INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

1 Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a) $3x - 2(x+1) + 7(x+2) < \frac{x}{5}$

b) $\frac{x+5}{3} - \frac{8x+3}{4} - x \geqslant 8$

2 Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a) $\frac{2x-1}{3} - 2 < x - \frac{x+1}{2}$ **b)** $\frac{x-1}{3} \geq 2 + \frac{3-x}{6}$ **c)** $\frac{x-4}{2} - \frac{x+1}{3} \leq \frac{1}{6}$

d) $\frac{2(x-3)}{3} - \frac{x+1}{3} > x - 2$

INECUACIONES POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA.

3 Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

a) $x^2 + 3x \leq 0$

b) $2x + 5 \leq x^2 - 2x - 16$

c) $x^2 + 3x - 6 > 8 - 2x$

d) $-x^2 + 4x - 7 < 0$

e) $4x^2 - 16x < 0$

f) $x^4 + 12x^3 - 64x^2 > 0$

g) $x^4 - 25x^2 - 144 < 0$

4 Resuelve estas inecuaciones polinómicas:

a) $x^3 - 2x^2 - 8x < 0$

b) $2x^3 + x^2 - 22x + 24 < 0$

c) $4x^5 - 27x^4 + 50x^3 - 24x^2 \geqslant 0$

INECUACIONES RACIONALES.

5 Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

a) $\dfrac{x+7}{3-x} \geq 0$.

b) $\dfrac{x+2}{x^2} \leq 0$

c) $\dfrac{3x+3}{x+2} \leq 0$

d) $\dfrac{x^2-1}{-x^2+2x-1} \leq 0$

e) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$

6 Resuelve estas inecuaciones racionales:

a) $\dfrac{2x^2-18}{x^2-1} > 0$ b) $\dfrac{x^2-6x-27}{x^2-13x+40} < 0$

SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.

7 Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones y sistemas con dos incógnitas:

a) $2x + y \leq 3$ b) $3x + 2y \leq 1$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x+y \geq 2 \\ x \leq 2 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 3 \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} -x+y \geq -2 \\ y \leq 4 \end{array}\right\}$

8 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} y \leq 3 \\ y \geq -2 \end{array}\right\}$

9 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ 5x+3y \leq 15 \end{cases}$

10 Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y\leq 10 \\ 0\leq x\leq 6 \\ x\geq y \\ y\geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0\leq x\leq 120 \\ 0\leq y\leq 100 \\ x+y\leq 150 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y-x\leq 2 \\ x+5y\geq 10 \\ x+2y\leq 16 \\ 2x+y\leq 20 \end{cases}$

SOLUCIONES.

1

a) $3x-2(x+1)+7(x+2)<\frac{x}{5}$

$3x-2x-2+7x+14<\frac{x}{5}$ $\qquad 8x+12<\frac{x}{5}$

$\frac{40x+60}{\cancel{5}}<\frac{x}{\cancel{5}}$ $\qquad 39x<-60$ $\qquad x<\frac{-60}{39}$ $\qquad \frac{-60}{39}$

$\boxed{x\in\left(-\infty,\frac{-60}{39}\right)}$

b) $\frac{x+5}{3}-\frac{8x+3}{4}-x\geq 8$

$\frac{4(x+5)}{\cancel{12}}-\frac{3(8x+3)}{\cancel{12}}-\frac{12x}{\cancel{12}}\geq\frac{96}{\cancel{12}}$

$4x+20-24x-9-12x\geq 96$ $\qquad -32x\geq 85$

$x\leq\frac{85}{-32}$ $\qquad -85/32$ $\qquad \boxed{x\in\left(-\infty,\frac{-85}{32}\right]}$

2

a) $2(2x-1)-12<6x-3(x+1)\Rightarrow \quad 4x-2-12<6x-3x-3\Rightarrow x<11 \quad\rightarrow$ intervalo $(-\infty,11)$

b) $2(x-1)\geq 12+3-x\Rightarrow 2x-2\geq 12+3-x\Rightarrow 3x\geq 17\Rightarrow x\geq\frac{17}{3} \quad\rightarrow$ Intervalo $\left[\frac{17}{3},+\infty\right)$

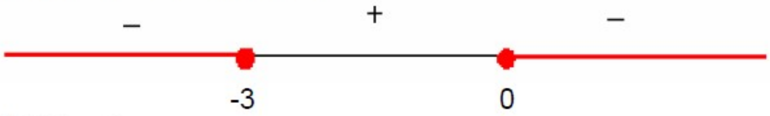
c) $3(x-4)-2(x+1)\leq 1\Rightarrow 3x-12-2x-2\leq 1\Rightarrow x\leq 15 \quad\rightarrow$ Intervalo $(-\infty,15]$.

