad de  $\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ . Calcula:

- La velocidad de la primera bola después del choque.
- Un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que la velocidad de la segunda bola después del choque.

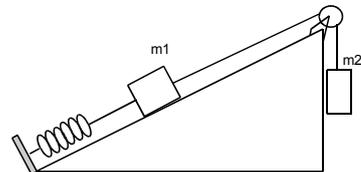


23. Una esfera de  $4 \text{ kg}$  de masa comprime  $12 \text{ cm}$  un muelle de  $K = 500 \text{ N/m}$  (ver figura adjunta). Dejamos en libertad el conjunto y la esfera recorre un tramo horizontal sin rozamiento para terminar subiendo un plano inclinado  $25^\circ$  sobre la horizontal (también sin rozamiento) hasta que finalmente se

detiene. Determinar 1) qué longitud recorre la esfera sobre el plano hasta que termina deteniéndose; 2) tras detenerse inicia el descenso: ¿qué tiempo emplea en llegar de nuevo al final del plano y con qué rapidez llega. (Admitir constante la fuerza que ejerce el muelle)



24. En las dos representaciones de la figura, determinar cuánto se estira el muelle de constante "K" si se sabe que el conjunto está en equilibrio y que NO existe rozamiento en el plano inclinado. Datos:  $m_1$ ,  $m_2$  y  $\alpha$ .



25. ¿Qué relación ha de existir entre las masas de la figura para que todo el conjunto se mueva con una aceleración que sea el  $25 \%$  de la gravedad, en el sentido que descienda  $m_1$ ? (Coeficiente de rozamiento en el plano  $\mu = 0,11$ )

