SISTEMAS DE DOS INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son los formados por dos inecuaciones de primer grado con una incógnita. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-2>3(2x+5) \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{3x-1}{2}\geq 6-x \end{array}\right\}$$

La **solución** del sistema es el conjunto de números reales que es a la vez solución de las dos inecuaciones que lo forman. Es decir, la intersección de las soluciones de las inecuaciones.

Para hallar la solución de un sistema, como el del ejemplo:

1. Se resuelve cada inecuación de forma independiente.

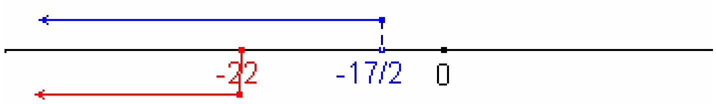
Primera inecuación: $4x-2>3(2x+5)$

$$4x-2>6x+15$$
$$4x-6x>15+2$$
$$-2x>17$$
$$2x<-17$$
$$x<\frac{-17}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left(-\infty,\frac{-17}{2}\right)$$

Segunda inecuación: $\dfrac{x}{4}-\dfrac{3x-1}{2}\geq 6-x$

$$\frac{x}{4}-\frac{6x-2}{4}\geq\frac{24-4x}{4}$$
$$4\cdot\left[\frac{x}{4}-\frac{6x-2}{4}\geq\frac{24-4x}{4}\right]$$
$$x-(6x-2)\geq 24-4x$$
$$x-6x+2\geq 24-4x$$
$$x-6x+4x\geq 24-2$$
$$-x\geq 22$$
$$x\leq -22 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } (-\infty,-22]$$

2. Se halla la intersección de las soluciones obtenidas para cada inecuación. Representando las soluciones en la recta real, se puede ver donde coinciden:



NOTA: Observa que se ha dibujado con línea discontinua el segmento que une el punto $\dfrac{-17}{2}$ con el vector. Con ello se quiere indicar que ese punto no pertenece a la solución de la ecuación. En adelante se seguirá utilizando.

Las soluciones coinciden en el intervalo: $(-\infty,-22]$.

Por tanto **la solución del sistema** es: $\mathbf{(-\infty,-22]}$

CASO PARTICULAR:

Algunas inecuaciones con fracciones algebraicas dan lugar a sistemas de inecuaciones del tipo anterior. En general, si P(x) y Q(x) son polinomios, se puede escribir en la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$.

Para resolverlos, se tiene en cuenta la regla de los signos de la división y que el denominador de una fracción no puede ser igual a 0. Se obtienen las siguientes situaciones:

<u>CASO 1</u>

$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Para que el cociente sea positivo, P(x) y Q(x) deben tener el mismo signo, es decir:

$\left.\begin{matrix} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\}$ o $\left.\begin{matrix} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\}$ cuando la inecuación es $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

$\left.\begin{matrix} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\}$ o $\left.\begin{matrix} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\}$ cuando la inecuación es $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$

<u>CASO 2</u>

$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. Para que el cociente sea negativo, P(x) y Q(x) deben tener distinto signo, es decir:

$\left.\begin{matrix} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\}$ o $\left.\begin{matrix} P(x) \leq 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\}$ cuando la inecuación es $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$

$\left.\begin{matrix} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{matrix}\right\}$ o $\left.\begin{matrix} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{matrix}\right\}$ cuando la inecuación es $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{matrix} \frac{4}{3} - (9-5x) < \frac{2x+7}{6} \\ 2(3x-4) - 9x \geq 10 - 4x \end{matrix}\right\}$

Primera inecuación: $\frac{4}{3} - (1-x) < \frac{2x+7}{6}$

$\frac{4}{3} - 1 + x < \frac{2x+7}{6}$

$\frac{8}{6} - \frac{6}{6} + \frac{6x}{6} < \frac{2x+7}{6}$

$8 - 6 + 6x < 2x + 7$

$6x - 2x < 7 - 8 + 6$

$$4x < 5$$

$$x < \frac{5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$$

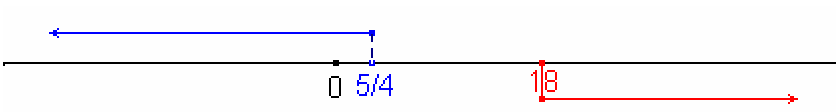
Segunda inecuación: $2(3x-4)-9x \geq 10-4x$

$$6x-8-9x \geq 10-4x$$

$$6x-9x+4x \geq 10+8$$

$$x \geq 18 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } [18,+\infty)$$

Representando las soluciones en la recta real:



Se observa que las soluciones no tienen elementos comunes.