d)

$2(x-3)-(x+1)>3(x-2)\Rightarrow 2x-6-x-1>3x-6\Rightarrow -1>2x\Rightarrow x<\frac{-1}{2} \quad\rightarrow$ Intervalo $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$

$\boxed{3}$

a) $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = -3$



Solución: $x \in (-\infty,-3] \cup [0,+\infty)$

b) Reducimos a una ecuación de segundo grado y calculamos sus soluciones:

$0 \le x^2 - 2x - 16 - 2x - 5 \quad \to \quad x^2 - 4x - 21 \ge 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \dfrac{4 \pm 10}{2} \begin{cases} 7 \\ -3 \end{cases}$

La solución es $(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

c) $x^2 + 3x - 6 > 8 - 2x \quad \to \quad x^2 + 5x - 14 > 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 14 = 0$: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \dfrac{-5 \pm 9}{2} \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}$

Solución: $x \in (-\infty,-7) \cup (2,+\infty)$

d) $-x^2 + 4x - 7 < 0$

$x^2 - 4x + 7 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$P(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 7 < 0$

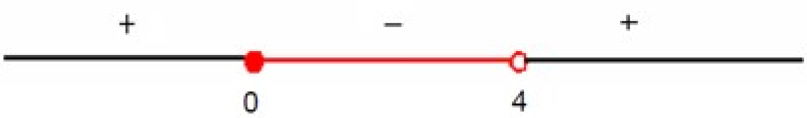
$S = \mathbb{R}$

Infinitas soluciones.

e) $4x^2 - 16x < 0$

$4x^2 - 16x = 0 \ \to \ x_1 = 0,\ x_2 = 4$

La solución es el intervalo $(0, 4)$.



f) $x^4 + 12x^3 - 64x^2 > 0$ sacamos factor común x

$x^2(x^2 + 12x - 64) > 0$

Como el primer factor es siempre positivo, sólo tendremos que estudiar el signo del 2º factor.

$x^2 + 12x - 64 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144+256}}{2} = \frac{-12 \pm 20}{2} = \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_3 = -16 \end{cases}$$

$P(-17) = (-17)^2 + 12 \cdot 17 - 64 > 0$

$P(0) = 0^2 + 12 \cdot 0 - 64 < 0$

$P(5) = 5^2 + 12 \cdot 5 - 64 > 0$

$(-\infty, -16] \cup [4, \infty)$

g) $x^4 - 25x^2 - 144 < 0$

$x^4 - 25x^2 - 144 = 0$

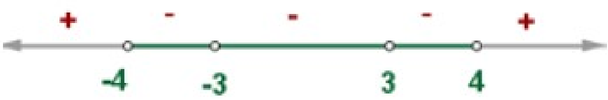
$x^2 = t$

$t^2 - 25t - 144 = 0$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} t_1 = 16 \\ t_2 = 9 \end{cases}$$

$x^2 = 16$ $\quad x = \pm\sqrt{16}$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

$x^2 = 9$ $\quad x = \pm\sqrt{9}$ $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$



$(-4, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, 4)$.

4

a) $x^3-2x^2-8x<0$

$x(x^2-2x-8)<0$

$x(x-4)(x+2)<0$

$x^2-2x-8=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm6}{2}=\begin{cases}4\\-2\end{cases}$

Raíces: $x=0$ $x=4$ $x=-2$

	$-\infty$ -2	-2 0	0 $+4$	$+4$ ∞
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
Solución	$-$	$+$	$-$	$+$

$\boxed{x\in(-\infty,-2)\cup(0,4)}$

b) $2x^3+x^2-22x+24<0$

	2	1	-22	24
2		4	10	-24
	2	5	-12	0

$2x^2+5x-12=0$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\frac{-5\pm11}{4}=\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\-\frac{16}{4}=-4\end{cases}$

Raíces: $2,\ \frac{3}{2},\ -4$

$2(x-2)(x-\frac{3}{2})(x+4)<0$

$\boxed{x\in(-\infty,-4)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)}$

	$-\infty$ -4	-4 $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ 2	2 ∞
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-3/2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
Solución	$-$	$+$	$-$	$+$

c) $4x^5-27x^4+50x^3-24x^2\geq0$

$x^2\cdot(4x^3-27x^2+50x-24)\geq0$

	4	-27	50	-24
2		8	-38	24
	4	-19	12	0

Raíces 2, 3, 16 y 0 doble

$x^2\geq0$ para todo valor de x

$x=\frac{19\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{19\pm13}{2}=\begin{cases}16\\3\end{cases}$

