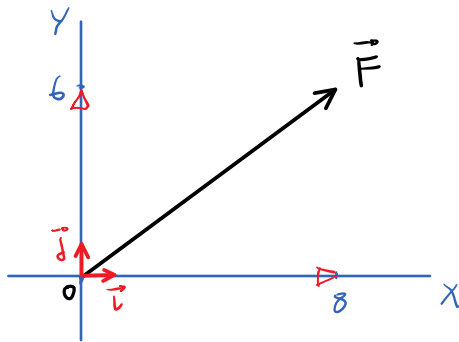


1. Dibuja una fuerza cuyo punto de aplicación sea el origen de coordenadas y cuyo extremo sea el punto (8, 6). Calcula el valor de su módulo o intensidad.

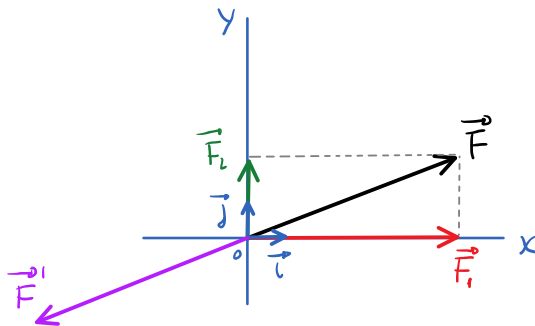


$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \rightarrow \vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j} \text{ (N)} = (8, 6)$$

Módulo:

$$|\vec{F}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ N}$$

2. ¿Qué fuerza se ha de hacer para contrarrestar dos fuerzas perpendiculares de intensidades $F_1 = 65 \text{ N}$ y $F_2 = 25 \text{ N}$? Realízalo e indícalo gráficamente, utilizando el método del paralelogramo.



$$|\vec{F}_1| = F_1 = 65 \text{ N}$$

$$|\vec{F}_2| = F_2 = 25 \text{ N}$$

La fuerza resultante de esas dos será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F} = 65\vec{i} + 25\vec{j} \text{ (N)}$$

Para contrarrestar esas dos fuerzas tendremos que realizar una fuerza de igual módulo y dirección pero de sentido contrario, a la fuerza resultante de esas dos ($\vec{F}$). Es decir la siguiente fuerza (que hemos representado):

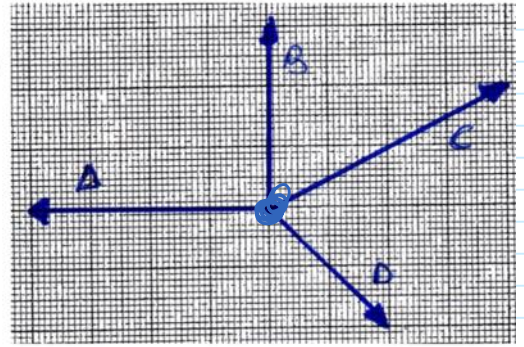
$$\vec{F}' = -\vec{F} = -65\vec{i} - 25\vec{j} \text{ (N)}$$

método del paralelogramo.

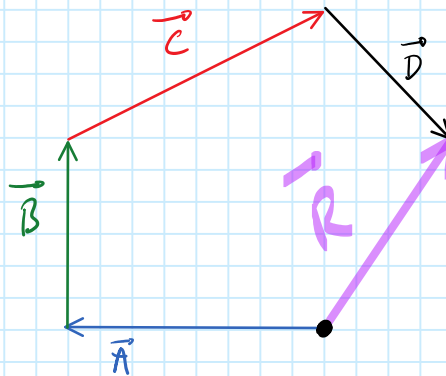
3) Usando la regla del polígono obtener la suma de las siguientes fuerzas, indicando el valor de la resultante:

a) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ (no alterar el orden)

b) $\vec{C} + \vec{A} + \vec{D} + \vec{B}$ (no alterar el orden)

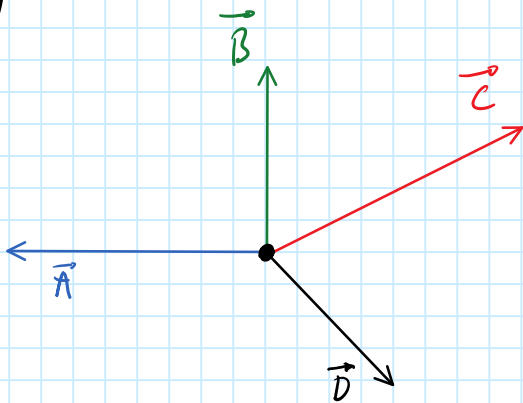


a)

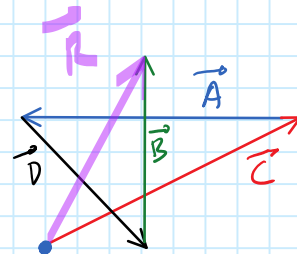


$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

b)

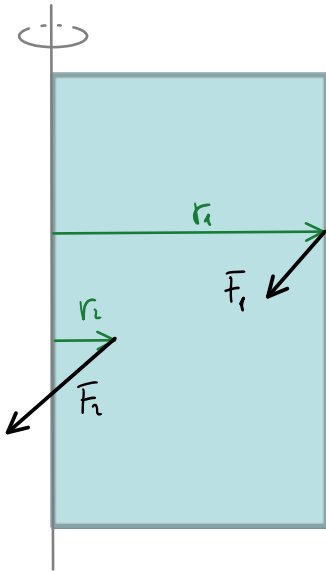


$$\vec{R} = \vec{C} + \vec{A} + \vec{D} + \vec{B}$$



4) Para cerrar una puerta hace falta aplicar una fuerza de 3 N a una distancia de 60 cm de las bisagras. Si aplicamos una fuerza de 15 N a 10 cm de las bisagras, ¿podremos cerrar la puerta? Explicalo.

B)



- Veamos el momento de fuerza (torque) mínimo necesario para poder hacer girar (cerrar) la puerta:

$$F_1 = 3 \text{ N} \quad r_1 = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow M_{\min} = r_1 \cdot F_1 \cdot \sin 90^\circ = 3 \cdot 0,6 \cdot 1 \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{M_{\min} = 1,8 \text{ N} \cdot \text{m}} \end{array} \right.$$

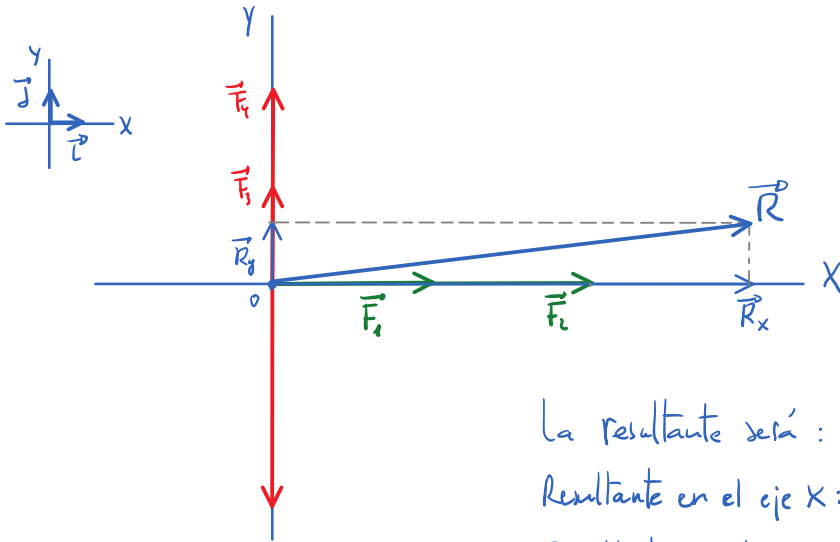
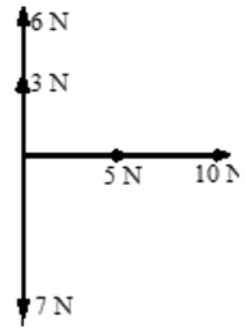
- Calculemos el momento de fuerza aplicado por la segunda fuerza:

$$F_2 = 15 \text{ N} \quad r_2 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow M = r_2 \cdot F_2 \cdot \sin 90^\circ = 15 \cdot 0,1 \cdot 1 \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{M = 1,5 \text{ N} \cdot \text{m}} \end{array} \right.$$

$\rightarrow \boxed{M = 1,5 \text{ N} \cdot \text{m}}$

Como dicho momento es menor que el mínimo necesario para que la puerta gire, entonces podemos deducir que dicha puerta no se cerrará (no girará).

3. Calcular la resultante del sistema de fuerzas de la figura.



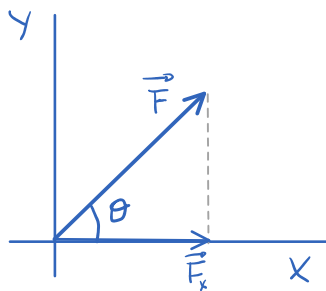
La resultante será: $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$

Resultante en el eje X: $\vec{R}_x = 5\vec{i} + 10\vec{i} = 15\vec{i} \text{ N}$

Resultante en el eje Y: $\vec{R}_y = 3\vec{j} + 6\vec{j} - 7\vec{j} = 2\vec{j} \text{ N}$

→ Por tanto: $\vec{R} = 15\vec{i} + 2\vec{j} \text{ (N)}$ → $|\vec{R}| = \sqrt{15^2 + 2^2} \cong 15,13 \text{ N}$

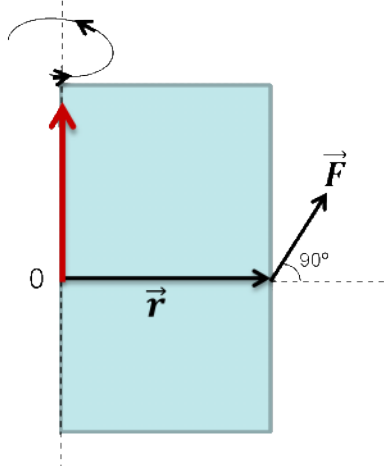
4. Halla el ángulo formado con el eje de las x por una fuerza de módulo 3,2 si su componente en el eje de las x es 2,2.



$$\left. \begin{array}{l} |\vec{F}| = F = 3,2 \text{ N} \\ |\vec{F}_x| = F_x = 2,2 \text{ N} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Como } F_x = F \cdot \cos \theta \rightarrow$$

→ $\cos \theta = \frac{F_x}{F} = \frac{2,2}{3,2} = \frac{11}{16} \rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{11}{16}\right) \rightarrow \theta \cong 46,57^\circ$

EJERCICIO: Halla el momento de una fuerza de 100 N aplicada perpendicularmente a una puerta de ancho 0,9 m. Indica la dirección del momento haciendo un dibujo. Ojo con la dirección de la fuerza.



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

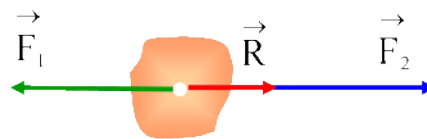
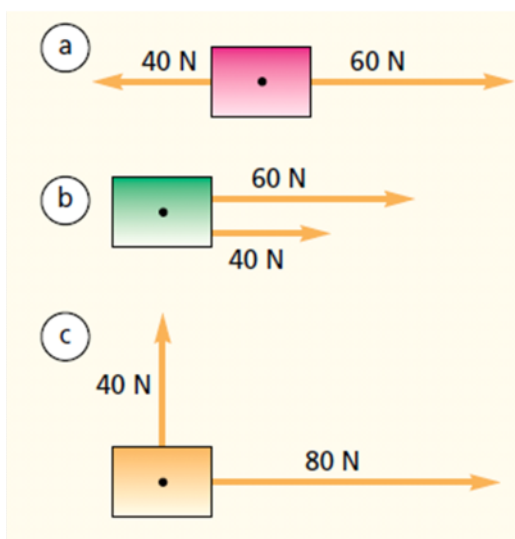
Módulo: $M = r \cdot F \cdot \text{sen}\alpha$

$$M = 0,9 \cdot 100 \cdot \text{sen}90^\circ$$

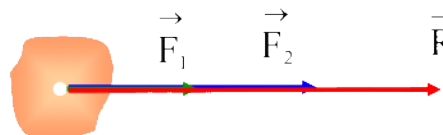
$$M = 90 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Dirección y sentido: regla de Maxwell.

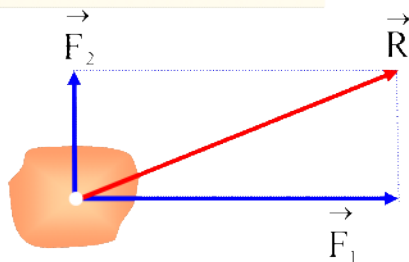
Ejercicio: Calcula gráfica y algebraicamente la suma de las siguientes fuerzas:



$$R = F_2 - F_1 = 60 - 40 = 20 \text{ N}$$



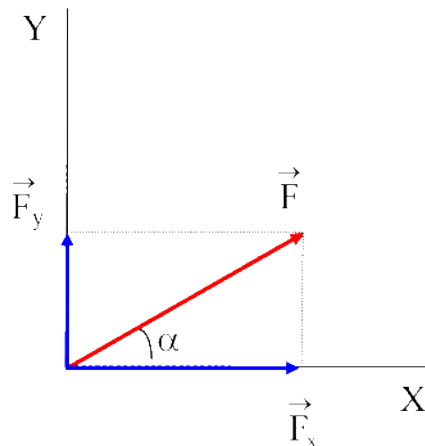
$$R = F_1 + F_2 = 40 + 60 = 100 \text{ N}$$



$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{40^2 + 80^2} \cong 89,44 \text{ N}$$

Ejercicio: hallar las componentes cartesianas de la fuerza F , de 25 N y que forma 30° con el eje X.

Datos: $F = 25 \text{ N}$; $\alpha = 30^\circ$



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

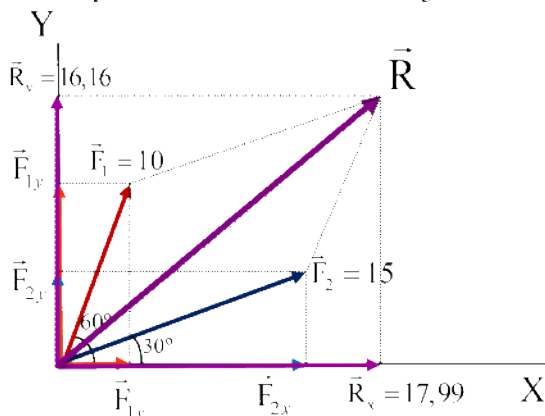
$$\vec{F} = (F_x, F_y)$$

Las componentes son:

$$F_x = F \cos \alpha = 25 \cos 30 = 21,65 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 25 \sin 30 = 12,5 \text{ N}$$

Ejercicio: hallar la fuerza resultante de dos fuerzas, $F_1 = 10 \text{ N}$ y $F_2 = 15 \text{ N}$, que forman 60° y 30° respectivamente, con el eje X.