Por tanto, el sistema **no tiene solución**.

b) $$\left.\begin{array}{l} \frac{x+2}{5}-\frac{3}{4} \leq x-\frac{3-2x}{10} \\ 2-(4-9x) < 6+5x \end{array}\right\}$$

Primera inecuación: $\frac{x+2}{5}-\frac{3}{4} \leq x-\frac{3-2x}{10}$

$$\frac{4x+8}{20}-\frac{15}{20} \leq \frac{20x}{20}-\frac{6-4x}{20}$$

$$4x+8-15 \leq 20x-(6-4x)$$

$$4x+8-15 \leq 20x-6+4x$$

$$4x-20x-4x \leq -6-8+15$$

$$-20x \leq 1$$

$$20x \geq -1$$

$$x \geq \frac{-1}{20} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } \left[\frac{-1}{20},+\infty\right)$$

Segunda inecuación: $2-(4-9x) < 6+5x$

$$2-4+9x < 6+5x$$

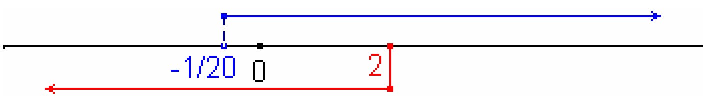
$$9x-5x < 6-2+4$$

$$4x < 8$$

$$x < \frac{8}{4}$$

$$x < 2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Solución: } (-\infty,2)$$

Representando las soluciones en la recta real:



La intersección de las soluciones es el intervalo: $\left(\frac{-1}{20},2\right]$

Por tanto, la **solución del sistema** es: $\boldsymbol{\left(\frac{-1}{20},2\right]}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(1-2x) \geq 7-5x \\ 2x+14 \geq 2-x \end{array}\right\}$

Primera inecuación: $3(1-2x) \geq 7-5x$

$3-6x \geq 7-5x$

$-6x+5x \geq 7-3$

$-x \geq 4$

$x \leq -4 \quad \Rightarrow$ Solución: $(-\infty,-4]$

Segunda inecuación: $2x+14 \geq 2-x$

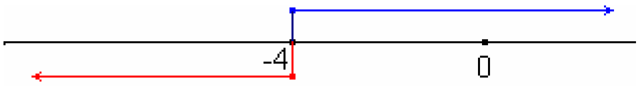
$2x+x \geq 2-14$

$3x \geq -12$

$x \geq \dfrac{-12}{3}$

$x \geq -4 \quad \Rightarrow$ Solución: $[-4,+\infty)$

Representando las soluciones en la recta real:



La intersección de las soluciones es el punto –4.

Por tanto, la **solución del sistema** es: **–4**.

EJERCICIO

Resuelve los siguientes sistemas de dos inecuaciones lineales con una incógnita:

1. $\left.\begin{array}{r} 3x+2 \leq 10 \\ x-5 > 1 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 2x-5 \geq 6 \\ 3x+1 \leq 15 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 4x-3 < 1 \\ x+6 > 2 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} 3x-2 > -7 \\ 5-x < 1 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r} 5-x < -12 \\ 10-2x < 3x-3 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{r} 2x-3 > 0 \\ 5x+1 < 0 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{r} 2x-4 < 1+5x-3 \\ 4+x \leq -x \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{r} 4(x+1)-(2-x) > 1+3x-6 \\ 10- \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{r} 2(x+1)-7 < 9x \\ 3+5x > 4(x-2)+3x \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{r} 2-5x+4(1-x) \geq 6-2x \\ 7x+2-(1+x) > 3x+9 \end{array}\right\}$

29. $$\left.\begin{array}{r}\frac{3x+2}{5}-\frac{x-1}{2}\geq 1-x\\ x+2-3(1-2x)>6(x+1)-2x\end{array}\right\}$$