	$-\infty$ 2	2 3	3 16	16 ∞
$x-2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-16$	$-$	$-$	$-$	$+$
Solución	$-$	$+$	$-$	$+$

$x^2\cdot4(x-2)(x-3)(x-16)\geq0$

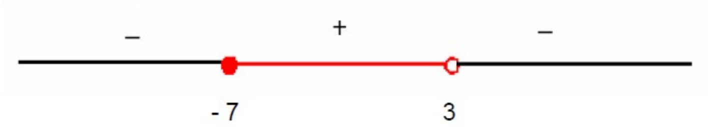
$\boxed{x\in[2,3]\cup[16,\infty)}$

5

a) Igualamos por separado numerador y denominador a cero

$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$ (pintado)

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ (sin pintar)

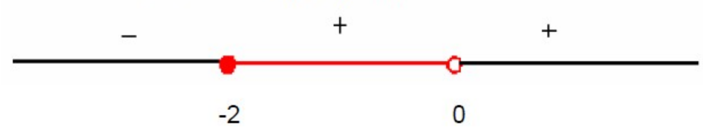


Solución: $x \in [-7, 3)$.

b) Se igualan, por separado, numerador y denominador a cero:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ (pintado)

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (sin pintar)



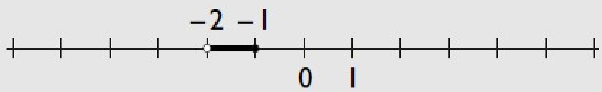
Por tanto, la solución es $(-\infty, -2]$.

c) Raíz del numerador: $x = -1$

Raíz del denominador: $x = -2$

Para $x = 0 \Rightarrow 3/2$ que no es ≤ 0

$(-2, -1] = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq -1\}$



d) $$\frac{x^2 - 1}{-x^2 + 2x - 1} \leq 0$$

$x^2 - 1 = 0$ $\qquad x = \pm 1$

$-x^2 + 2x - 1 = 0$ $\qquad x^2 - 2x + 1 = 0$ $\qquad x = 1$

$-(x-1)^2$

$$\frac{x^2 - 1}{-\boxed{(x-1)^2}} \leq 0 \qquad x \neq 1$$

$\downarrow$

$+$

El binomio elevado al cuadrado es siempre positivo, pero al tener delante el signo menos. resultará que el demnominador será siempre negativo.

$$\frac{x^2 - 1}{-1} \leq 0 \qquad x \neq 1$$

Multiplicando por −1:

$x^2 - 1 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x \neq 1$

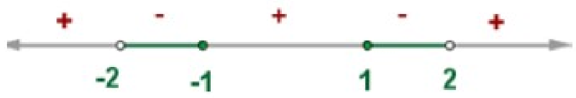
$(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

e) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$

$x^2 - 1 = 0$ $\qquad\qquad$ $x = \pm 1$

$x^2 - 4 = 0$ $\qquad\qquad$ $x = \pm 2$

$\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$ $\qquad\qquad$ $x \neq \pm 2$



$[-2, -1] \cup (1, 2)$

6

a) $\dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} > 0$ $\qquad$ $\dfrac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 1} > 0$ $\qquad$ $\dfrac{2(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)} > 0$

Numerador: $2x^2 - 18 = 0$ $\quad x = \pm 3$

Denominador: $x^2 - 1 = 0$ $\quad x = \pm 1$

$\boxed{x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)}$

	$-\infty$ a -3	-3 a -1	-1 a 1	1 a 3	3 a ∞
$x-3$	−	−	−	−	+
$x+3$	−	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+	+
$x+1$	−	−	+	+	+
Solución	+	−	+	−	+

b) $\dfrac{x^2-6x-27}{x^2-13x+40} < 0$

Numerador: $x^2-6x-27=0$ $\quad x=\dfrac{6\pm\sqrt{36+108}}{2}=\dfrac{6\pm 12}{2}=\begin{cases}9\\-3\end{cases}$

Denominador: $x^2-13x+40=0$ $\quad x=\dfrac{13\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{13\pm 3}{2}=\begin{cases}8\\5\end{cases}$