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \underbrace{(\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x})}_{\vec{R}_x} + \underbrace{(\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y})}_{\vec{R}_y}$$

$$\vec{R}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = \vec{F}_1 \cdot \cos 60^\circ + \vec{F}_2 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cos 60 + 15 \cos 30 = 17,99 \text{ N}$$

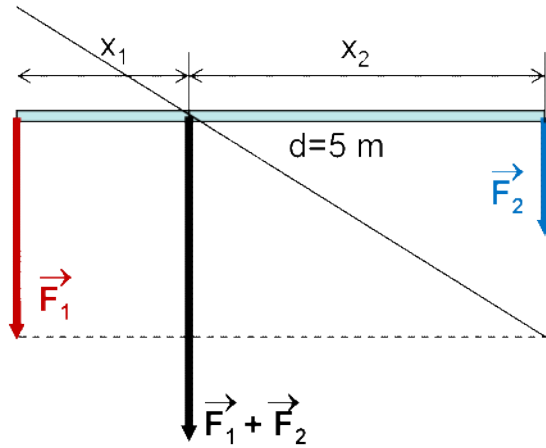
$$\vec{R}_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = \vec{F}_1 \cdot \sin 60^\circ + \vec{F}_2 \cdot \sin 30^\circ = 10 \sin 60 + 15 \sin 30 = 16,16 \text{ N}$$

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = (17,99 ; 16,16)$$

Su módulo será: $|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{17,99^2 + 16,16^2} = 24,18 \text{ N}$

5) Halla la fuerza resultante de dos fuerzas paralelas de 0,5 N y 1,5 N del mismo sentido aplicadas al extremo de una barra de 5 m, y su punto de aplicación. Representalo.

Datos: $F_1 = 1,5 \text{ N}$; $F_2 = 0,5 \text{ N}$; $d = 5 \text{ m}$; $R?$; $x_1?$; $x_2?$



$$R = F_1 + F_2 = 1,5 + 0,5 = \underline{2 \text{ N}}$$

$$x_1 + x_2 = d \Rightarrow x_1 + x_2 = 5$$

$$F_1 \cdot x_1 = F_2 \cdot x_2 \Rightarrow 1,5 \cdot x_1 = 0,5 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = 5 - x_1$$

$$1,5x_1 = 0,5 \cdot (5 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,5x_1 = 2,5 - 0,5x_1 \Rightarrow$$

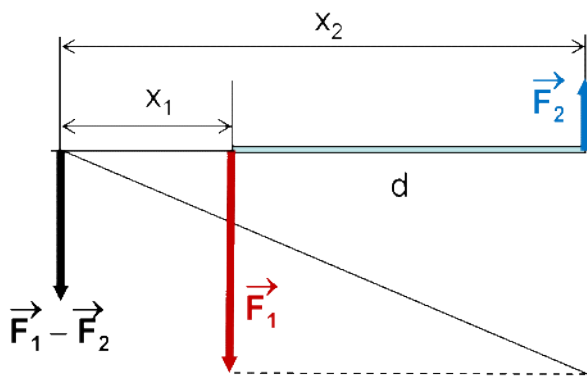
$$\Rightarrow 1,5x_1 + 0,5x_1 = 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2,5 \Rightarrow x_1 = \frac{2,5}{2} = \underline{1,25 \text{ m}}$$

$$x_2 = 5 - x_1 = 5 - 1,25 = \underline{3,75 \text{ m}}$$

6) Halla la fuerza resultante y su punto de aplicación, de dos fuerzas $F_1 = 3,5 \text{ N}$ y $F_2 = 1,5 \text{ N}$ de distinto sentido aplicadas al extremo de una barra de 2 m de longitud. Representalo.

Datos: $F_1 = 3,5 \text{ N}$; $F_2 = 1,5 \text{ N}$; $d = 2 \text{ m}$; $R?$; $x_1?$; $x_2?$



$$R = F_1 - F_2 = 3,5 - 1,5 = \underline{2 \text{ N}}$$

$$x_2 - x_1 = d \Rightarrow x_2 - x_1 = 2$$

$$F_1 \cdot x_1 = F_2 \cdot x_2 \Rightarrow 3,5 \cdot x_1 = 1,5 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 + x_1$$

$$3,5x_1 = 1,5 \cdot (2 + x_1) \Rightarrow$$

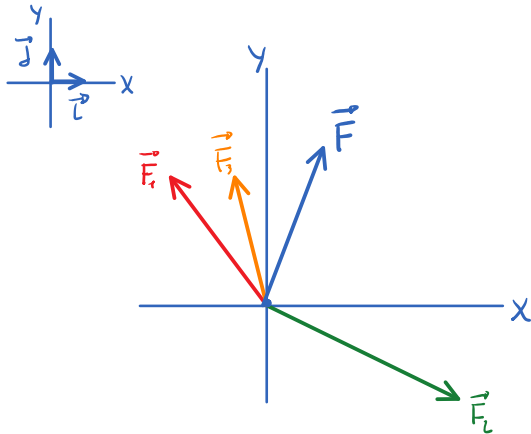
$$\Rightarrow 3,5x_1 = 3 + 1,5x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3,5x_1 - 1,5x_1 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} = \underline{1,5 \text{ m}}$$

$$x_2 = 2 + x_1 = 2 + 1,5 = \underline{3,5 \text{ m}}$$

5. Halla la suma de tres fuerzas en el plano, $F_1(-3, 4)$, $F_2(6, -3)$, $F_3(-1, 4)$. Hazlo también gráficamente.



Resultante:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_1 = -3\vec{i} + 4\vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_2 = 6\vec{i} - 3\vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_3 = -\vec{i} + 4\vec{j}$$

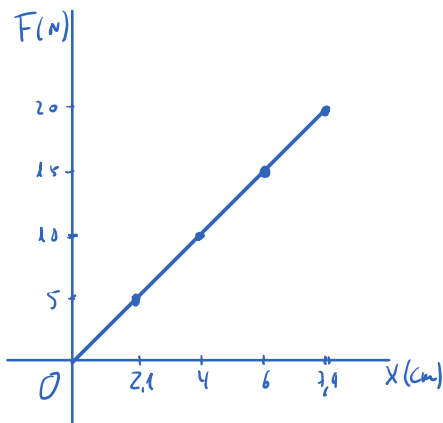
$$\vec{F} = 2\vec{i} + 5\vec{j} \text{ (N)}$$

6. Al realizar una experiencia para calcular la constante elástica de un muelle se han obtenido los siguientes resultados:

- Representa los datos de la tabla en una gráfica. ¿Cuál es el valor de la constante elástica del muelle?
- Calcula la masa de una pesa que se cuelga en el muelle y que produce un alargamiento de 12 cm.

F(N)	x(cm)
0	0,0
5	2,1
10	4,0
15	6,0
20	7,9

a)



La constante elástica coincide con el valor de la pendiente de la recta: Ley Hooke $\rightarrow |\vec{F}| = k|\vec{x}|$

$$k = \frac{F}{x} \approx \frac{5}{2,1} \approx \frac{10}{4} \approx \frac{15}{6} \approx \frac{20}{7,9} \approx 2,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

En el sistema internacional:

$$k = 2,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 250 \text{ N/m}$$

b) la pesa colgada en el muelle realizará una fuerza sobre el mismo igual a su peso:

$$F = P = mg ; \text{ El alargamiento es } x = 12 \text{ cm.}$$

$$\text{Por la ley de Hooke: } F = kx \rightarrow F = 2,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 12 \text{ cm} = 30 \text{ N} = P$$

$$\text{La masa será: } m = \frac{P}{g} = \frac{30}{9,8} \approx 3,06 \text{ kg}$$

Ejercicio: Un muelle cuya constante elástica vale 150 N/m tiene una longitud de 35 cm cuando no se aplica ninguna fuerza sobre él. Calcula: a) La fuerza que debe ejercerse sobre el muelle para que su longitud sea de 45 cm; b) La longitud del muelle cuando se aplica una fuerza de 63 N.

Datos: $K = 150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $\ell_0 = 35 \text{ cm} = 0,35 \text{ m}$; a) $\ell = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}$ b) $F = 63 \text{ N}$

a) Aplicamos la ley de Hooke, sabiendo que la longitud ℓ del muelle estirado es 45 cm = 0,45 m:

$$F = k \cdot x = k \cdot \Delta \ell = k \cdot (\ell - \ell_0) = 150 \cdot (0,45 - 0,35) = 15 \text{ N}$$

b) Aplicamos otra vez la ley de Hooke, y despejamos la longitud final ℓ :

$$F = k \cdot x = k \cdot \Delta \ell = k \cdot (\ell - \ell_0) \Rightarrow 63 = 150 \cdot (\ell - 0,35) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell - 0,35 = \frac{63}{150} \Rightarrow \ell = \frac{63}{150} + 0,35 = 0,77 \text{ cm}$$

Ejercicio: Supón que tenemos dos muelles y que uno de ellos sufre una deformación mayor al colgar de ambos dos pesas de 1 kg. ¿Cuál es el que tiene una constante elástica mayor?

Despejamos de la ley de Hooke la constante elástica (k):

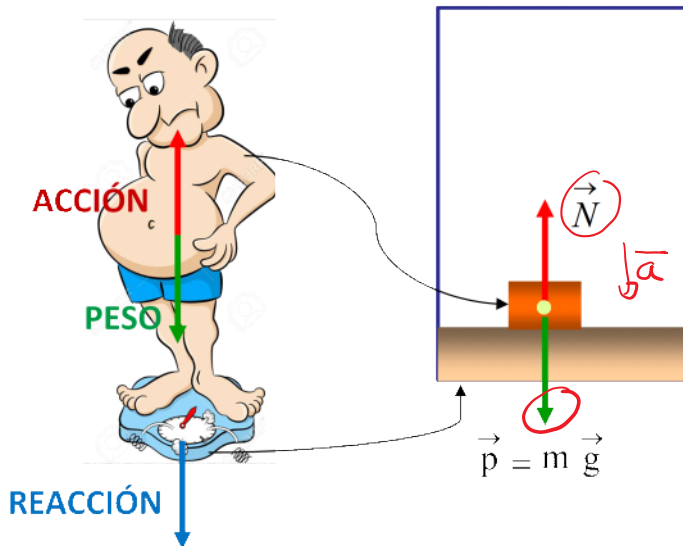
$$F = k \cdot x \rightarrow k = \frac{F}{x}$$

Como vemos, la constante elástica (k) es inversamente proporcional a la deformación (x). Es decir, cuanto mayor sea la deformación que sufre un muelle (x), menor será su constante elástica (k).

Por tanto, para un mismo peso (1 kg), es decir, para una misma fuerza aplicada a los dos muelles, aquel que se deforma menos (x más pequeña), tendrá una constante elástica mayor (k mayor).

EJERCICIO DEL ASCENSOR: Un hombre cuya masa es de 80 kg se pesa en un ascensor. ¿Cuánto indicará la balanza en los siguientes casos?

- El ascensor sube con velocidad constante de 2 m/s.
- El ascensor baja con velocidad constante de 2 m/s.
- El ascensor empieza a subir aumentando su velocidad a razón de 2 m/s por segundo.
- El ascensor sube frenando con una aceleración de 2 m/s².
- El ascensor empieza a bajar con una aceleración de 2 m/s².
- El ascensor baja frenando con una aceleración de 2 m/s².
- Se corta la soga del ascensor.



Recuerda: la fuerza de la balanza sobre el hombre, **ACCIÓN**, es igual y de sentido contrario a la que éste realiza sobre la balanza (3ª ley de Newton), **REACCIÓN**, que es lo que marcará la misma. Esa fuerza es precisamente la fuerza NORMAL. Por tanto, calculando la Normal sobre el hombre tendremos lo indicado por la balanza.

a) y b) Fuerzas en la dirección del eje Y: ($a = 0$)

$$\sum F_{iy} = N - P = m a \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P = m g = 80 \cdot 9,8 = 784 \text{ N}$$

En realidad la balanza mide en kilopondios: $N = 784 \text{ N} \cdot \frac{1 \text{ kp}}{9,8 \text{ N}} = \underline{80 \text{ kp}}$

c) Fuerzas en la dirección del eje Y: ($a = 2 \text{ m/s}^2$)

$$\sum F_{iy} = N - P = m a \Rightarrow N - mg = ma \Rightarrow N = ma + mg \Rightarrow N = m(a + g) = 944 \text{ N}$$

En kilopondios: $N = 944 \text{ N} \cdot \frac{1 \text{ kp}}{9,8 \text{ N}} = \underline{96,33 \text{ kp}}$

Este resultado será el mismo que el apartado f)

d) y e) Fuerzas en la dirección del eje Y: ($a = 2 \text{ m/s}^2$ hacia abajo)

$$\sum F_{iy} = P - N = m a \Rightarrow mg - N = ma \Rightarrow N = mg - ma \Rightarrow N = m(g - a) = 624 \text{ N}$$

En kilopondios: $N = 624 \text{ N} \cdot \frac{1 \text{ kp}}{9,8 \text{ N}} = \underline{63,67 \text{ kp}}$

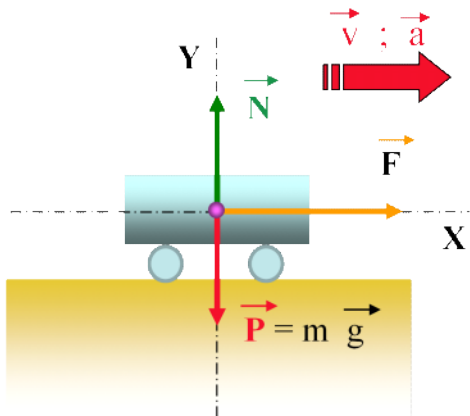
En g) la aceleración que adquiere todo el sistema, tanto el ascensor como todo lo que va dentro es la de la gravedad, caída libre.

g) Fuerzas en la dirección del eje Y: ($a = g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

$$\sum F_{iy} = P - N = m a \Rightarrow mg - N = ma \Rightarrow N = mg - ma \Rightarrow N = m(g - g) = 0 \text{ N}$$

En kilopondios: $N = \underline{0 \text{ kp}}$

Ejercicio: Sobre un automóvil de 1.000 kg que se mueve a una velocidad de 20 m/s actúa una fuerza constante de 3.000 N en el sentido del movimiento. Calcular: a) el valor de la fuerza normal; b) la aceleración del móvil; c) ¿Cuál es la velocidad del móvil 4 s después?; d) ¿Qué distancia recorre el móvil en ese tiempo?



a) Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada eje:

$$\text{Eje Y: } \Sigma F_y = m a_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P = m \cdot g = \underline{9800 \text{ N}}$$

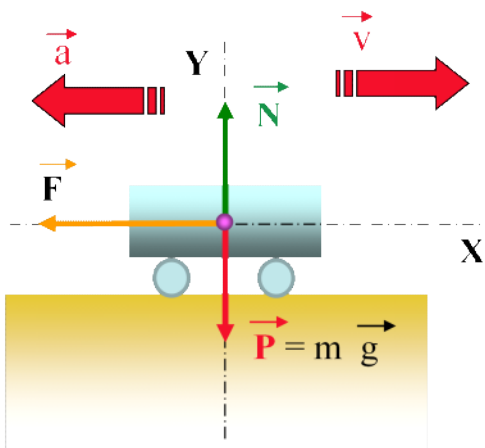
$$\text{b) Eje X: } \Sigma F_x = m a_x \Rightarrow F = m a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{3000 \text{ N}}{1000 \text{ kg}} = 3 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \Rightarrow a = \underline{3 \text{ m/s}^2}$$

$$\text{c) Velocidad a los 4 s: } v = v_0 + a t \Rightarrow v = 20 + 3 \cdot 4 = \underline{32 \text{ m/s}}$$

$$\text{d) Distancia a los 4 s: } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x = 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 = \underline{104 \text{ m}}$$

Ejercicio: Repetir el problema anterior para el caso de que la fuerza se aplique en el sentido opuesto.



a) Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada eje:

$$\text{Eje Y: } \Sigma F_y = m a_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P = m \cdot g = \underline{9800 \text{ N}}$$

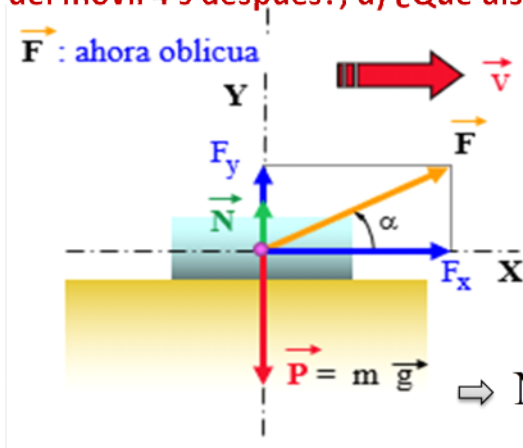
$$\text{b) Eje X: } \Sigma F_x = m a_x \Rightarrow -F = m a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-F}{m} \Rightarrow a = \frac{-3000 \text{ N}}{1000 \text{ kg}} = -3 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \Rightarrow a = \underline{-3 \text{ m/s}^2}$$

$$\text{c) Velocidad a los 4 s: } v = v_0 + a t \Rightarrow v = 20 - 3 \cdot 4 = \underline{8 \text{ m/s}}$$

$$\text{d) Distancia a los 4 s: } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x = 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot 4^2 = \underline{56 \text{ m}}$$

Ejercicio: Sobre un automóvil de 1.000 kg que se mueve a una velocidad de 20 m/s actúa una fuerza constante de 3.000 N, formando un ángulo de 30° con el sentido del movimiento. Calcular: a) el valor de la fuerza normal; b) la aceleración del móvil; c) ¿Cuál es la velocidad del móvil 4 s después?; d) ¿Qué distancia recorre el móvil en ese tiempo?



a) Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada eje:

$$\text{Eje Y: } \Sigma F_y = m a_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N + F_y - P = 0 \Rightarrow N = P - F_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = mg - F \sin \alpha = 1000 \cdot 9,8 - 3000 \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \underline{8300 \text{ N}}$$

$$\text{b) Eje X: } \Sigma F_x = m a_x \Rightarrow F_x = m a \Rightarrow F \cos \alpha = m a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{F \cos \alpha}{m} \Rightarrow a = \frac{3000 \cdot \cos 30^\circ}{1000} \cong 2,6 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \Rightarrow a = \underline{2,6 \text{ m/s}^2}$$

$$\text{c) Velocidad a los 4 s: } v = v_0 + a t \Rightarrow v = 20 + 2,6 \cdot 4 = \underline{30,4 \text{ m/s}}$$

$$\text{d) Distancia a los 4 s: } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x = 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot 4^2 = \underline{100,8 \text{ m}}$$

Ejercicio: Calcular la aceleración con que desciende un cuerpo de 20 kg sobre un plano inclinado 40° , suponiendo que no existe rozamiento.

Primero vamos a ver las fuerzas sobre el cuerpo en cuestión:

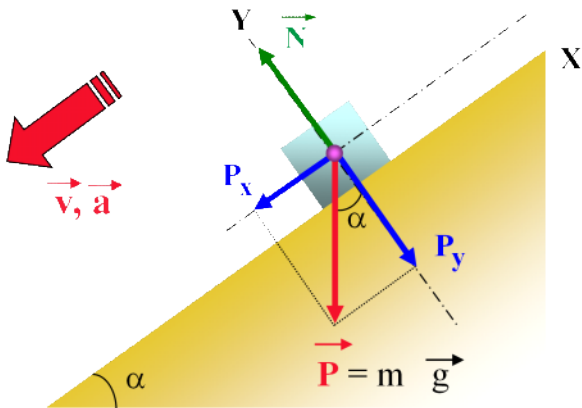
La resultante sobre el cuerpo es P_x , que hará que el cuerpo descienda acelerando (tomamos ese sentido como positivo).

$$\begin{cases} P_x = mg \sin \alpha = 126 \text{ N} \\ P_y = mg \cos \alpha = 150 \text{ N} \end{cases}$$

- Fuerzas en la dirección del eje X

$$P_x = m a \Rightarrow 126 = 20 \cdot a$$

$$a = \frac{126}{20} = 6,3 \text{ m/s}^2$$



Ejercicio: Calcular la aceleración con que asciende un cuerpo de 20 kg sobre un plano inclinado 40° , suponiendo que no existe rozamiento, si sobre él se realiza una fuerza paralela al plano, y hacia arriba, de 160 N.

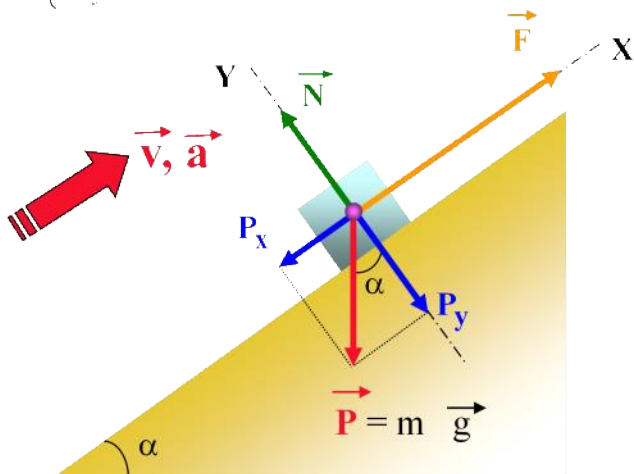
Tomamos sentido positivo (eje X) el de la aceleración.

$$\begin{cases} P_x = mg \sin \alpha = 126 \text{ N} \\ P_y = mg \cos \alpha = 150 \text{ N} \end{cases}$$

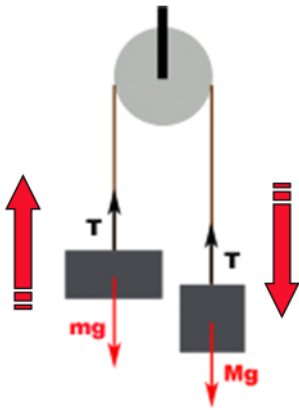
- Fuerzas en la dirección del eje X

$$F - P_x = m a_x \Rightarrow 160 - 126 = 20 \cdot a$$

$$a = \frac{160 - 126}{20} = 1,7 \text{ m/s}^2$$



Ejercicio: Una máquina de Atwood como la de la figura tiene colgados dos cuerpos, $m = 2 \text{ kg}$ y $M = 5 \text{ kg}$. Si se libera el sistema, calcular la aceleración que adquieren y la tensión de la cuerda..



Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada cuerpo (tomamos sentido positivo el de cada aceleración):

Cuerpo m: $\Sigma F = m a \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow$

$$\Rightarrow T - 2 \cdot 9,8 = 2a \Rightarrow \boxed{T - 19,6 = 2a} \quad (I)$$

Cuerpo M: $\Sigma F = M a \Rightarrow Mg - T = Ma \Rightarrow$

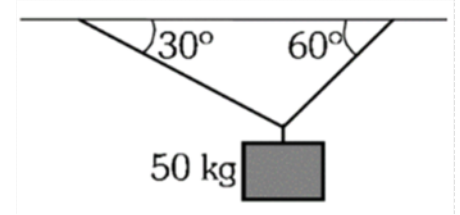
$$\Rightarrow 5 \cdot 9,8 - T = 5a \Rightarrow \boxed{49 - T = 5a} \quad (II)$$

Sumando (I) y (II): $49 - 19,6 = 7a \Rightarrow a = \frac{29,4}{7} = \underline{4,2 \text{ m/s}^2}$

Sustituyendo en (I): $T - 19,6 = 2 \cdot 4,2 \Rightarrow T = 19,6 + 8,4 \Rightarrow$

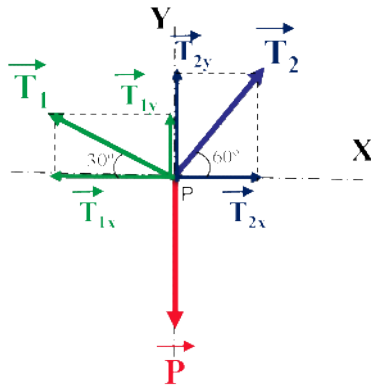
$$\Rightarrow \underline{T = 28 \text{ N}}$$

Ejercicio: En la figura aparece un cuerpo sujeto al techo mediante cables. Calcula el valor de la tensión en cada cable.



El punto de conexión P, está en equilibrio. Dibujamos las fuerzas en el mismo. Es decir:

- Tensiones: T_1 y T_2 (las dividimos en componentes)
- Peso: $P = mg$

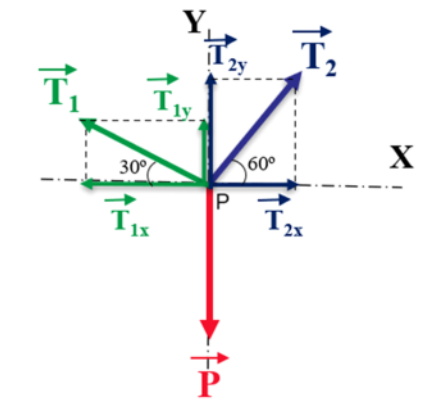


$$\begin{aligned} T_{1x} &= T_1 \cos 30^\circ \\ T_{1y} &= T_1 \sin 30^\circ \\ T_{2x} &= T_2 \cos 60^\circ \\ T_{2y} &= T_2 \sin 60^\circ \end{aligned}$$

Aplicamos las condiciones de equilibrio en el punto P (leyes de Newton) en cada eje:

- Fuerzas en la dirección del eje X:

$$\begin{aligned} T_{2x} - T_{1x} &= 0 \Rightarrow T_{2x} = T_{1x} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2 \cos 60 &= T_1 \cos 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2 \frac{1}{2} &= T_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{T_2 = \sqrt{3} \cdot T_1} \quad (I) \end{aligned}$$



- Fuerzas en la dirección del eje Y:

$$\begin{aligned} T_{2y} + T_{1y} - P &= 0 \Rightarrow T_{2y} + T_{1y} = P \Rightarrow T_2 \sin 60 + T_1 \sin 30 = m g \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + T_1 \frac{1}{2} &= 50 \cdot 9,8 \Rightarrow \boxed{\sqrt{3} \cdot T_2 + T_1 = 980} \quad (II) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema (I) y (II):

$$\boxed{T_1 = 245 \text{ N}}$$

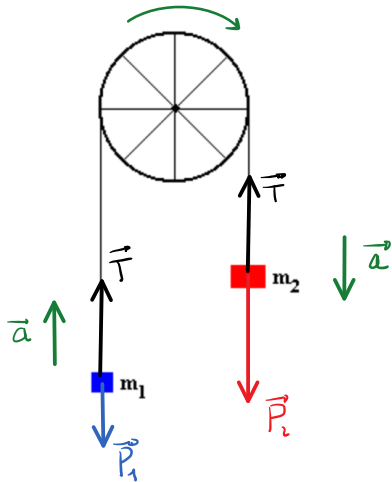
$$\boxed{T_2 = 424,35 \text{ N}}$$

7. Determinar qué relación debe existir entre las masas de una máquina de Atwood para que el conjunto se mueva con una aceleración que sea el 2 % de la de la gravedad.

Las fuerzas que sufre cada masa son:

$\vec{T}$ → Tensión que ejerce la cuerda sobre cada uno.

$\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$ → Pesos de ambos cuerpos respectivamente.



- Nos dicen que la aceleración $a = 2\% g = 0,02 \cdot g \rightarrow$

(Es decir: $a = 0,02 \cdot 9,8 = 0,196 \text{ m/s}^2$) → Sobra.

Nos piden la relación entre $\frac{m_1}{m_2}$ o $\frac{m_2}{m_1}$

Veamos. Vamos a estudiar la 2ª ley de Newton en cada cuerpo:

$$\begin{aligned} \boxed{m_1}: \sum F_i = m_1 \cdot a \rightarrow T - P_1 = m_1 \cdot a \rightarrow T - m_1 g = m_1 a \\ \boxed{m_2}: \sum F_i = m_2 \cdot a \rightarrow P_2 - T = m_2 \cdot a \rightarrow m_2 g - T = m_2 a \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow \right.$$

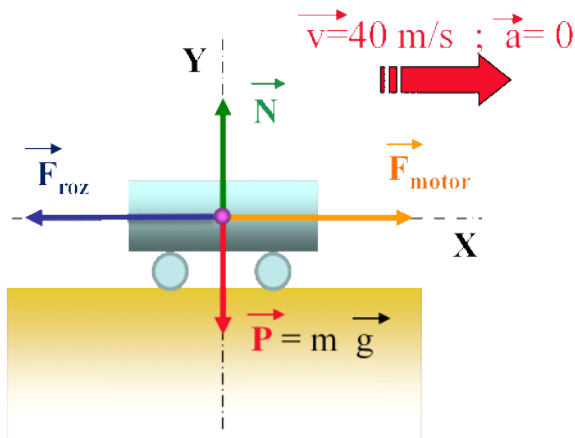
$$\rightarrow \text{Sumando ambas: } m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0,02g \end{array} \right. \rightarrow m_2 g - m_1 g = m_1 \cdot 0,02g + m_2 \cdot 0,02g \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Dividiendo por } g: m_2 - m_1 = 0,02 \cdot m_1 + 0,02 \cdot m_2 \rightarrow 0,98 \cdot m_2 = 1,02 m_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{m_2}{m_1} = \frac{1,02}{0,98} \approx 1,04}$$

Es decir la masa mayor, m_2 , tiene que ser 1,04 veces mayor que la menor, m_1 , para que la aceleración sea el 2% de g .

Ejercicio: Un automóvil de 1000 kg, viaja por una carretera horizontal con una velocidad constante de 40 m/s. El coeficiente de rozamiento dinámico con el suelo es de 0,3. ¿Qué fuerza debe realizar el motor para que se mantenga con movimiento rectilíneo uniforme?



$$\begin{aligned}
 \text{Eje X: } \Sigma F_x &= m a_x \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F_{\text{motor}} - F_{\text{roz}} = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F_{\text{motor}} = F_{\text{roz}} \\
 &\Rightarrow F_{\text{motor}} = \mu \cdot N \\
 \text{Eje Y: } \Sigma F_y &= m a_y \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P = m \cdot g
 \end{aligned}$$

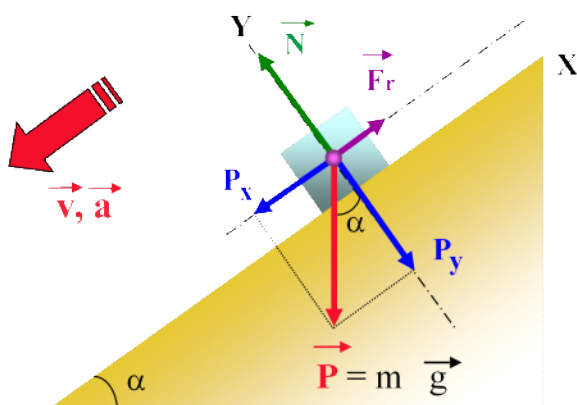
$$\Rightarrow F_{\text{motor}} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow F_{\text{motor}} = 0,3 \cdot 1000 \cdot 9,8 = \underline{2940 \text{ N}}$$

Ejercicio: Calcular la aceleración con que descende un cuerpo de 20 kg sobre un plano inclinado 40° , suponiendo que existe un coeficiente de rozamiento de 0.2.

Primero vamos a ver las fuerzas sobre el cuerpo en cuestión:

Suponiendo que $P_x > F_r$, entonces el cuerpo descenderá acelerando. Veamos

$$\begin{cases}
 P_x = mg \sin \alpha = 126 \text{ N} \\
 P_y = mg \cos \alpha = 150 \text{ N}
 \end{cases}$$



- Fuerzas en la dirección del eje X

$$\begin{cases}
 P_x - F_r = m a \\
 F_r = \mu N
 \end{cases} \Rightarrow 126 - 0,2 \cdot N = 20 \cdot a$$

- Fuerzas en la dirección del eje Y

$$N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y = 150$$

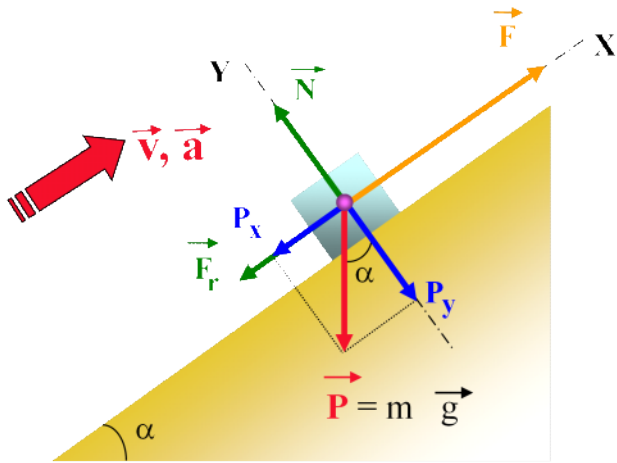
Por tanto:

$$126 - 0,2 \cdot 150 = 20 \cdot a$$

$$a = \frac{126 - 0,2 \cdot 150}{20} = \underline{4,8 \text{ m/s}^2}$$

Ejercicio: Calcular la aceleración con que asciende un cuerpo de 20 kg sobre un plano inclinado 40° , suponiendo que existe un coeficiente de rozamiento de 0,2, si sobre él se realiza una fuerza paralela al plano, y hacia arriba, de 160 N. $\vec{F}$: fuerza aplicada

$$\begin{cases} P_x = mg \sin \alpha = 126 \text{ N} \\ P_y = mg \cos \alpha = 150 \text{ N} \end{cases}$$



- Fuerzas en la dirección del eje X

$$\left. \begin{aligned} F - P_x - F_r &= m a_x \\ F_r &= \mu N \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 160 - 126 - 0,2 \cdot N = 20 \cdot a$$

- Fuerzas en la dirección del eje Y

$$N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y = 150$$

Por tanto:

$$160 - 126 - 0,2 \cdot 150 = 20 \cdot a$$

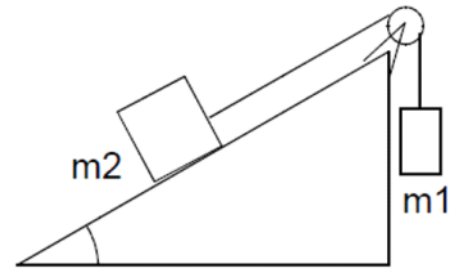
$$a = \frac{160 - 126 - 0,2 \cdot 150}{20} = 0,2 \text{ m/s}^2$$

9. Si las masas de la figura son $m_1 = 40 \text{ kg}$ y $m_2 = 60 \text{ kg}$, el coeficiente de rozamiento de m_2 con el plano vale 0,1, y el ángulo es de 30° . Calcular:

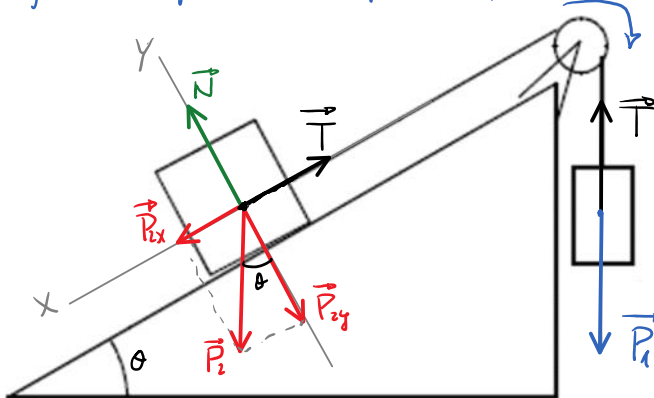
a) Para dónde se mueve el sistema. Sol: Hacia la derecha

b) El valor de la tensión y la aceleración del sistema.

Sol: $0,47 \text{ m/s}^2$; $373,12 \text{ N}$



Representemos primero las fuerzas aplicadas sobre cada cuerpo:



- Sobre m_1 :

$\vec{P}_1 \rightarrow$ Su peso.

$\vec{T} \rightarrow$ Tensión de la cuerda sobre él.

- Sobre m_2 :

$\vec{P}_2 \rightarrow$ Su peso, lo dividimos en dos componentes, $\vec{P}_{2x}$ y $\vec{P}_{2y}$.

$\vec{N} \rightarrow$ Normal del plano sobre él.

$\vec{T} \rightarrow$ Tensión de la cuerda sobre él.

Valores (módulos):

$$P_1 = m_1 g = 40 \cdot 9,8 = 392 \text{ N}$$

$$P_{2x} = m_2 g \sin \theta = 60 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ = 294 \text{ N}$$

$$P_{2y} = m_2 g \cos \theta = 60 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 509,22 \text{ N}$$

La fuerza de rozamiento, $\vec{F}_r$, no la incluimos hasta averiguar hacia dónde se mueve el sistema, ya que ésta se opone al movimiento de m_2 .

a) Las fuerzas que tienden a mover el sistema hacia uno u otro sentido son:

- Hacia la derecha: $\vec{P}_1$

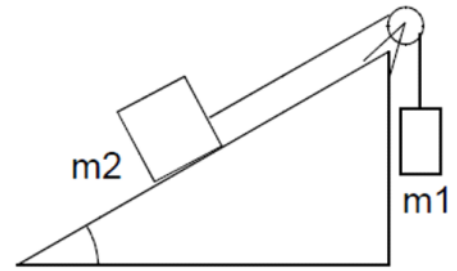
- Hacia la izquierda: $\vec{P}_{2x}$

Como $P_1 > P_{2x} \rightarrow$ El sistema se moverá hacia la derecha

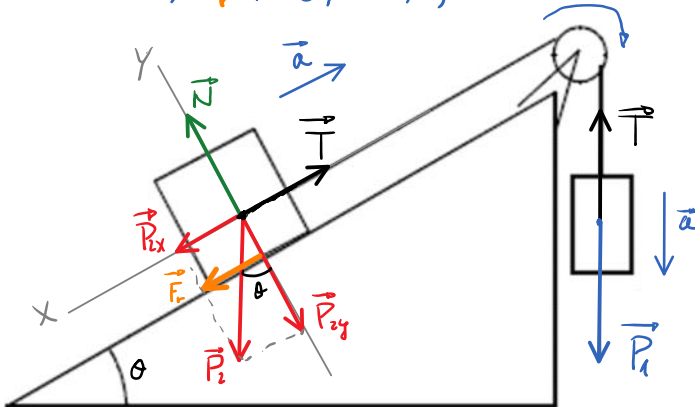
9. Si las masas de la figura son $m_1 = 40 \text{ kg}$ y $m_2 = 60 \text{ kg}$, el coeficiente de rozamiento de m_2 con el plano vale 0,1, y el ángulo es de 30° . Calcular:

- a) Para dónde se mueve el sistema. Sol: Hacia la derecha
 b) El valor de la tensión y la aceleración del sistema.

Sol: $0,47 \text{ m/s}^2$; $373,12 \text{ N}$



b) Ahora que ya sabemos el sentido de movimiento dibujamos sobre m_2 , la fuerza de rozamiento, $\vec{F}_r$: ($\mu = 0,1$)



Ahora aplicamos la 2ª ley de Newton a cada cuerpo y en cada eje:

Cuerpo m_1 :

$$\sum F_{i1} = m_1 a \rightarrow P_1 - T = m_1 a \rightarrow \boxed{392 - T = 40 \cdot a} \quad (\text{I})$$

$P_1 = 392 \text{ N}$

Cuerpo m_2 :

$$\begin{aligned} \text{Eje X: } \sum F_{ix} &= m_2 a_x \rightarrow T - P_{1x} - F_r = m_2 a \\ P_{1x} &= 294 \text{ N} \\ F_r &= \mu N = 0,1 \cdot N \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow T - 294 - 0,1 N = 60 \cdot a$$

$$\text{Eje Y: } \sum F_{iy} = m_2 a_y \rightarrow N - P_{1y} = 0 \rightarrow N = P_{1y} = 509,22 \text{ N}$$

$$\rightarrow T - 294 - 0,1 \cdot 509,22 = 60 \cdot a \rightarrow \boxed{T - 344,922 = 60 \cdot a} \quad (\text{II})$$

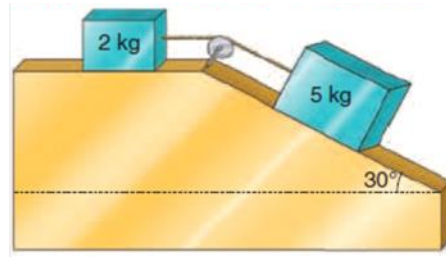
Resolvemos el sistema de ecuaciones: Sumamos (I) y (II):

$$392 - 344,922 = 100 \cdot a \rightarrow a = \frac{392 - 344,922}{100} \rightarrow \boxed{a \approx 0,47 \text{ m/s}^2}$$

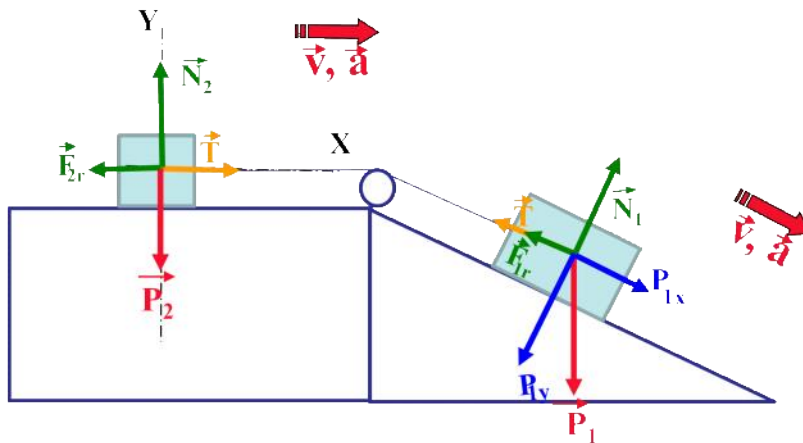
$$\text{Sustituyendo en (II): } T = 60 \cdot 0,47 + 344,922 \rightarrow$$

$$\boxed{T = 373,122 \text{ N}}$$

Ejercicio: Dados los cuerpos representados en la figura, calcula la aceleración con que se mueven y la tensión de la cuerda. El coeficiente de rozamiento es el mismo para ambos cuerpos y vale 0,2. S: $1,73 \text{ m s}^{-2}$; $7,38 \text{ N}$.



Dibujamos las fuerzas sobre cada cuerpo.



$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 g = 49 \text{ N} \\ P_{1x} &= m_1 g \sin \alpha = 24,5 \text{ N} \\ P_{1y} &= m_2 g \cos \alpha = 42,4 \text{ N} \\ P_2 &= m_2 g = 19,6 \text{ N} \end{aligned}$$

Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada cuerpo y en cada eje.

Cuerpo 1:

- Fuerzas en la dirección del eje X:
$$\left. \begin{aligned} P_{1x} - T - F_{1r} &= m_1 a \\ F_{1r} &= \mu N_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 24,5 - T - 0,2 N_1 = 5 a$$
 - Fuerzas en la dirección del eje Y:
$$N_1 - P_{1y} = 0 \Rightarrow N_1 = P_{1y} = 42,4 \text{ N}$$
- $$\Rightarrow 24,5 - T - 0,2 \cdot 42,4 = 5 a \Rightarrow \boxed{16,02 - T = 5 a} \quad (\text{I})$$

Cuerpo 2:

- Fuerzas en la dirección del eje X:
$$\left. \begin{aligned} T - F_{2r} &= m_2 a \\ F_{2r} &= \mu N_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T - 0,2 N_2 = 2 a$$
 - Fuerzas en la dirección del eje Y:
$$N_2 - P_2 = 0 \Rightarrow N_2 = P_2 = 19,6 \text{ N}$$
- $$\Rightarrow T - 0,2 \cdot 19,6 = 2 a \Rightarrow \boxed{T - 3,92 = 2 a} \quad (\text{II})$$

Sumando (I) y (II): $16,02 - 3,92 = 7 a \Rightarrow \boxed{a = 1,73 \text{ m/s}^2}$

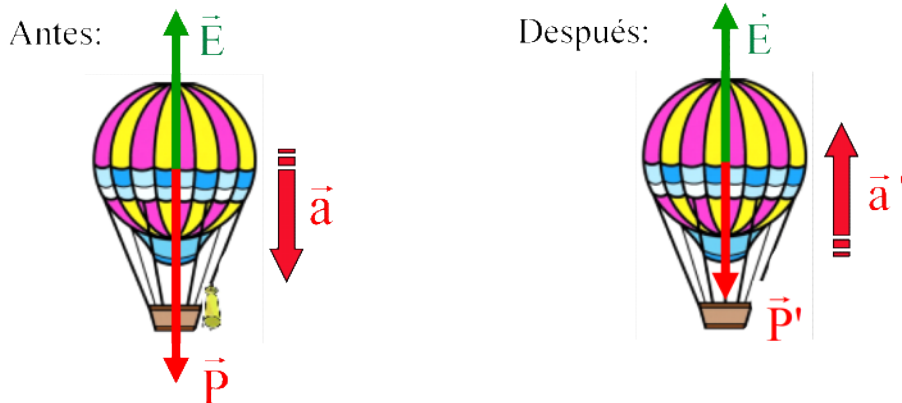
Usando (II), por ejemplo: $T - 3,92 = 2 \cdot 1,73 \Rightarrow \boxed{T = 7,38 \text{ N}}$

Ejercicio: Un globo, con todos sus accesorios, pesa 1900 kp y desciende con una aceleración 10 veces menor que la de la gravedad. Determinar la masa de lastre que debería lanzarse por la borda para que el globo suba con la misma aceleración. SOL: 345,45 kg

Datos:

- Antes de lanzar el lastre: Peso: $P = 1900 \text{ kp}$ (luego la $m = 1900 \text{ kg}$); módulo de $a = g/10$
- Después de lanzar el lastre: Peso: $P' = m' \cdot g$; módulo de $a' = g/10$
- Nos piden la masa de lastre que hay que soltar: $m_L = m - m'$

Dibujamos las fuerzas (Peso y Empuje) que sufre el globo en las dos situaciones, antes y después de lanzar el saco de lastre:



Vamos a aplicar la 2ª ley de Newton a cada situación:

Antes:

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow P - E = m \cdot a \rightarrow m \cdot g - E = m \cdot \frac{g}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow E = m \cdot g - m \cdot \frac{g}{10} \rightarrow \boxed{E = \frac{9}{10} m \cdot g}$$

Después:

$$\Sigma F = m' \cdot a' \rightarrow E - P' = m' \cdot a' \rightarrow E - m' \cdot g = m' \cdot \frac{g}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow E = m' \cdot g + m' \cdot \frac{g}{10} \rightarrow \boxed{E = \frac{11}{10} m' \cdot g}$$

Igualando (I) y (II):

$$\frac{11}{10} m' \cdot g = \frac{9}{10} m \cdot g \rightarrow m' = \frac{9}{11} m$$

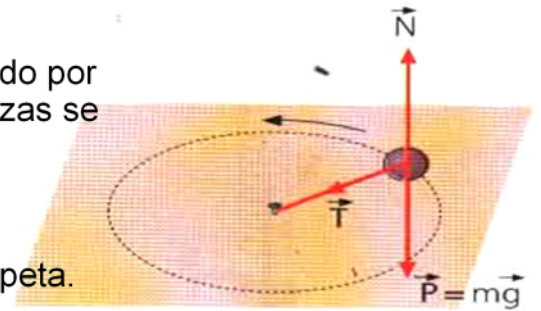
Por tanto la masa de lastre lanzado será:

$$m_L = m - m' = m - \frac{9}{11} m = \frac{2}{11} m \rightarrow m_L = \frac{2}{11} \cdot 1900 = \boxed{345,45 \text{ kg}}$$

Ejemplo: Una bola de 200 g, sujeta a una cuerda de 1,5 m se mueve a una velocidad cuyo módulo constante es 6 m/s sobre una mesa sin rozamiento describiendo un círculo. Calcular la tensión de la cuerda.

Eje vertical: El peso de la bola "P" queda compensado por la reacción del plano "N", por lo que ambas fuerzas se anulan.

Eje central: La tensión "T" es la responsable del movimiento circular. Es por tanto la fuerza centrípeta.



$$\Sigma F_{\text{ejecentral}} = m \cdot a_n$$

$$T = m a_n \Rightarrow T = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$T = 0,2 \text{ kg} \cdot \frac{(6 \text{ m/s})^2}{1,5 \text{ m}} = \underline{4,8 \text{ N}}$$

Ejemplo: La misma bola (200 g) gira ahora en un plano vertical, con radio 1,5 m. Sabiendo que $v_A = 10 \text{ m/s}$, $v_B = 8,4 \text{ m/s}$, $v_C = 6,4 \text{ m/s}$, calcular la tensión de la cuerda en cada punto indicado, y la aceleración tangencial.

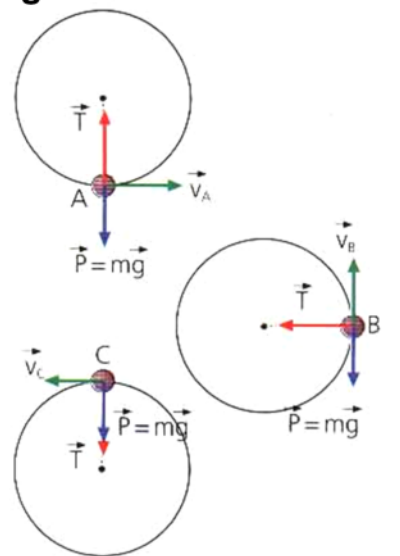
Para calcular la T estudiamos la 2ª ley de Newton en el eje central, en cada caso:

a) $T_A - m \cdot g = m \cdot \frac{v_A^2}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_A = m \cdot \frac{v_A^2}{R} + m \cdot g = 0,2 \cdot \frac{10^2}{1,5} + 0,2 \cdot 9,8 = 15,3 \text{ N}$$

b) $T_B = m \cdot \frac{v_B^2}{R} \Rightarrow T_B = 0,2 \cdot \frac{(8,4)^2}{1,5} = 9,4 \text{ N}$

c) $T_C + m \cdot g = m \cdot \frac{v_C^2}{R} \Rightarrow T_C = m \cdot \frac{v_C^2}{R} - m \cdot g = 0,2 \cdot \frac{(6,4)^2}{1,5} - 0,2 \cdot 9,8 = 3,5 \text{ N}$



Para ver si hay aceleración tangencial, estudiamos el eje tangencial en cada caso. Sólo existe a_t en B donde $P = m \cdot a_t \Rightarrow m \cdot g = m \cdot a_t \Rightarrow a_t = g = 9,8 \text{ m/s}^2$

En a) y c) a_t es nula, pues no hay ninguna fuerza tangencial en estos casos.

¿Cuánto valen la tensión en el punto de arriba y de abajo? ¿Qué velocidad mínima debe llevar para que el agua no caiga? (Este ejercicio es análogo al de la pantalla anterior)

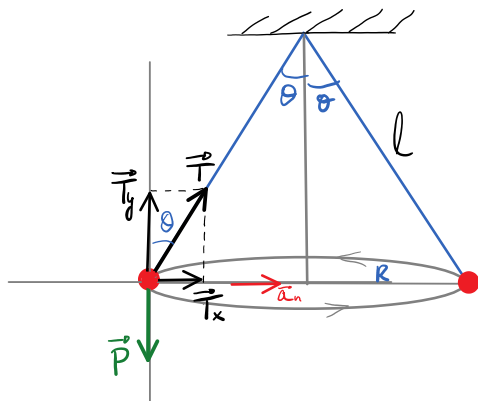
En el punto más alto y más bajo se tiene:

Ecuaciones escalares:

- Arriba: $T + m \cdot g = m \cdot a_n$; $T = m \cdot v^2 / R - m \cdot g$
- Abajo: $T - m \cdot g = m \cdot a_n$; $T = m \cdot v^2 / R + m \cdot g$
- Si $v = \text{cte}$, T tiene que ser mucho mayor abajo.
- La **velocidad mínima** para que el agua no caiga se obtendrá cuando T (arriba) tome el mínimo valor posible, es decir 0.

$$\cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot v^2 / R \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{g \cdot R}}$$

Ejemplo: La misma bola de 200 g, sujeta a una cuerda de 1,5 m se hace girar en aire a velocidad constante describiendo un péndulo cónico. Si la cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical. ¿cuál será la velocidad de la bola?



Notas:

$$R = l \cdot \sin \theta$$

$$T_x = T \cdot \sin \theta$$

$$T_y = T \cdot \cos \theta$$

Datos: $\theta = 30^\circ$; $m = 0,2 \text{ kg}$; $l = 1,5 \text{ m}$

Elijo un sistema de referencia (X,Y), tal como el representado. En él, la aceleración sólo tiene componente X:

$$\vec{a} = \vec{a}_x = \vec{a}_n$$

Voy a representar las fuerzas sobre la bola en la posición de la izquierda del dibujo. Las fuerzas sobre ella son:

$\vec{T}$ → Tensión de la cuerda. La divido en dos componentes: $\vec{T}_x$ y $\vec{T}_y$.

$\vec{P}$ → Peso de la bola.

Aplicamos la 2ª ley de Newton en cada eje:

Eje X: $T_x = m a_x \rightarrow T \cdot \sin \theta = m \cdot a_n \rightarrow T \cdot \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$

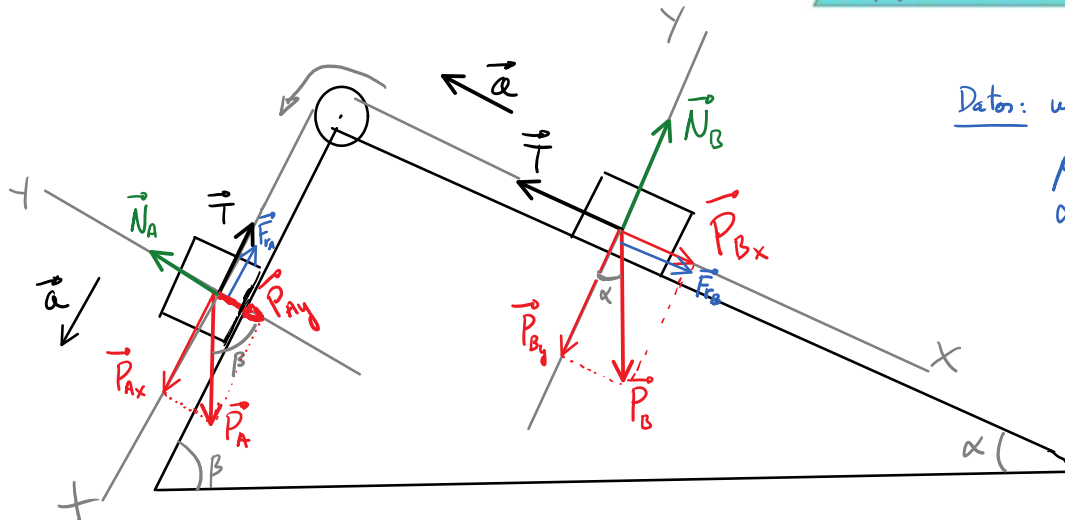
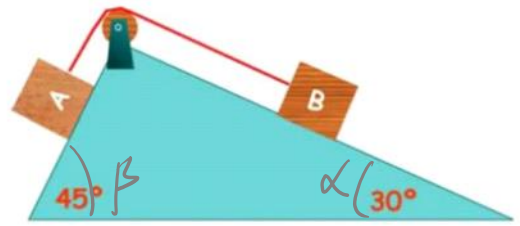
Eje Y: $T_y - P = m a_y \rightarrow T \cdot \cos \theta - mg = 0 \rightarrow T \cos \theta = m \cdot g$

→ Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{\tan \theta = \frac{m v^2 / R}{m \cdot g}}{R = l \cdot \sin \theta} \rightarrow \frac{\tan \theta = \frac{v^2}{R \cdot g}}{\quad} \rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{l \cdot \sin \theta \cdot g} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{l \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \tan \theta} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{1,5 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ \cdot \tan 30^\circ} \approx 2,06 \text{ m/s}}$$

- 4) Una polea de peso despreciable está sujeta en el vértice que forman dos planos inclinados cuyos ángulos con el horizonte son $\alpha=30^\circ$ y $\beta=45^\circ$. Los cuerpos A y B (ver figura) están unidos por medio de un hilo que pasa por la polea y tienen 12 y 14 kg respectivamente. Calcule:
- Hacia dónde se moverá el sistema.
 - La magnitud de la aceleración de los cuerpos y de la tensión de la cuerda si el coeficiente de rozamiento cinético entre los cuerpos y el plano es 0,05.



Datos: $m_A = 12 \text{ kg}$; $m_B = 14 \text{ kg}$
 $\mu = 0,05$
 $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$

Primero hacemos el diagrama de fuerzas en cada cuerpo (arriba).

$\vec{P}_A$ y $\vec{P}_B$: Pesos de los cuerpos respectivamente (los divididos en componentes $\vec{P}_{Ax}$, $\vec{P}_{Ay}$, $\vec{P}_{Bx}$, $\vec{P}_{By}$).

$\vec{N}_A$ y $\vec{N}_B$: Normales de los planos sobre cada cuerpo.

$\vec{T}$: Tensiones de la cuerda en cada cuerpo.

$\vec{F}_{rA}$ y $\vec{F}_{rB}$: Fuerzas de rozamiento de los planos sobre cada cuerpo. (Las tengo que dibujar una vez respondido al apartado a), es decir, una vez averigué hacia dónde se mueve el sistema.

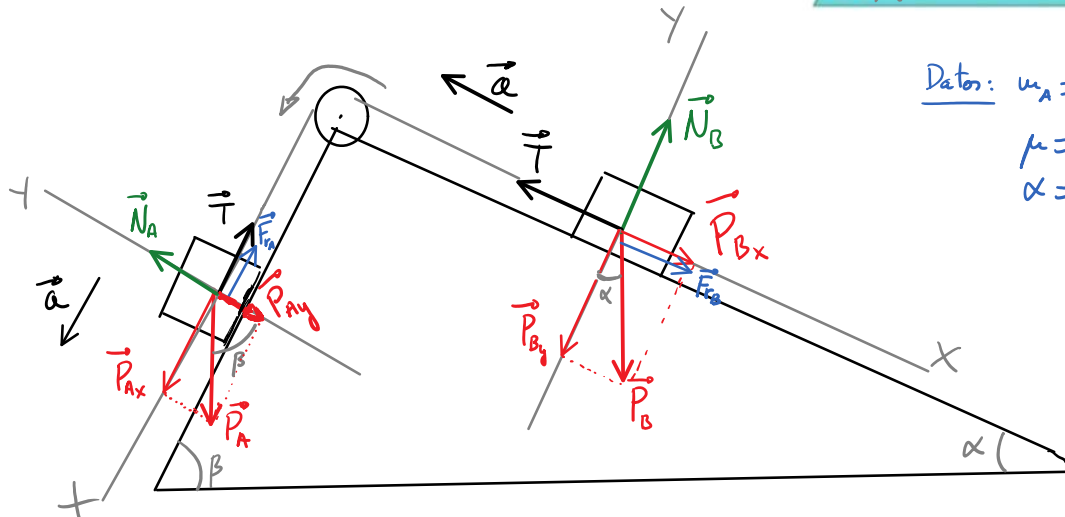
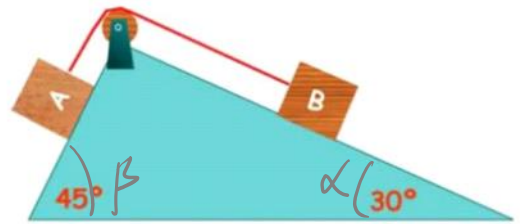
- a) Las fuerzas que, a priori, tienden a mover el sistema son $\vec{P}_{Ax}$ y $\vec{P}_{Bx}$, pues las tensiones se anulan, y las Normales se anulan con $\vec{P}_{Ay}$ y $\vec{P}_{By}$, respectivamente. Veamos:

$$\begin{aligned} P_{Ax} &= P_A \cdot \sin \beta = m_A \cdot g \cdot \sin \beta = 12 \cdot 9,8 \cdot \sin 45^\circ \rightarrow P_{Ax} = 83,16 \text{ N} \\ P_{Bx} &= P_B \cdot \sin \alpha = m_B \cdot g \cdot \sin \alpha = 14 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ \rightarrow P_{Bx} = 68,6 \text{ N} \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow \right.$$

→ Como $P_{Ax} > P_{Bx}$, entonces el sistema se moverá hacia la izquierda (sentido antihorario).

Ahora dibujo arriba las $\vec{F}_{rA}$ y $\vec{F}_{rB}$, y las aceleraciones ($\vec{a}$).

- 4) Una polea de peso despreciable está sujeta en el vértice que forman dos planos inclinados cuyos ángulos con el horizonte son $\alpha=30^\circ$ y $\beta=45^\circ$. Los cuerpos A y B (ver figura) están unidos por medio de un hilo que pasa por la polea y tienen 12 y 14 kg respectivamente. Calcule:
- Hacia dónde se moverá el sistema.
 - La magnitud de la aceleración de los cuerpos y de la tensión de la cuerda si el coeficiente de rozamiento cinético entre los cuerpos y el plano es 0,05.



Datos: $m_A = 12 \text{ kg}$; $m_B = 14 \text{ kg}$
 $\mu = 0,05$
 $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$

b) Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada cuerpo y en cada eje:

Cuerpo A:

$$\text{Eje X: } P_{Ax} - T - F_{rA} = m_A \cdot a \rightarrow 83,16 - T - \mu \cdot N_A = 12 \cdot a$$

$$\text{Eje Y: } N_A - P_{Ay} = 0 \rightarrow N_A = P_{Ay} = P_A \cdot \cos \beta = m_A g \cdot \cos \beta = 12 \cdot 9,8 \cdot \cos 45^\circ \rightarrow N_A = 83,16 \text{ N}$$

$$\rightarrow 83,16 - T - 0,05 \cdot 83,16 = 12 \cdot a \rightarrow \boxed{79 - T = 12 \cdot a} \quad (\text{I})$$

Cuerpo B:

$$\text{Eje X: } T - P_{Bx} - F_{rB} = m_B \cdot a \rightarrow T - 68,6 - \mu N_B = 14 \cdot a$$

$$\text{Eje Y: } N_B - P_{By} = 0 \rightarrow N_B = P_{By} = P_B \cdot \cos 30^\circ = m_B g \cdot \cos 30^\circ = 14 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ \rightarrow N_B = 119,92 \text{ N}$$

$$\rightarrow T - 68,6 - 0,05 \cdot 119,92 = 14 \cdot a \rightarrow \boxed{T - 74,54 = 14 \cdot a} \quad (\text{II})$$

Sumamos (I) y (II):

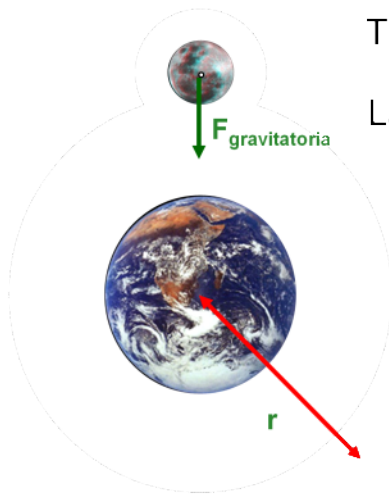
$$79 - 74,54 = 26 \cdot a \rightarrow a = \frac{79 - 74,54}{26} \rightarrow$$

$$\boxed{a = 0,17 \text{ m/s}^2}$$

$$(\text{II}) \rightarrow T - 74,54 = 14 \cdot 0,17 \rightarrow T = 14 \cdot 0,17 + 74,54 \rightarrow$$

$$\boxed{T = 76,92 \text{ N}}$$

Calcula la velocidad con que gira la Luna alrededor de la Tierra, y la masa terrestre, sabiendo que el periodo de la Luna es de 28 días, y la distancia entre nuestro planeta y la Luna es de 384000 km.
 Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. SOL: $v = 997,3 \text{ m/s}$; $M_T = 5,9 \cdot 10^{24} \text{ kg}$



$$T = 28 \text{ días} = 2419200 \text{ s}; r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

La Luna posee un MCU alrededor de la Tierra. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega \cdot r \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow$$

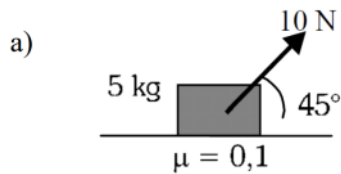
$$\Rightarrow v = \frac{2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^8}{2419200} \Rightarrow v = \underline{997,3 \text{ m/s}}$$

La fuerza gravitatoria le proporciona a la Luna la fuerza centrípeta necesaria (MCU):

$$F_{\text{gravitatoria}} = F_{\text{centrípeta}} = ma_c \Rightarrow G \frac{M_T \cdot \cancel{m_L}}{\cancel{r^2}} = \cancel{m_L} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la masa de la Tierra: $M_T = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(997,3)^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{6,67 \cdot 10^{-11}} = \underline{5,7 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$

7) Calcular la aceleración que sufrirá el bloque

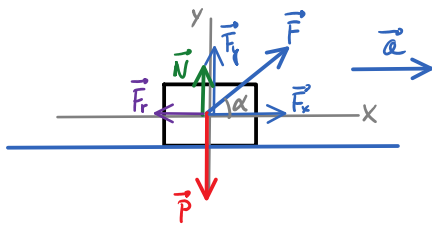


Suponemos que el bloque acelera hacia la derecha.

- Primero, haremos un diagrama de fuerzas
Segundo, aplicaremos la 2ª ley de Newton en cada eje elegido.

Datos: $m = 5 \text{ kg}$; $\mu = 0,1$; $\alpha = 45^\circ$; $F = 10 \text{ N}$.

- Diagrama de fuerzas:



$\vec{F}$ → Fuerza exterior aplicada sobre el cuerpo. La dividimos en dos componentes, $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$.

$\vec{P}$ → Peso del cuerpo

$\vec{N}$ → Normal del suelo sobre el cuerpo.

$\vec{F}_r$ → Fuerza de rozamiento del suelo sobre el cuerpo.
Su valor: $F_r = \mu \cdot N$

- Cálculos previos:

$$P = m \cdot g = 5 \cdot 9,8 = 49 \text{ N}$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 10 \cdot \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

- Aplicamos la 2ª ley Newton:

$$\text{Eje X: } F_x - F_r = m \cdot a \rightarrow 5\sqrt{2} - \underset{0,1}{\mu} \cdot N = 5 \cdot a$$

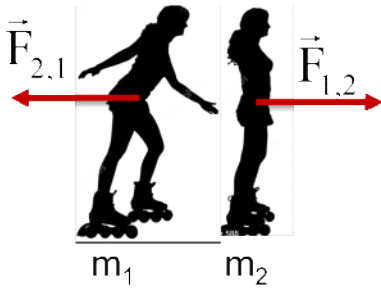
$$\text{Eje Y: } N + F_y - P = m \cdot a_y \rightarrow N = P - F_y = 49 - 5\sqrt{2}$$

$$\rightarrow 5\sqrt{2} - 0,1 \cdot (49 - 5\sqrt{2}) = 5 \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{5\sqrt{2} - 0,1 \cdot (49 - 5\sqrt{2})}{5} \rightarrow$$

$$a \approx 0,58 \text{ m/s}^2$$

1) Dos patinadoras están quietas una junto a la otra. La primera patinadora, de 80 kg de masa, le aplica a la otra, de 50 kg de masa, una fuerza de 25 kp durante 0,5 s, ¿qué velocidad adquiere la segunda patinadora, y qué velocidad de retroceso adquiere la primera?



Datos: $m_1 = 80 \text{ kg}$; $m_2 = 50 \text{ kg}$; $F = 25 \text{ kp} = 245 \text{ N}$; $\Delta t = 0,5 \text{ s}$

El módulo del impulso mecánico realizado por la patinadora 1 sobre la 2 es:

$$I_2 = \Delta p_2 \rightarrow F_{1,2} \cdot \Delta t = m_2 \cdot (v_2 - 0) \rightarrow$$

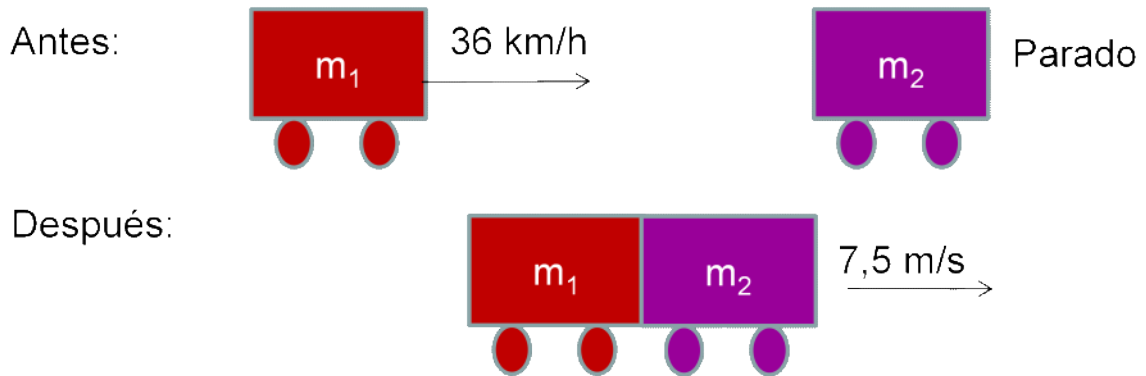
$$\rightarrow v_2 = \frac{F_{1,2} \cdot \Delta t}{m_2} \rightarrow v_2 = \frac{245 \cdot 0,5}{50} = \underline{2,45 \text{ m/s}}$$

El impulso de la patinadora 2 sobre la 1 es el mismo pero de sentido contrario, ya que la fuerza que la 2 ejerce sobre la 1 es el mismo módulo: $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \rightarrow \vec{I}_1 = -\vec{I}_2$

$$I_1 = \Delta p_1 \rightarrow F_{2,1} \cdot \Delta t = m_1 \cdot (v_1 - 0) \rightarrow v_1 = \frac{-F_{1,2} \cdot \Delta t}{m_1} \rightarrow v_1 = \frac{-245 \cdot 0,5}{80} = \underline{-1,53 \text{ m/s}}$$

Una locomotora de 75 toneladas se mueve hacia atrás por una vía recta con una velocidad de $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, cuando choca con un vagón en reposo y se acopla a él. Calcula la masa del vagón si, tras el choque, el sistema se mueve con una velocidad de $7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

SOLUCIÓN:



Datos:

$$m_1 = 75000 \text{ kg} \quad \text{Antes.} \quad \vec{v}_1 = 10 \vec{i} \text{ m/s} ; \quad \vec{v}_2 = 0 \vec{i} \text{ m/s}$$

$$m_2 = ? \text{ kg} \quad \text{Después.} \quad \vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \vec{v}' = 7,5 \vec{i} \text{ m/s}$$

Teniendo en cuenta el teorema de conservación de la cantidad de movimiento para un instante anterior y otro posterior al choque:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_{\text{antes}} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_{\text{después}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \underset{0}{\cancel{\vec{v}_2}} = (m_1 + m_2) \vec{v}' \Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{m_1 \vec{v}_1}{\vec{v}'}$$

$$\Rightarrow 75000 + m_2 = \frac{75000 \cdot 10 \cancel{\vec{i}}}{7,5 \cancel{\vec{i}}} = 100000 \Rightarrow$$

Por tanto la masa de la segunda locomotora será:

$$m_2 = 100000 - 75000 = 25000 \text{ kg} = 25 \text{ t}$$

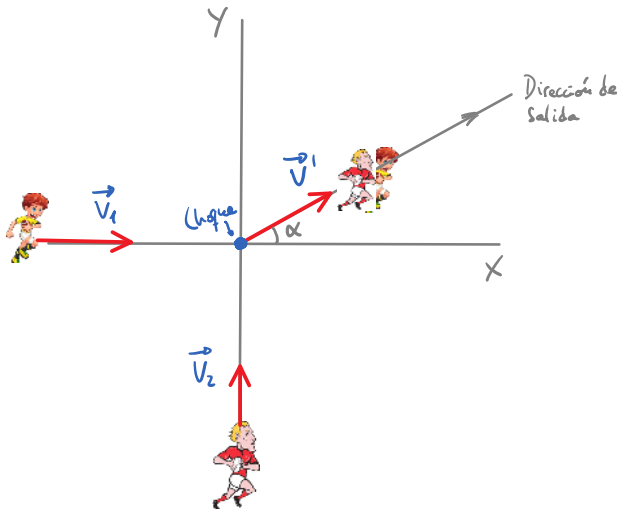
- 16) Un defensa de 90 kg que corre al este con una rapidez de 5 m/s es bloqueado por un oponente de 95 kg que corre al norte con una rapidez de 3 m/s. Si la colisión es perfectamente inelástica, es decir, ambos permanecen unidos después del choque. Calcule la rapidez y dirección de los jugadores inmediatamente después del choque.

Datos: Defensa 1 $\rightarrow m_1 = 90 \text{ kg}$

Defensa 2 $\rightarrow m_2 = 95 \text{ kg}$

Choque: - Antes: $\vec{v}_1 = 5 \vec{i} \text{ m/s}$; $\vec{v}_2 = 3 \vec{j} \text{ m/s}$

- Después: $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}' = ?? \rightarrow$ Voy a calcular el vector, su módulo y el ángulo (α) que forma con el eje X (Este).



Se produce un choque inelástico. En él se cumple el teorema de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{p}_{\text{antes}} = \sum \vec{p}_{\text{después}}$$

Veamos: $\sum \vec{p}_{\text{antes}} = \sum \vec{p}_{\text{después}} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2' \rightarrow$

$$\rightarrow 90 \cdot 5 \vec{i} + 95 \cdot 3 \vec{j} = 90 \cdot \vec{v}' + 95 \cdot \vec{v}' \rightarrow 450 \vec{i} + 285 \vec{j} = 185 \vec{v}' \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v}' = \frac{450 \vec{i} + 285 \vec{j}}{185} \rightarrow \boxed{\vec{v}' = 2,43 \vec{i} + 1,54 \vec{j} \text{ (m/s)}}$$

Rapidez $\rightarrow |\vec{v}'| = \sqrt{2,43^2 + 1,54^2} \rightarrow \boxed{|\vec{v}'| \cong 2,88 \text{ m/s}}$

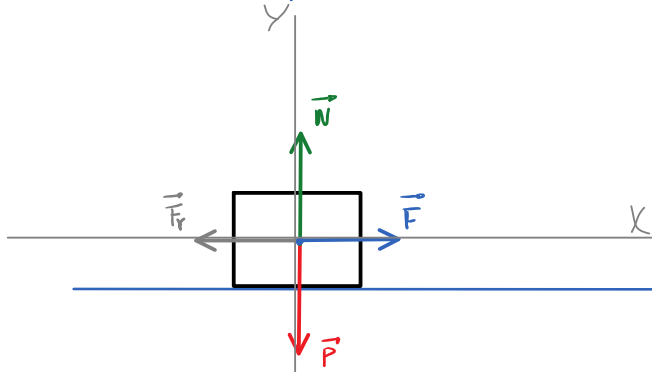
Dirección $\rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctg\left(\frac{1,54}{2,43}\right) \rightarrow \boxed{\alpha = 32,36^\circ}$

1. Un cuerpo de 50 kg está en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente cinético de rozamiento vale 0,20 y el estático 0,50. Calcula:

- La fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la superficie.
- La fuerza mínima necesaria para iniciar el movimiento.
- ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento si la fuerza horizontal aplicada es de 40 kp? En este caso,
- ¿cuánto vale la aceleración?

S: a) 0; b) 245 N; c) 98 N; 5,9 m s⁻².

Dibujemos primero las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo:



$\vec{P}$: Peso del cuerpo

$\vec{N}$: Normal del suelo sobre el cuerpo

$\vec{F}_r$: Fuerza de rozamiento del suelo sobre el cuerpo.

$\vec{F}$: Fuerza exterior aplicada sobre el cuerpo.

- a) Mientras no existe fuerza exterior ($\vec{F}$) aplicada, no habrá fuerza de rozamiento ninguna sobre el cuerpo. Es decir: $\vec{F}_r = 0$

- b) La fuerza mínima necesaria para iniciar el movimiento será igual a la fuerza de rozamiento estática máxima, es decir:

$$F \geq F_{r\max} = \mu_e \cdot N$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como en el eje Y: } N - P = 0 \rightarrow N = P = mg \\ F \geq F_{r\max} = \mu_e \cdot N \end{array} \right\} \rightarrow F \geq \mu_e \cdot m \cdot g \rightarrow F \geq 0,5 \cdot 50 \cdot 9,8 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{F \geq 245 \text{ N}}$$

- c) Si $F = 40 \text{ kp} \cdot \frac{9,8 \text{ N}}{1 \text{ kp}} = 392 \text{ N} > 245 \text{ N}$, en este caso, el cuerpo se moverá, y la fuerza de rozamiento sobre él será la fuerza de rozamiento dinámico:

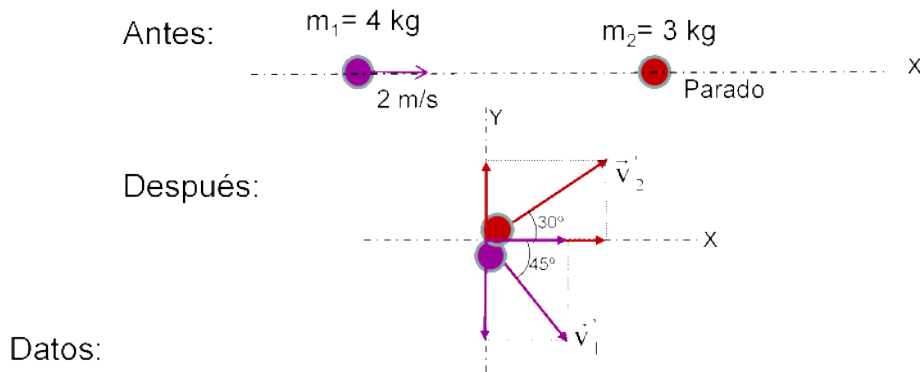
$$F_{rd} = \mu_c \cdot N = \mu_c \cdot m \cdot g = 0,2 \cdot 50 \cdot 9,8 \rightarrow \boxed{F_{rd} = 98 \text{ N}}$$

- d) Aplicamos la 2ª ley Newton en el eje X:

$$F - F_{rd} = m \cdot a \rightarrow 392 - 98 = 50 \cdot a \rightarrow \boxed{a = \frac{392 - 98}{50} = 5,98 \text{ m/s}^2}$$

Una partícula de masa 4 kg y velocidad 2 m/s choca contra otra de 3 kg que está en reposo. La primera se desvía -45° respecto de la dirección inicial y la Segunda 30° . Calcular las velocidades de ambas partículas después del choque.

SOLUCIÓN:



Antes. $\vec{v}_1 = 2 \vec{i} \text{ m/s}$; $\vec{v}_2 = 0 \vec{i} \text{ m/s}$

Después. $\vec{v}'_1 = v'_{1x} \vec{i} + v'_{1y} (-\vec{j}) = v'_1 \cos 45^\circ \vec{i} - v'_1 \sin 45^\circ \vec{j}$

$\vec{v}'_2 = v'_{2x} \vec{i} + v'_{2y} \vec{j} = v'_2 \cos 30^\circ \vec{i} + v'_2 \sin 30^\circ \vec{j}$

Aplicamos el teorema de conservación de la cantidad de movimiento para un instante anterior y otro posterior al choque:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_{\text{antes}} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_{\text{después}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow 4 \cdot 2 \vec{i} = 4 \vec{v}'_1 + 3 \vec{v}'_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \vec{i} = 4(v'_1 \cos 45^\circ \vec{i} - v'_1 \sin 45^\circ \vec{j}) + 3(v'_2 \cos 30^\circ \vec{i} + v'_2 \sin 30^\circ \vec{j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \vec{i} = (4v'_1 \cos 45^\circ + 3v'_2 \cos 30^\circ) \vec{i} + (-4v'_1 \sin 45^\circ + 3v'_2 \sin 30^\circ) \vec{j}$$

Por tanto debe cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje X: } 8 = 4v'_1 \cos 45^\circ + 3v'_2 \cos 30^\circ \\ \text{Eje Y: } 0 = -4v'_1 \sin 45^\circ + 3v'_2 \sin 30^\circ \end{array} \right\} \text{ Sólo queda resolver el sistema:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 8 = 4v'_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + 3v'_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 = -4v'_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + 3v'_2 \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16 = 4\sqrt{2}v'_1 + 3\sqrt{3}v'_2 \quad (I) \\ 0 = -4\sqrt{2}v'_1 + 3v'_2 \quad (II) \end{array} \right\} \text{ Sumando ambas ecuaciones:}$$

$$16 = (3\sqrt{3} + 3) v'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{16}{3\sqrt{3} + 3} = 1,95 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en (II) y despejando:

$$v'_1 = \frac{3v'_2}{4\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot 1,95}{4\sqrt{2}} = 1,03 \text{ m/s}$$

Otro Ejemplo: Una vagoneta de 100 kg se mueve con una velocidad de 1,5 m/s. En su interior viaja un joven de 60 kg, que salta hacia atrás, saliendo despedido con una velocidad de 1 m/s, medida respecto a la vagoneta. Calcula la velocidad con que se moverá la vagoneta después de que la abandone el muchacho.

Solución: El problema estudia la conservación de la cantidad de movimiento. Sin embargo, es diferente a los que hemos resuelto hasta ahora: en el instante posterior a la interacción, en vez de haber una unión, hay una separación. Ello no debe confundirnos, ya que el teorema de conservación de la cantidad de movimiento sigue siendo cierto.

Cuando el chico salta, deja de estar solidariamente unido a la vagoneta y se mueve con una velocidad propia. La velocidad del chico se nos da referida a la vagoneta. Por tanto, como el sistema de referencia que utilizamos nosotros es externo a la vagoneta, en dicho sistema el chico estará moviéndose, en realidad, con una velocidad de: $1,5 - 1 = 0,5$ m/s en la misma dirección que ella. Por tanto:

Datos:

$$m_1 = 60 \text{ kg} \quad \text{Antes.} \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 1,5 \vec{i} \text{ m/s}$$

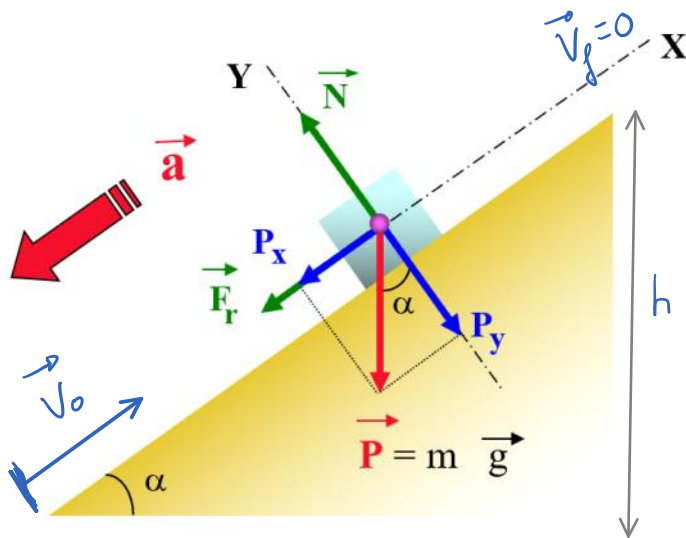
$$m_2 = 100 \text{ kg} \quad \text{Después.} \quad \vec{v}'_1 = 0,5 \vec{i} \text{ m/s} \quad \vec{v}'_2 = ? \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{\text{antes}} &= \sum_{i=1}^n \vec{p}_{\text{después}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (m_1 + m_2) \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (60 + 100) \cdot 1,5 \vec{i} = 60 \cdot 0,5 \vec{i} + 100 \cdot \vec{v}'_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 240 \vec{i} = 30 \vec{i} + 100 \cdot \vec{v}'_2 \Rightarrow 240 \vec{i} - 30 \vec{i} = 100 \cdot \vec{v}'_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{\vec{v}'_2 = 2,1 \vec{i} \text{ m/s}} \end{aligned}$$

2. Una atracción de feria consiste en lanzar un trineo de 2,0 kg por una rampa ascendente que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento es 0,15, ¿con qué velocidad se debe lanzar para que ascienda una altura de 4,0 m? S: $9,9 \text{ m s}^{-1}$.

Datos: $m = 2 \text{ kg}$; $\mu = 0,15$; $\alpha = 30^\circ$; $h = 4 \text{ m}$; $\{V_0 = ?\}$

Dibujamos todas las fuerzas que el trineo sufre durante el ascenso. El movimiento del trineo es M.R.U.V. (frenado). Calculamos la aceleración de frenado:



$$P_x = m g \sin \alpha = 2 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ = 9,8 \text{ N}$$

$$P_y = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 16,97 \text{ N}$$

Aplicamos la 2ª ley de Newton en cada eje:

$$\begin{aligned} \text{Eje X: } -P_x - F_r &= m \cdot a \rightarrow -P_x - \mu N = m \cdot a \\ \text{Eje Y: } N - P_y &= 0 \rightarrow N = P_y \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow -P_x - \mu \cdot P_y = m \cdot a \rightarrow \right.$$

$$\rightarrow -9,8 - 0,15 \cdot 16,97 = 2 \cdot a \rightarrow a = \frac{-9,8 - 0,15 \cdot 16,97}{2} \rightarrow a = -6,17 \text{ m/s}^2$$

* El trineo recorre una distancia Δx hasta pararse, y asciende verticalmente una altura h . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Triángulo: } \frac{\Delta x}{\sin \alpha} &= h \rightarrow \sin \alpha = \frac{h}{\Delta x} \rightarrow \Delta x = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{Como realiza un M.R.U.V.: } v_f^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x \rightarrow$$

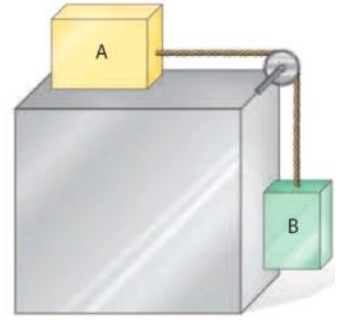
$$\rightarrow 0^2 = v_0^2 + 2 \cdot (-6,17) \cdot 8 \rightarrow 0 = v_0^2 - 98,72 \rightarrow v_0 = +\sqrt{98,72} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0 = 9,94 \text{ m/s}$$

5. Las masas de los cuerpos A y B de la figura son 300 g y 200 g, respectivamente. Considerando que no existen rozamientos, que la cuerda es inextensible y de masa despreciable y que la polea no influye en el movimiento, calcula:

- La aceleración del sistema.
- La tensión de la cuerda.

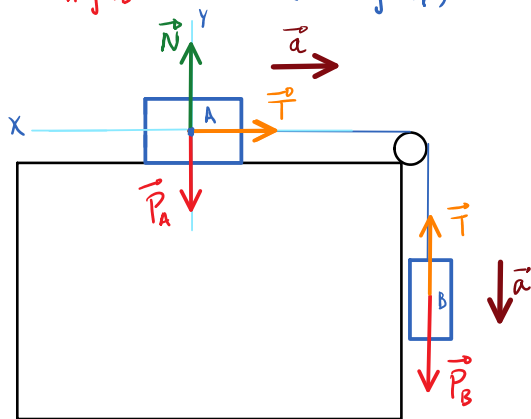
S: a) $3,9 \text{ m s}^{-2}$; b) 1,2 N.



Primero hacemos un diagrama de fuerzas sobre cada cuerpo:

Tensiones: $\vec{T}$; Normal: $\vec{N}$
 Pesos: $\vec{P}_A, \vec{P}_B$ (No hay $\vec{F}_r$)

Datos: $m_A = 0,3 \text{ kg}$
 $m_B = 0,2 \text{ kg}$



Cálculos previos:

$$P_A = m_A \cdot g = 0,3 \cdot 9,8 = 2,94 \text{ N}$$

$$P_B = m_B \cdot g = 0,2 \cdot 9,8 = 1,96 \text{ N}$$

Estudiamos la 2ª ley de Newton en cada cuerpo y en cada eje:

Cuerpo A:

Eje X: $T = m_A \cdot a \rightarrow T = 0,3 \cdot a$ (I)

Eje Y: $N - P_A = 0 \rightarrow N = P_A \rightarrow N = 2,94 \text{ N}$ (No nos la piden).

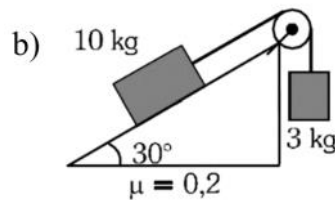
Cuerpo B: $P_B - T = m_B \cdot a \rightarrow 1,96 - T = 0,2 \cdot a$ (II)

Solucionamos el sistema (I) y (II):

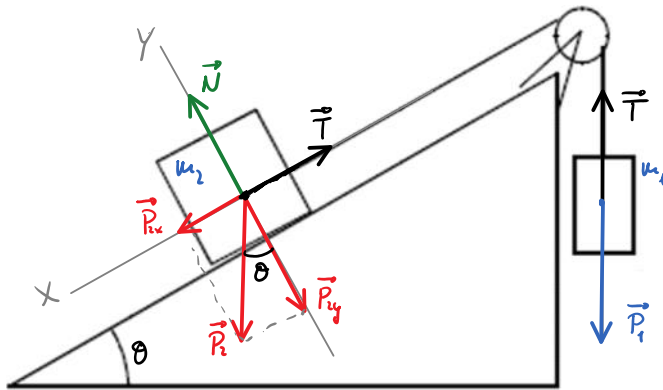
Sustituyendo (I) en (II): $1,96 - 0,3 \cdot a = 0,2 \cdot a \rightarrow 1,96 = 0,5 \cdot a \rightarrow a = 3,92 \text{ m/s}^2$

En (I) $\rightarrow T = 0,3 \cdot 3,92 \rightarrow T = 1,176 \text{ N}$

7) Calcular la aceleración que sufrirá el bloque de la figura en cada una de las siguientes situaciones:



Hagamos primero un diagrama de fuerzas sobre cada cuerpo:



- Sobre m_1 :

$\vec{P}_1$: Su peso

$\vec{T}$: Tensión de la cuerda sobre él.

- Sobre m_2 :

$\vec{P}_2$: Su peso. Lo dividimos en dos componentes: $\vec{P}_{2x}$ y $\vec{P}_{2y}$.

$\vec{N}$: Normal del plano sobre él.

$\vec{T}$: Tensión de la cuerda sobre él.

Cálculos previos:

$$P_1 = m_1 g = 3 \cdot 9,8 = 29,4 \text{ N}$$

$$P_{1x} = m_1 g \cdot \sin \theta = 10 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ = 49 \text{ N}$$

$$P_{1y} = m_1 g \cdot \cos \theta = 10 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 84,87 \text{ N}$$

La fuerza de rozamiento, $\vec{F}_r$, no la incluimos hasta averiguar hacia donde se mueve el sistema, ya que ésta se opone al movimiento de m_2 .

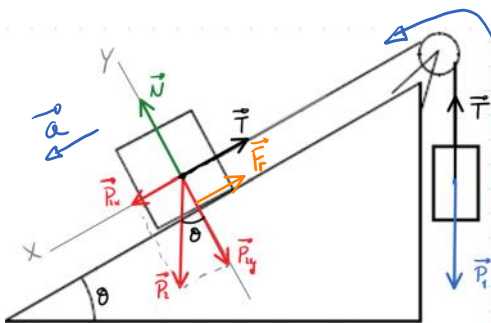
- Veamos hacia donde se mueve el sistema:

Las fuerzas que tienden a mover el sistema hacia uno u otro sentido, son:

- Hacia la derecha: $\vec{P}_1$
 - Hacia la izquierda: $\vec{P}_{1x}$
- Como

$P_1 < P_{1x} \rightarrow$ El sistema se moverá hacia la izquierda.

- Dibujemos ahora el sentido y la $\vec{F}_r$. Y apliquemos la 2ª ley de Newton en cada cuerpo y eje:



- Cuerpo m_1 : $T - P_1 = m_1 a \rightarrow T - 29,4 = 3 \cdot a$ (I)

- Cuerpo m_2 :

Eje X: $P_{1x} - T - F_r = m_2 a \rightarrow 49 - T - \mu \cdot N = 10 \cdot a$
Eje Y: $N - P_{1y} = 0 \rightarrow N = P_{1y} = 84,87$

$\rightarrow 49 - T - 0,2 \cdot 84,87 = 10 \cdot a \rightarrow 32,026 - T = 10 \cdot a$ (II)

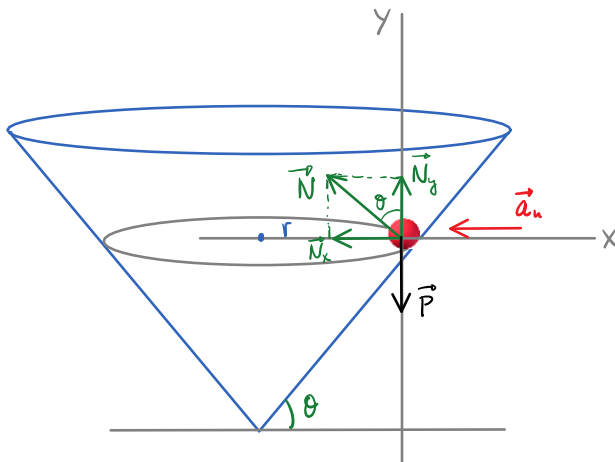
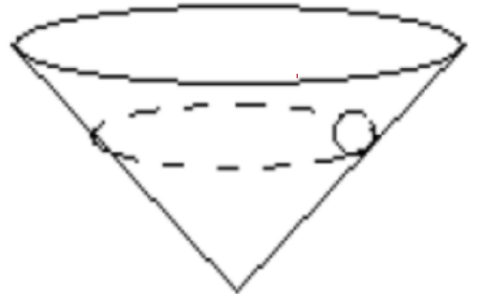
Resolvemos el sistema (I) y (II): Sumando ambas: $32,026 - 29,4 = 13 \cdot a \rightarrow$

$\rightarrow a = \frac{32,026 - 29,4}{13} \rightarrow a = 0,202 \text{ m/s}^2$

(I) $\rightarrow T - 29,4 = 3 \cdot 0,202 \rightarrow T \approx 30 \text{ N}$

4) Se ha soltado una bolita de masa m en el interior de un cono, lanzándola de forma que describe un círculo de radio 10 cm a velocidad constante. La pared del cono forma un ángulo de 40° con la horizontal.

- ¿Cuál es la fuerza que hace de fuerza centrípeta?
- ¿Cuál es la velocidad de dicha bolita?
- ¿Cuál sería la velocidad de la bolita si su masa fuera el doble?



Datos: $\theta = 40^\circ$; $r = 0,1 \text{ m}$

Masa m .

La bola describe un M.C.U., luego posee aceleración centrípeta ($\vec{a}_n$). Elijo el eje x de manera que $\vec{a}_n = \vec{a}_x$.

Fuerzas sobre la bola:

$\vec{P}$: Peso de la bola

$\vec{N}$: Normal de la superficie del cono sobre la bola. La divido en componentes: $\vec{N}_x$ y $\vec{N}_y$

a) Como vemos, la componente $\vec{N}_y$ se anula con $\vec{P}$, luego la resultante de las fuerzas sobre la bolita es $\vec{N}_x$, que es la fuerza centrípeta que obliga a la misma a realizar un M.C.U.

b) Apliquemos las leyes de Newton en cada eje:

$$\begin{aligned} \text{Eje } x: N_x &= m \cdot a_x \rightarrow N \cdot \sin \theta = m a_n \rightarrow N \cdot \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \\ \text{Eje } y: N_y - P &= m \cdot g_y \rightarrow N_y = P \rightarrow N \cdot \cos \theta = mg \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Eje } x: N_x &= m \cdot a_x \rightarrow N \cdot \sin \theta = m a_n \rightarrow N \cdot \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \\ \text{Eje } y: N_y - P &= m \cdot g_y \rightarrow N_y = P \rightarrow N \cdot \cos \theta = mg \end{aligned}} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{N \cdot \sin \theta}{N \cdot \cos \theta} = \frac{m \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} \rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{r \cdot g} \rightarrow v = \sqrt{r g \tan \theta} \quad (*)$$

Por tanto:
$$v = \sqrt{0,1 \cdot 9,8 \cdot \tan 40^\circ} \cong 0,9 \text{ m/s}$$

c) Como vemos en la expresión obtenida, la velocidad v de la bolita es independiente de la masa de la misma. Por tanto, si tuviese masa doble (o la que fuera), la velocidad sería la misma:

$$v = \sqrt{r g \tan \theta} \cong 0,9 \text{ m/s}$$

- 15) Sobre una superficie horizontal se encuentra un bloque de corcho de 0,5 kg de masa, que se mueve con una velocidad de 1 m/s. Una persona lanza un dardo de 50 g de masa en la misma dirección y sentido. El dardo queda incrustado, lo que hace aumentar la velocidad en un 2 %. Calcular:
- La velocidad con que se ha lanzado el dardo.
 - El impulso mecánico que sufre el dardo en el impacto.

Datos: Bloque $\rightarrow m_1 = 0,5 \text{ kg}$; $V_1 = 1 \text{ m/s}$
 Dardo $\rightarrow m_2 = 50 \text{ g} = 0,05 \text{ kg}$; $V_2 = ??$



Bloque: $V_1 = 1 \text{ m/s}$
 Dardo: $V_2 = ??$



Bloque { : $V_1' = V_2' = V' = V_1 + 0,02 \cdot V_1 = 1,02 \text{ m/s}$
 Dardo {

Aplicamos el teorema de conservación de la cantidad de movimiento al choque:

$\sum \vec{p}_{\text{antes}} = \sum \vec{p}_{\text{después}} \rightarrow$ Como el choque sucede en una sola dimensión, podemos obviar los vectores:

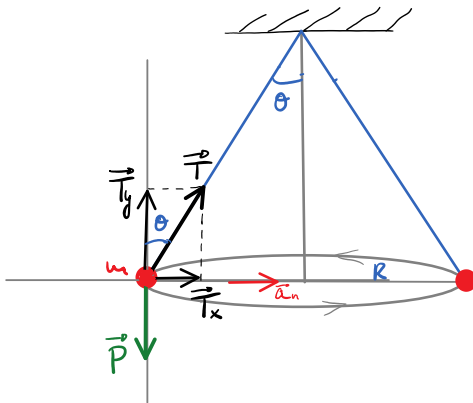
$$\sum p_{\text{antes}} = \sum p_{\text{después}} \rightarrow p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \rightarrow m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 = m_1 \cdot V_1' + m_2 \cdot V_2' \rightarrow$$

$$\rightarrow m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 = (m_1 + m_2) \cdot V' \rightarrow 0,5 \cdot 1 + 0,05 \cdot V_2 = (0,5 + 0,05) \cdot 1,02 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,05 \cdot V_2 = 0,561 - 0,5 \rightarrow V_2 = \frac{0,061}{0,05} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{V_2 = 1,22 \text{ m/s}}$$

- 12) Un péndulo cónico con una masa de 3 kg cuelga de una cuerda ideal y gira en una circunferencia horizontal de 80 cm de radio con una velocidad angular de 4 rad/s. Calcular:
- El ángulo que la cuerda forma con la vertical.
 - La tensión de la cuerda.



Notas: $T_x = T \cdot \sin \theta$
 $T_y = T \cdot \cos \theta$

Datos: $m = 3 \text{ kg}$; $\omega = 4 \text{ rad/s}$; $R = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$; $\theta = ??$

- Elegimos el sistema de referencia (X, Y), tal como hemos representado. En él la aceleración sólo tiene componente X:
 $\vec{a} = \vec{a}_x = \vec{a}_n$

- Representamos las fuerzas sobre la masa en la posición de la izquierda del dibujo. Las fuerzas sobre ella son:

$\vec{T}$: Tensión de la cuerda. La dividimos en dos componentes: $\vec{T}_x$ y $\vec{T}_y$

$\vec{P}$: Peso de la masa m.

Aplicamos la 2ª ley de Newton en cada eje:

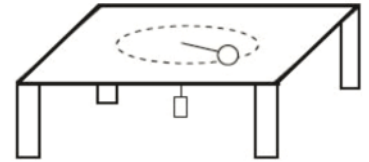
$$\begin{aligned} \text{Eje X: } T_x &= m a_x \rightarrow T \cdot \sin \theta = m \cdot a_n \rightarrow T \cdot \sin \theta = m \omega^2 R \\ \text{Eje Y: } T_y - P &= m a_y \rightarrow T \cdot \cos \theta - mg = 0 \rightarrow T \cdot \cos \theta = mg \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow \right.$$

→ Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } \tan \theta &= \frac{m \cdot \omega^2 R}{m \cdot g} \rightarrow \tan \theta = \frac{\omega^2 R}{g} \rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{4^2 \cdot 0,8}{9,8} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \theta = 52,56^\circ = 52^\circ 33' 41,14'' \end{aligned}$$

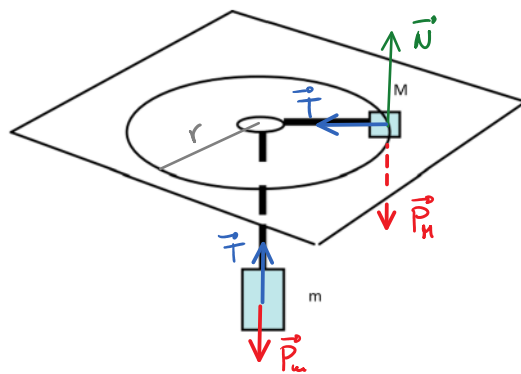
$$\text{b) } T \cdot \cos \theta = mg \rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{3 \cdot 9,8}{\cos 52,56^\circ} \rightarrow T = 48,36 \text{ N}$$

- 13) Una masa M de 300 g gira en un círculo horizontal de 60 cm de radio, sobre una mesa sin rozamiento, a velocidad constante de una vuelta por segundo. La masa M está unida mediante una cuerda que pasa por un pequeño orificio de la mesa a otra masa m . ¿Cuál debe ser el valor de m para que el sistema se mantenga en equilibrio (es decir que m ni suba ni baje)? Sol: 0,72 kg.



Dato: $M = 300 \text{ g} = 0,3 \text{ kg}$; $r = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$;
 $\omega = 1 \frac{\text{vuelta}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 2\pi \text{ rad/s}$; ¿m?

Representamos las fuerzas sobre cada masa:



$\vec{P}_n$: peso de n
 $\vec{P}_m$: peso de m
 $\vec{N}$: normal de la mesa sobre M .
 $\vec{T}$: Tensión de la cuerda sobre cada masa.

- Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada cuerpo:

Masa M : (M.C.U. Eje central): Nota: El eje vertical no nos hace falta.

$$T = M \cdot a_n \rightarrow T = M \cdot \omega^2 \cdot r$$

Masa m : (Equilibrio $a=0$):

$$T - P_m = 0 \rightarrow T = P_m \rightarrow T = m \cdot g$$

} Igualando: $\rightarrow$

$$\rightarrow M \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot g \rightarrow m = \frac{M \cdot \omega^2 \cdot r}{g} = \frac{0,3 \cdot (2\pi)^2 \cdot 0,6}{9,8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{m = 0,725 \text{ kg}}$$

5) Una escopeta de masa 5,8 kg lanza un proyectil de masa 20 g con una velocidad inicial de 750 m/s. ¿cuál será la velocidad de retroceso? [Ver solución del problema n° 5](#)

b) Calcula los impulsos mecánicos que sufren la escopeta y el proyectil, durante el disparo.

a)



1 → Escopeta → $m_1 = 5,8 \text{ kg}$
2 → Proyectil → $m_2 = 0,02 \text{ kg}$

Antes del disparo: $\vec{v}_1 = 0$; $\vec{v}_2 = 0$

Después del disparo:



$\vec{v}_1' = ?$ $\vec{v}_2' = 750 \text{ m/s}$

Aplicamos el teorema de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{p}_{\text{antes}} = \sum \vec{p}_{\text{después}} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 5,8 \cdot \vec{v}_1' + 0,02 \cdot 750 \text{ m/s} \rightarrow \boxed{\vec{v}_1' = \frac{-0,02 \cdot 750 \text{ m/s}}{5,8} \approx -2,586 \text{ m/s}}$$

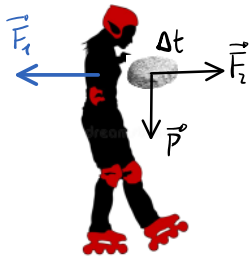
b) Calcula los impulsos mecánicos que sufren la escopeta y el proyectil, durante el disparo.

Escopeta: $\vec{I}_1 = \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1' \rightarrow \boxed{\vec{I}_1 = 5,8 \cdot (-2,586) = -15 \text{ N} \cdot \text{s}}$

Proyectil: $\vec{I}_2 = \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = m_2 \cdot \vec{v}_2' \rightarrow \boxed{\vec{I}_2 = 0,02 \cdot (750 \text{ m/s}) = 15 \text{ N} \cdot \text{s}}$

Obviamente, ambos impulsos deben ser del mismo módulo y dirección y sentidos contrarios.

2) Un hombre colocado sobre patines arroja una piedra que pesa 80 N mediante una fuerza de 15 N que actúa durante 0,8 s, ¿con qué velocidad sale la piedra y cuál es la velocidad de retroceso del hombre si su masa es de 90 kg? [Ver solución del problema n° 2](#)
 b) Calcula también el impulso que sufre la piedra y el hombre.



Datos:

Hombre(1): $m_1 = 90 \text{ kg}$

Piedra(2): $P_2 = m_2 g \rightarrow 80 = m_2 \cdot 9,8 \rightarrow m_2 = 8,16 \text{ kg}$

$\vec{F}_2 = 15 \text{ N}$; $\Delta t = 0,8 \text{ s}$

Antes: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$ (ambos están quietos).

Después: Hombre $\rightarrow \vec{v}_1' = ?$

Piedra $\rightarrow \vec{v}_2' = ?$

El impulso mecánico que sufre la piedra es: $\vec{I}_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}_2 \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{F}_2 \cdot \Delta t = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \rightarrow \vec{F}_2 \cdot \Delta t = m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_2 \rightarrow 15 \text{ N} \cdot 0,8 \text{ s} = 8,16 \cdot \vec{v}_2' \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v}_2' = \frac{12 \text{ N} \cdot \text{s}}{8,16} \approx 1,47 \text{ m/s}$$

Para calcular la velocidad de retroceso del patinador, aplicamos el teorema de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{p}_{\text{antes}} = \sum \vec{p}_{\text{después}} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \rightarrow 0 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2' \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v}_1' = \frac{-m_2 \cdot \vec{v}_2'}{m_1} = \frac{-8,16 \cdot 1,47 \text{ m/s}}{90} \rightarrow \vec{v}_1' = -0,133 \text{ m/s}$$

b) El impulso que sufre la piedra es:

$$\vec{I}_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}_2 \rightarrow \vec{I}_2 = 15 \text{ N} \cdot 0,8 \text{ s} = 12 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Por la tercera ley de Newton el impulso que sufre el hombre ($\vec{I}_1$) debe ser igual y de sentido contrario que el de la piedra. Comprobémoslo:

$$\vec{I}_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta t = -15 \text{ N} \cdot 0,8 \text{ s} = -12 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -15 \text{ N}$

$$\vec{I}_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} = m_2 \cdot \vec{v}_2' - m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\sum \vec{p}_{\text{antes}} = \sum \vec{p}_{\text{después}} \leftarrow$$

3) Calcular la aceleración del sistema.

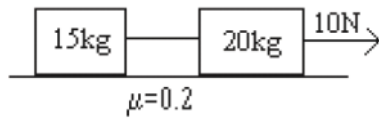
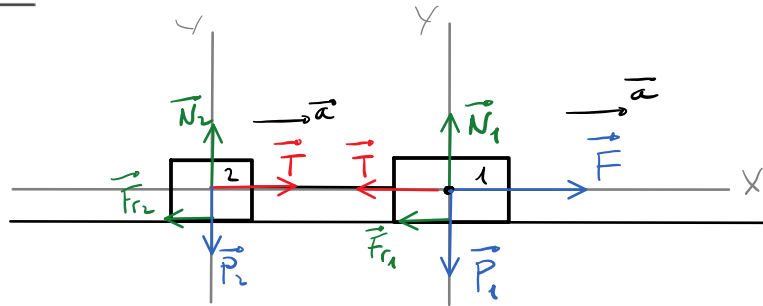


Diagrama de
fuerzas:



Fuerzas sobre los cuerpos:

$\vec{T}$ → Tensiones de la cuerda sobre cada cuerpo.

$\vec{P}_1, \vec{P}_2$ → Pesos de cada cuerpo

$\vec{N}_1, \vec{N}_2$ → Normales del suelo sobre cada cuerpo.

$\vec{F}_{r1}, \vec{F}_{r2}$ → Fuerzas de rozamiento sobre cada cuerpo

$\vec{F}$ → Fuerza externa sobre el cuerpo 1.

Cálculos previos:

$$P_1 = m_1 g = 20 \cdot 9.8 = 196 \text{ N}$$

$$P_2 = m_2 g = 15 \cdot 9.8 = 147 \text{ N}$$

$$F = 10 \text{ N (nos la dan)}$$

Aplicamos la 2ª ley de Newton a cada cuerpo:

$\boxed{m_1}$: Eje X: $F - T - F_{r1} = m_1 a$

Eje Y: $N_1 = P_1 = m_1 g \rightarrow F_{r1} = \mu N_1 = 0.2 \cdot 20 \cdot 9.8 = 39.2 \text{ N}$

Observamos que la $F_{r1} > F$,
por tanto el sistema no
se podrá mover, no podrá
acelerar: $\boxed{a = 0}$

Nota: Para que el sistema se mueva, la fuerza externa aplicada debe superar a las fuerzas de rozamiento.