30. $$\left.\begin{array}{r}x+3-(2-4x)+1\geq 0\\ 2(x-5)\geq x+6\end{array}\right\}$$

31. $$\left.\begin{array}{r}2(x-1)+3(x-4)<0\\ 1-(6-x)>x+2\end{array}\right\}$$

32. $$\left.\begin{array}{r}3x+1-2(x+5)\geq 4\\ \frac{2x+1}{5}-\frac{3-x}{10}>2\end{array}\right\}$$

33. $$\left.\begin{array}{r}4(x+1)+2(x+2)\leq 6\\ 2x+5-\frac{x}{4}+1\leq 3+x\end{array}\right\}$$

34. $$\left.\begin{array}{r}\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{4}<1\\ 3(x-2)+4(x+3)>0\end{array}\right\}$$

35. $$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{5}-\frac{2x}{4}<1-\frac{x}{2}\\ \frac{2x-3}{6}\leq 3-x\end{array}\right\}$$

36. $$\left.\begin{array}{r}x+9-(2-x)\leq 3-\frac{x}{2}\\ 4+\frac{x-1}{2}<0\end{array}\right\}$$

37. $$\left.\begin{array}{r}4+x-1\leq 3-(1+2x)\\ 5-2(1-4x)>6-5(2x+1)\end{array}\right\}$$

38. $$\left.\begin{array}{r}\frac{x+6}{3}-\frac{x-1}{9}<2-x\\ \frac{6+2x}{4}<\frac{3x+1}{8}\end{array}\right\}$$

39. $$\left.\begin{array}{r}\frac{8x+9}{6}-\frac{3x}{2}\leq 1-x\\ 2\cdot(1-5x)+9x-6<0\end{array}\right\}$$

40. $$\left.\begin{array}{l}2x+\frac{7-x}{5}>1-\frac{3x-2}{3}\\ 9-(x-2)<\frac{1+x}{4}-\frac{x}{2}\end{array}\right\}$$

41. $$\left.\begin{array}{r}\frac{2x+1}{8}-\frac{x-2}{4}\geq 0\\ \frac{3+x}{10}-\frac{1}{5}\geq\frac{x-2}{2}\end{array}\right\}$$

42. $$\left.\begin{array}{r}6(1-x)+2(x-5)\leq 9+x-(1+3x)\\ 2-(x+4)\geq 5(2-x)+6x+4\end{array}\right\}$$

43. $$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{3}-\frac{1}{2}>\frac{x+4}{6}\\ \frac{5-3x}{2}<1-\frac{x-7}{8}\end{array}\right\}$$

44. $$\left.\begin{array}{r}7-\frac{x+1}{4}\leq-\frac{1+2x}{6}\\ 3(10-2x)<7x-5(3x-3)\end{array}\right\}$$

45. $$\left.\begin{array}{r}\frac{3x-2}{9}-\frac{5x+1}{3}\geq 0\\ \frac{6-2(3-x)}{8}<1+x-\frac{x+1}{2}\end{array}\right\}$$

46. $$\left.\begin{array}{r}5x-\frac{1-x}{3}\leq\frac{x+4}{6}-(2-x)\\ \frac{1}{2}(x-6)+\frac{1}{3}(2+x)>3+\frac{4x-2}{6}\end{array}\right\}$$

47. $$\left.\begin{array}{r}2(3x-5)-x+9\geq x-\frac{x-2}{2}\\ 2+4x-6>5x-4(3+x)\end{array}\right\}$$

48. $$\left.\begin{array}{r}\frac{7-x}{2}-\frac{3+2x}{4}<\frac{5}{6}-\frac{x-3}{8}\\ \frac{2x-3(5+x)}{30}<\frac{8+6x}{15}\end{array}\right\}$$

49. $$\left.\begin{array}{r}\frac{3}{4}(1-x)+\frac{2}{5}(x+3)>\frac{3x}{10}-\frac{x+1}{2}\\ \frac{2}{7}x-\frac{3}{2}(x+4)>\frac{5-x}{14}+\frac{x}{7}\end{array}\right\}$$