$\dfrac{(x-9)(x+3)}{(x-8)(x-5)} < 0$

	$-\infty$ a -3	-3 a 5	5 a 8	8 a 9	9 a ∞
$x-9$	−	−	−	−	+
$x+3$	−	+	+	+	+
$x-8$	−	−	−	+	+
$x-5$	−	−	+	+	+
Solución	+	−	+	−	+

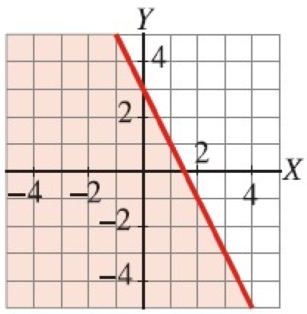
$\boxed{x\in(-3,5)\cup(8,9)}$

7

a) $2x+y\leq 3$ es lo mismo que $2x+y-3\leq 0$.

Representamos la recta $2x+y-3=0$ $(y=-2x+3)$ y vemos que divide el plano en dos mitades.

Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo (0, 0). En él, $2\cdot 0+0\leq 3$, se cumple la desigualdad. Por tanto, las soluciones de la inecuación $2x+y-3\leq 0$ son todos los puntos de la región señalada, incluida la recta:

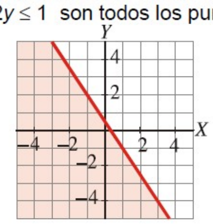


b) $3x+2y\leq 1$ es los mismo que $3x+2y-1\leq 0$.

Representamos la recta $3x+2y-1=0$ $\left(y=\dfrac{-3x+1}{2}\right)$ y vemos que divide el plano en dos mitades.

Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo, (0, 0). Vemos que cumple la desigualdad: $3\cdot 0+2\cdot 0\leq 1$

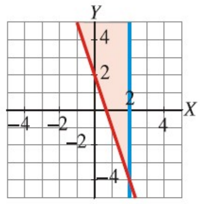
Por tanto, las soluciones de la inecuación $3x+2y\leq 1$ son todos los puntos de la región señalada, incluida la recta:



c) $3x + y \geq 2$ es lo mismo que $3x + y - 2 \geq 0$.

Representamos las rectas $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 & (y = -3x + 2) \\ x = 2 \end{cases}$

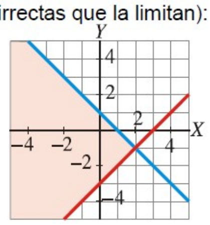
Sustituyendo (2, 1) en la desigualdad $3x + y \geq 2$, vemos que la cumple: $3 \cdot 2 + 1 \geq 2$.
Además, $x \leq 2$ corresponde a los puntos que se sitúan a la izquierda de la recta $x = 2$ (o sobre ella).
Tomando las soluciones comunes a las dos desigualdades, llegamos al recinto solución del sistema (la parte coloreada y las semirrectas que lo limitan):



d)
$x + y \leq 1$ es los mismo que $x + y - 1 \leq 0$
$x - y \leq 3$ es lo mismo que $x - y - 3 \leq 0$

Representamos las dos rectas: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 & (y = -x + 1) \\ x - y - 3 = 0 & (y = x - 3) \end{cases}$

Sustituyendo el punto (0, 0) en las desigualdades, vemos que se cumplen. Y si tenemos en cuenta que las soluciones del sistema son la soluciones comunes a ambas inecuaciones, obtenemos que las soluciones del sistemas son los puntos de la zona coloreada (incluyendo las semirrectas que la limitan):

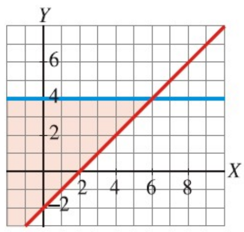


e) $-x + y \geq -2$ es lo mismo que $-x + y + 2 \geq 0$.

Representamos las rectas: $\begin{cases} -x + y + 2 = 0 & (y = x - 2) \\ y = 4 \end{cases}$

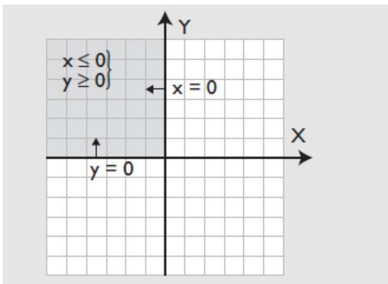
Si sustituimos el punto (0, 0) en las dos desigualdades, vemos que se cumplen: $\begin{cases} 0 + 0 \geq -2 \\ 0 \leq 4 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones del sistema corresponden al recinto coloreado (incluyendo las dos semirrectas que lo limitan):

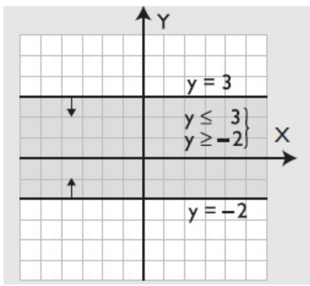


8

a)



b)



9

Resolvemos cada inecuación por separado.

1º Inecuación $x-y\leq 1$

- Dibujamos la recta $x-y=1$. Damos dos valores a la x

x	0	1
y	-1	0

Elegimos el origen (0 , 0)

$x-y\leq 1$

$(0,0)\Rightarrow 0-0\leq 1$

$0\leq 1$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

2º Inecuación $5x+3y\leq 15$

- Dibujamos la recta 5x+3y=15 . Damos dos valores a la x

x	0	3
y	5	0

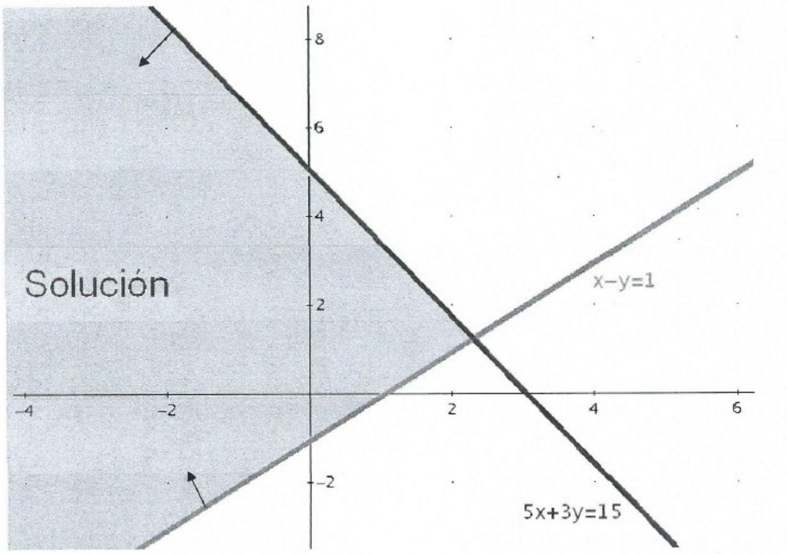
Elegimos el origen (0 , 0)

$5x+3y\leq 15$

$(0,0)\Rightarrow 5\cdot 0+3\cdot 0\leq 15$

$0\leq 15$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

Gráficamente



10

a) $x+y\leq 10$

- Dibujamos la recta x + y = 10 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	10
y	10	0

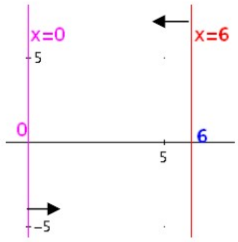
$x+y\leq 10$

$(0,0)\Rightarrow 0+0\leq 10$

$0\leq 10$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{0 \le x \le 6}$

- Dibujamos la recta x=0 y x=6



$\boxed{x \ge y}$

- Dibujamos la recta x = y . Damos dos valores a la x

x	0	1
y	0	1

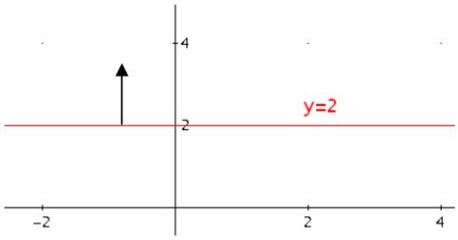
- Elegimos un punto que no pertenezca a la recta x=y, por ejemplo, (1,0)

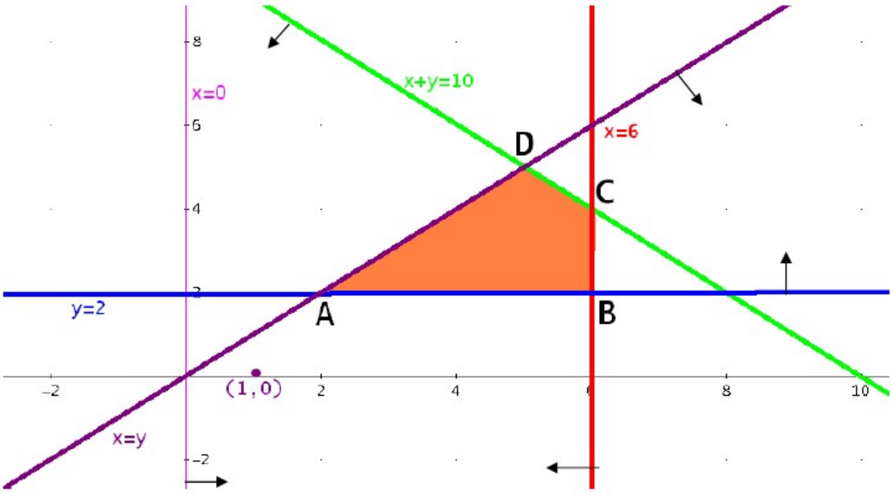
$x \ge y$

$(1,0) \Rightarrow 1 \ge 0$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el punto (1,0)

$\boxed{y \ge 2}$

- Dibujamos la recta y=2

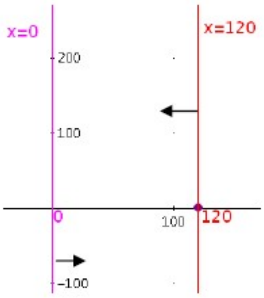




b)

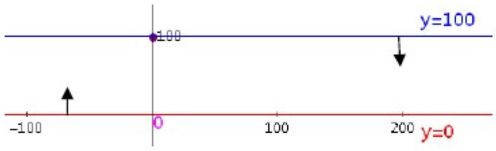
$\boxed{0 \le x \le 120}$

- Dibujamos la recta x=0 y x=120



$\boxed{0 \le y \le 100}$

- Dibujamos la recta y=0 e y=100



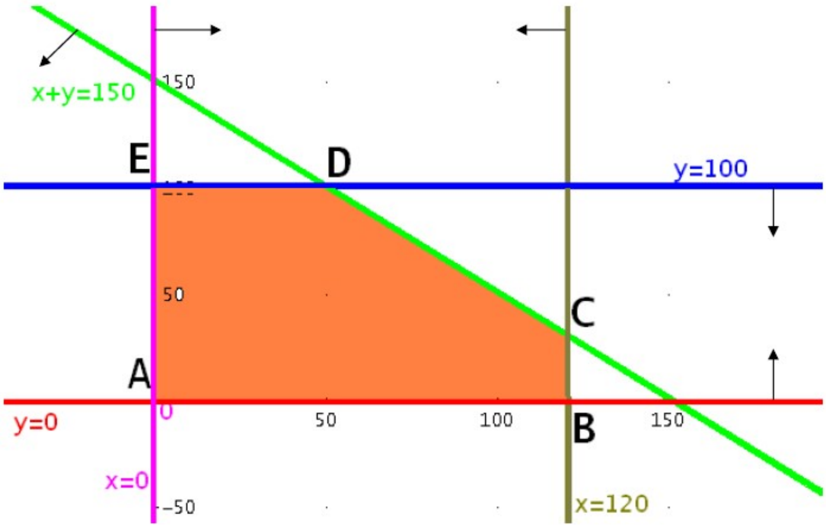
$\boxed{x + y \le 150}$

- Dibujamos la recta x + y = 150 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	150
y	150	0

$$x + y \le 150$$
$$(0,0) \Rightarrow 0 + 0 \le 150$$

$0 \le 150$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen



c)

$\boxed{y - x \le 2}$

- Dibujamos la recta y −x = 2 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	-2
y	2	0

$$y - x \le 2$$
$$(0,0) \Rightarrow 0 - 0 \le 2$$

$0 \le 2$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x+5y \geq 10}$

x	0	10
y	2	0

- Dibujamos la recta x +5y =10 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

$x+5y \geq 10$

$(0,0) \Rightarrow 0+5\cdot 0 \geq 10$

$0 \geq 10$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no se encuentra el origen

$\boxed{x+2y \leq 16}$

x	0	16
y	8	0

- Dibujamos la recta x +2y = 16 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

$x+2y \leq 16$

$(0,0) \Rightarrow 0+2\cdot 0 \leq 16$

$0 \leq 16$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{2x+y \leq 20}$

x	0	10
y	20	0

- Dibujamos la recta 2x + y = 20 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

$2x+y \leq 20$

$(0,0) \Rightarrow 2\cdot 0+0 \leq 20$

$0 \leq 20$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen