12 FIGURAS EN EL ESPACIO

1 POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Página 185

1 **Describe cada uno de los cinco poliedros de arriba diciendo cómo son sus caras (por ejemplo, el C tiene siete caras, seis de ellas triángulos y una hexágono), cuántas aristas y cuántos vértices tiene.**

—A tiene 6 caras rectangulares, 12 aristas y 8 vértices.

—B tiene 5 caras. Dos de ellas, las bases, son triángulos y las tres caras laterales son rectángulos. Tiene 9 aristas y 6 vértices.

—C tiene siete caras, seis de ellas son triángulos y una, un hexágono. Tiene 12 aristas y 7 vértices.

—D tiene 12 caras. Dos de ellas son cuadrados, dos, rombos y las cuatro restantes son rectángulos. Tiene 24 aristas y 14 vértices.

—E tiene 8 caras. Dos de ellas, las bases, son hexágonos regulares, y las otras seis son trapecios isósceles. Tiene 18 aristas y 12 vértices.

—F tiene 2 caras. Una de ellas es un círculo que actúa como base, la otra, una cara curva. Tiene un único vértice y una arista. Es un cuerpo de revolución.

—G tiene 3 caras. Dos de ellas son círculos y actúan como bases, la tercera es una cara curva. No tiene vértices y tiene 2 aristas. Es un cuerpo de revolución.

—H tiene 7 caras. Cuatro de ellas son rectángulos. Tiene 15 aristas y 10 vértices.

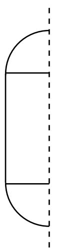
—I tiene 3 caras curvas, 2 aristas y ningún vértice.

—J tiene 3 caras. Dos de ellas planas y una curva. Tiene 3 aristas y 2 vértices.

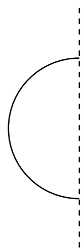
—K tiene una única cara circular. No tiene ni vértices ni aristas.

2 **Dibuja cómo se obtienen los cuerpos I y K haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.**

I

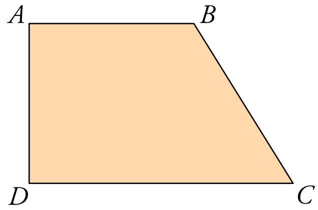


K

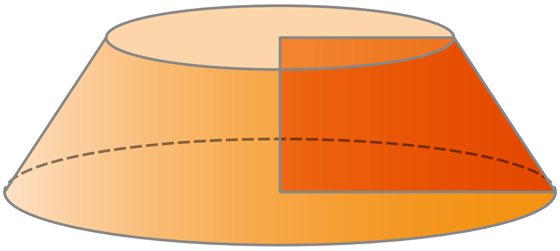


3 **Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar este trapecio alrededor de:**

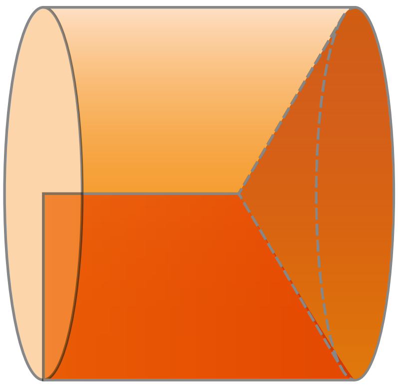
a) ***AD*** **b)** ***AB*** **c)** ***CD***



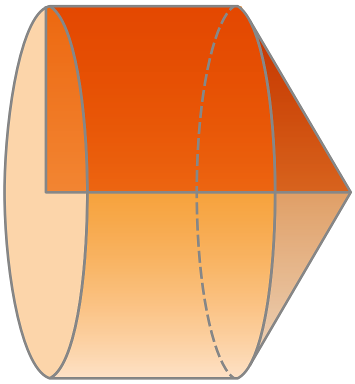
a) *AD*



b) *AB*



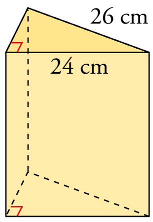
c) *CD*

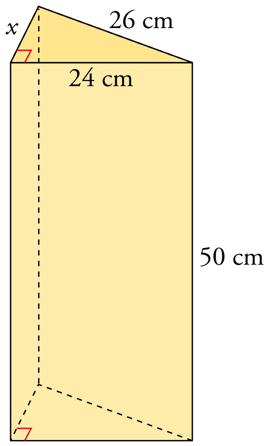


2 PRISMAS

Página 187

1 La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 26 cm, y uno de sus catetos, 24 cm. La altura del prisma es 50 cm. Halla el área total y el volumen del prisma.





Calculamos la altura de la base:

$x^2 + 24^2 = 26^2 \rightarrow x^2 + 576 = 676 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$ cm

PERÍMETRO DE LA BASE: $P = 10 + 24 + 26 = 60$ cm

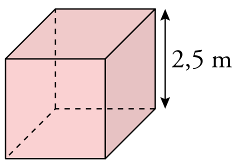
ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = P \cdot h = 60 \cdot 50 = 3\,000 \text{ cm}^2$

ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = \dfrac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 3\,000 + 2 \cdot 120 = 3\,240 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = A_{BASE} \cdot h = 120 \cdot 50 = 6\,000 \text{ cm}^3$

2 Halla el área total y el volumen de un cubo de 2,5 m de arista.



ÁREA DE UNA CARA: $l^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25 \text{ m}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 6{,}25 \cdot 6 = 37{,}5 \text{ m}^2$

VOLUMEN: $V = l^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625 \text{ m}^3$

3 Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 5 cm y 8 cm.

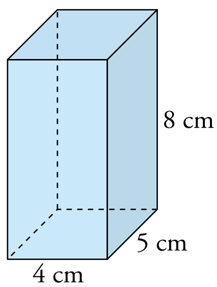
a) Dibújalo en tu cuaderno.

b) Dibuja su desarrollo. Escribe, al lado de cada arista, su longitud.

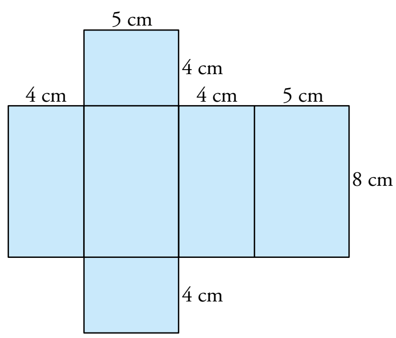
c) Halla su área.

d) Halla su volumen.

a)



b)



c) $A_{LAT} = P \cdot h = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 5) \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 144 + 2 \cdot (5 \cdot 4) = 184 \text{ cm}^2$

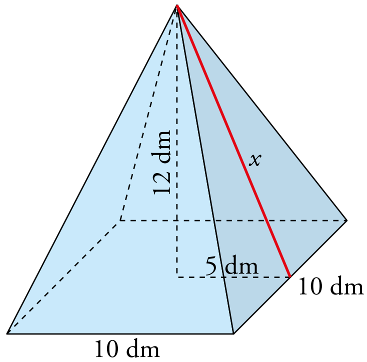
d) $V = A_{BASE} \cdot h = (5 \cdot 4) \cdot 8 = 160 \text{ cm}^3$

3 PIRÁMIDES

Página 189

1 La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 dm de lado. Su altura, 12 dm. Halla su área y su volumen.

Calculamos la apotema de la pirámide:



$x^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 25 + 144 \rightarrow x^2 = 169 \rightarrow x = \sqrt{169} \rightarrow x = 13$ dm

ÁREA DE UNA CARA: $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 65 \text{ dm}^2$

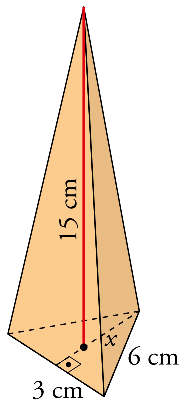
ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = l^2 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 100 + 4 \cdot 65 = 360 \text{ dm}^2$

VOLUMEN: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = \dfrac{1}{3} \cdot 1\,200 = 400 \text{ dm}^3$

2 Un triángulo equilátero de 6 cm de lado es la base de una pirámide regular cuya altura es 15 cm. Halla su área y su volumen.

Calculamos la altura del triángulo equilátero:



$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow 36 = x^2 + 9 \rightarrow x^2 = 36 - 9 \rightarrow x^2 = 27 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{27} \rightarrow x = 5{,}2$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{\text{base} \cdot h}{2} = \dfrac{5{,}2 \cdot 6}{2} \approx 15{,}6 \text{ cm}^2$

Calculamos la apotema de la pirámide:

El pie de la altura cae a $\dfrac{1}{3}$ de la altura de la base $\rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot 50{,}2 = 1{,}73$ cm

$a^2 = 15^2 + (1{,}73)^2 \rightarrow a^2 \approx 225 + 3 \rightarrow a^2 \approx 228 \rightarrow a = \sqrt{228} \rightarrow$

$\rightarrow a \approx 15{,}1$ cm

ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = \dfrac{\text{Perímetro de la base} \cdot a}{2} = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 15{,}1}{2} = 135{,}9 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{BASE} + A_{LAT} = 15{,}6 + 135{,}9 = 151{,}5 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 15{,}6 \cdot 15 = 78 \text{ cm}^3$

4 ▶ POLIEDROS REGULARES

Página 190

1 **Haz una tabla en tu cuaderno en la que aparezcan el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.**

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
C					
V					
A					

a) A partir de la tabla anterior, comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

b) Comprueba, también, que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

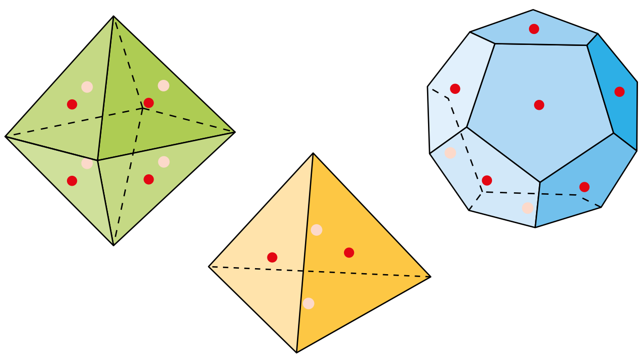
	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
C	4	4	8	12	20
V	4	8	6	20	12
A	6	12	12	30	30

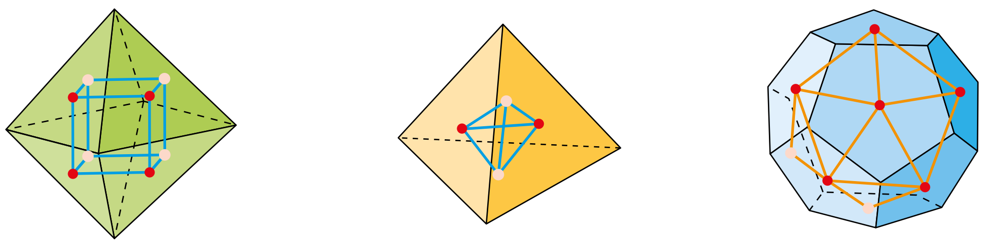
a) Efectivamente, tienen el mismo número de aristas y, el número de caras de cada uno de ellos, coincide con el de vértices del otro.

b) Obviamente tiene el mismo número de aristas. El número de vértices y caras son iguales.

2 **Hemos señalado en rojo los centros de las caras «frontales» de estos poliedros, y en rosa, los centros de algunas caras «ocultas».**

Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.

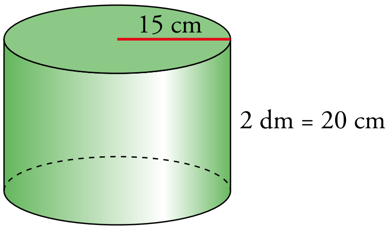




5 CILINDROS

Página 191

1 **Halla el área total y el volumen de un cilindro recto del que conocemos sus dimensiones: r = 15 cm y h = 2 dm.**



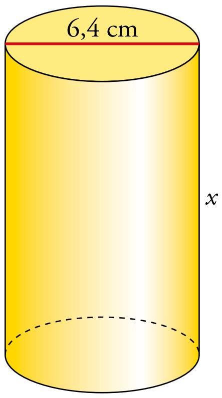
$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 15 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi = 706{,}86 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 1\,884{,}96 + 2 \cdot 706{,}86 = 3\,298{,}68 \text{ cm}^2$

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 4\,500\pi = 14\,137{,}17 \text{ cm}^2$

2 **Un bote cilíndrico de 1/3 de litro tiene un diámetro de 6,4 cm. Halla su altura en milímetros, y la superficie de la lata con la que está construido.**



Volumen = $\frac{1}{3}\ l = \frac{1}{3} \text{ dm}^3$

Radio = 3,2 cm = 0,32 dm

$V = \pi r^2 \cdot h \to \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}32^2 \cdot x \to \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}1024 \cdot x \to$

$\to x = \frac{1}{3 \cdot \pi \cdot 0{,}1024} \to x = 1{,}03 \text{ dm} = 103 \text{ mm}$

$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 3{,}2 \cdot 10{,}3 = 207{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3{,}2^2 = 32{,}17 \text{ cm}^2$

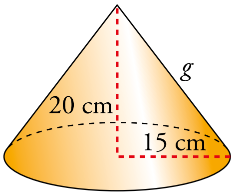
$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 207{,}1 + 2 \cdot 32{,}17 = 271{,}4 \text{ cm}^2$

La altura del bote mide 103 mm y la superficie necesaria para construirlo es $271{,}4 \text{ cm}^2$.

6 ▸ CONOS

Página 192

1 Halla el área total y el volumen de un cono recto del que conocemos sus dimensiones: r = 15 cm y h = 2 dm.

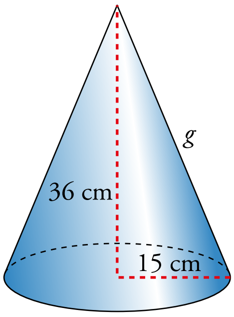


$$g = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 25 + \pi \cdot 15^2 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1\,500\pi = 4\,712{,}39 \text{ cm}^3$$

2 Halla el área total y el volumen de un cucurucho cónico de 36 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base.



$$g = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{1\,521} = 39 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 39 + \pi \cdot 15^2 = 810\pi = 2\,544{,}69 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 36 = 2\,700\pi = 8\,482{,}3 \text{ cm}^3$$

7 ESFERAS

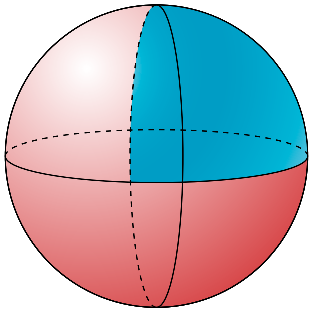
Página 193

1 **Halla el área total y el volumen de un trozo de esfera que es una cuarta parte de esfera de 1 m de diámetro.**

$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi \approx 3{,}14 \text{ m}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}5^2 = 0{,}25\pi \approx 0{,}79 \text{ m}^2$

$V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 = 0{,}52 \text{ m}^3$



Calculamos el área y el volumen de la cuarta parte de la esfera:

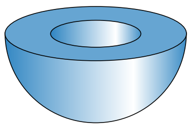
$$A = \frac{A_{\text{ESFERA}}}{4} + 2\cdot \frac{A_{\text{CÍRCULO}}}{2} = \frac{3,14}{4} + 0,79 \approx 1,58 \text{ m}^2 = 158 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{V_{\text{ESFERA}}}{4} = 0,13 \text{ m}^3$$

2 **Radio exterior = 10 cm**

Radio interior = 5 cm

Halla el área total y el volumen.



$A_{\text{ESFERA GRANDE}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2 \approx 1\,256{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ESFERA PEQUEÑA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ cm}^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CORONA CIRCULAR}} = \pi r_1^{\,2} - \pi r_2^{\,2} = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100\pi - 25\pi = 75\pi \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{TOTAL}} = \frac{1\,256,64}{2} + \frac{314,16}{2} + 235,62 = 1\,021,02 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4}{3}\pi r_1^{\,3} - \frac{4}{3}\pi r_2^{\,3}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4}{3}\pi\cdot 10^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot 5^3\right] = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 875 \approx 1\,835,6 \text{ cm}^3$$

8 COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Página 195

1 **El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.* Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros.**

Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

a) Meridiano = Perímetro = $2\pi \cdot R$ = 40 000 000 m = 40 000 km

$R \approx 6\,366{,}2$ km

b) Superficie = $4\pi \cdot (6\,366{,}2)^2 = 509\,296\,182{,}1$ km^2

c) Volumen = $\frac{4}{3}\pi \cdot (6\,366{,}2)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3

d) Área huso horario = $\frac{509\,296\,182{,}1}{24} = 21\,220\,674{,}25$ km^2

2 **Un barco va de un punto *A*, situado en las costas de África a 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro punto *B*, con la misma latitud y 80° de longitud oeste, siguiendo el paralelo común.**

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

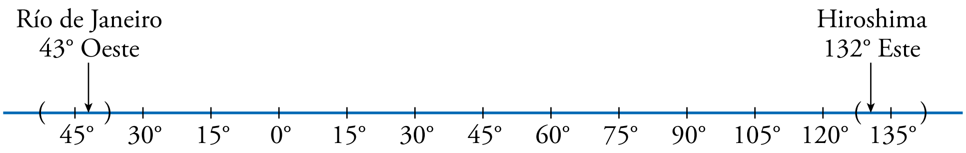
a) Entre A y B hay un arco de 80° – 10° = 70°

Como hemos visto en el problema resuelto de esta página, el perímetro del paralelo 30° es 34 641,1 km.

Por tanto, la distancia de A a B es $\frac{34\,641{,}1}{360°} \cdot 70° \approx 6\,735{,}77$ km.

b) $\frac{34\,641{,}1}{2} = 17\,320{,}55$ km.

3 **En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?**



Hay 12 horas de diferencia. Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde.

Otra forma de hacerlo es: 132° = 15° · 8 + 12

Hiroshima está en el huso horario número 9 al este.

43° = 15° · 2 + 13

Río de Janeiro está en el huso horario número 3 al oeste.

Están, pues, a 12 husos horarios de diferencia.

Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde (19 h).

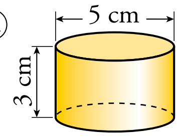
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

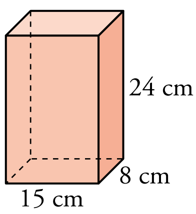
Página 196

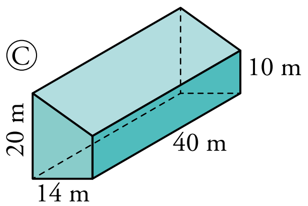
Practica

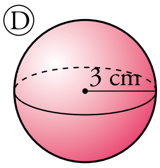
Desarrollos y áreas

1 **Calcula la superficie total de cada cuerpo:**

Ⓐ


Ⓑ


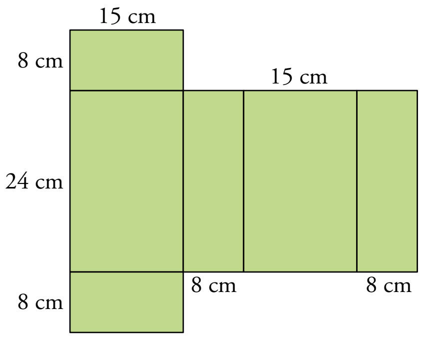
Ⓒ


Ⓓ


Ⓐ $A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = 19{,}63 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 3 = 15\pi = 47{,}12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 19{,}63 + 47{,}12 = 86{,}38 \text{ cm}^2$

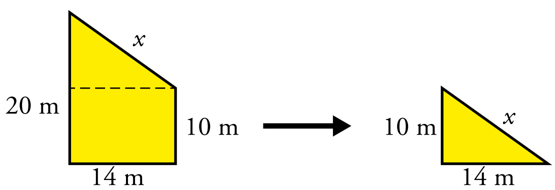
Ⓑ


$A_{\text{BASE}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 15 \cdot 8 = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (2 \cdot 15 + 2 \cdot 8) \cdot 24 = 1\,104 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 1\,104 + 2 \cdot 120 = 1\,344 \text{ cm}^2$

Ⓒ Tomamos como base uno de los trapecios.



$x^2 = 10^2 + 14^2 \rightarrow x^2 = 296$

$x = \sqrt{296} = 17{,}20 \text{ m}$

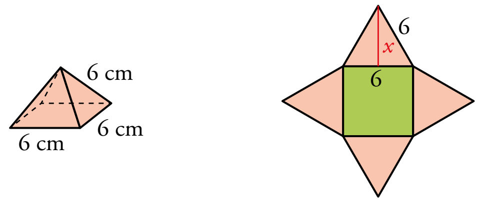
$A_{\text{BASE}} = \dfrac{(20 + 10) \cdot 14}{2} = 210 \text{ m}^2$

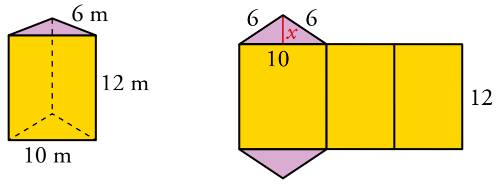
$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (14 + 10 + 17{,}20 + 20) \cdot 40 = 61{,}2 \cdot 40 = 2\,448 \text{ m}^2$

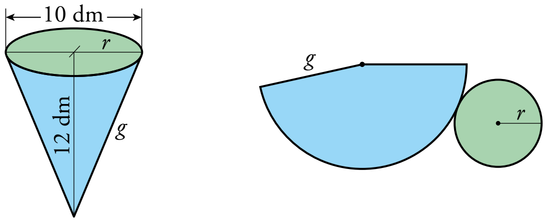
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 210 + 2\,448 = 2\,868 \text{ m}^2$

Ⓓ $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 113{,}10 \text{ cm}^2$

2 **Observa las figuras y sus desarrollos, utiliza el teorema de Pitágoras para calcular los datos que faltan y calcula el área total en cada caso:**

a) 

b) 

c) 

a) $6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow x^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow x = 5{,}20$ cm

$A_{\text{BASE}} = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \left(\dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2}\right) = 62{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 36 + 62{,}4 = 98{,}4 \text{ cm}^2$

b) $6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow x = 3{,}32$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{10 \cdot 3{,}32}{2} = 16{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} =$ perímetro de la base · alura $= (10 + 6 + 6) \cdot 12 = 22 \cdot 12 = 264 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 16{,}6 + 264 = 297{,}2 \text{ cm}^2$

c) $r = 5$ dm

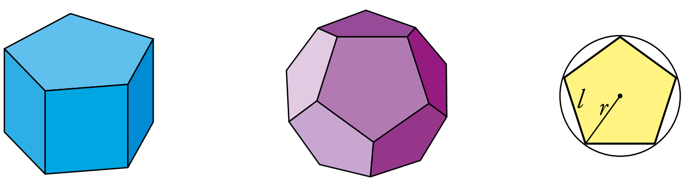
$g^2 = 12^2 + 52^2 = 169 \rightarrow g = \sqrt{169} = 13$ dm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 = 282{,}74 \text{ dm}^2$

3 **Calcula la superficie de:**

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.



El radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono de lado l es r = 0,85 · l.

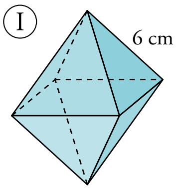
a) Apotema del pentágono = 6,88 cm

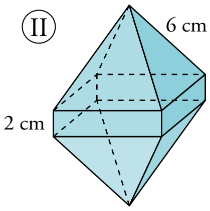
$S_{\text{BASE}} = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$ $S_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^2$

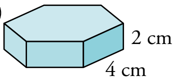
$S_{\text{TOTAL}} = 172 \cdot 2 + 500 = 844 \text{ cm}^2$

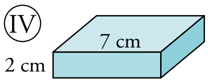
b) $S_{\text{TOTAL}} = S_{\text{PENTÁGONO}} \cdot 12 = 172 \cdot 12 = 2\,064 \text{ cm}^2$

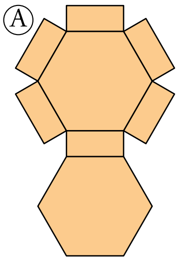
4 **Haz corresponder cada figura con su desarrollo y calcula el área total:**

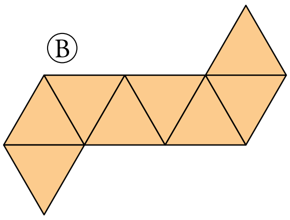
Ⓘ


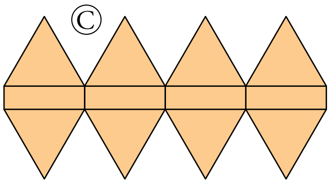
Ⓘⓘ


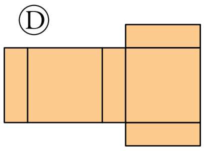
Ⓘⓘⓘ


Ⓘⓥ


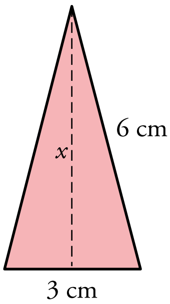
Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓘ → Ⓑ



$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow x^2 = 27 \rightarrow x = \sqrt{27} = 5,2 \text{ cm}$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{6 \cdot 5,2}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot 15,6 = 124,8 \text{ cm}^2$

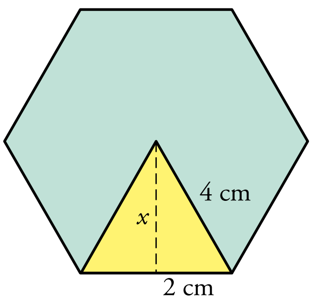
Ⓘⓘ → Ⓒ

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{6 \cdot 5,2}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 12 + 8 \cdot 15,6 = 172,8 \text{ cm}^2$

Ⓘⓘⓘ → Ⓐ



$4^2 = x^2 + 2^2 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \sqrt{12} = 3,5 \text{ cm}$

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \dfrac{24 \cdot 3,5}{2} = 42 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 42 + 6 \cdot 8 = 132 \text{ cm}^2$

Ⓘⓥ → Ⓒ

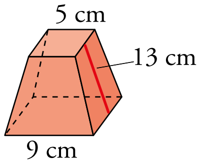
$A_{\text{CUADRADO}} = 7 \cdot 7 = 49 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 7 = 14 \text{ cm}^2$

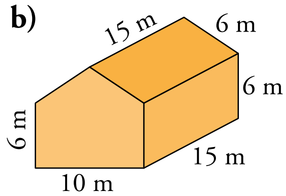
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 49 + 4 \cdot 14 = 154 \text{ cm}^2$

5 **Dibuja en tu cuaderno, a mano alzada, el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos:**

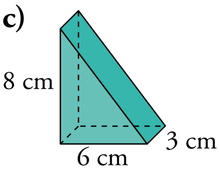
a)



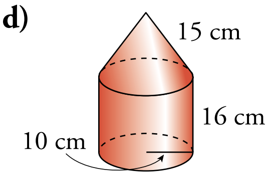
b)



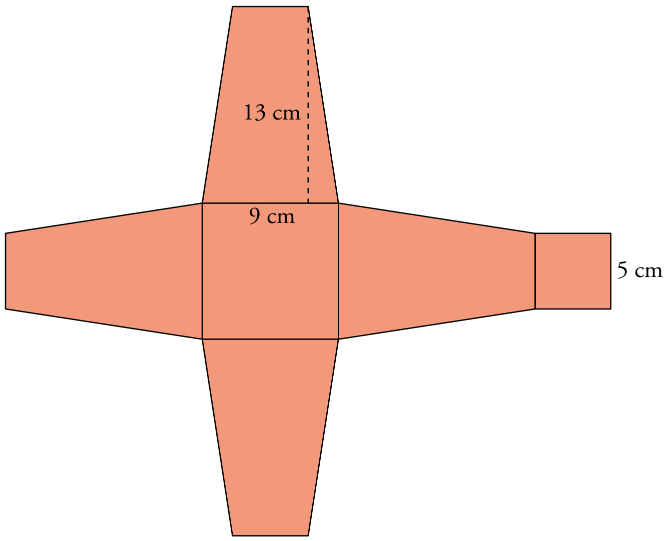
c)



d)



a)



$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura} = \frac{9+5}{2} \cdot 13 = 91 \text{ cm}^2$$

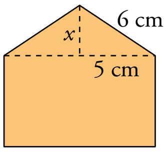
$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 4 \cdot 91 = 364 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MAYOR}} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MENOR}} = l^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 25 + 81 + 364 = 470 \text{ cm}^2$

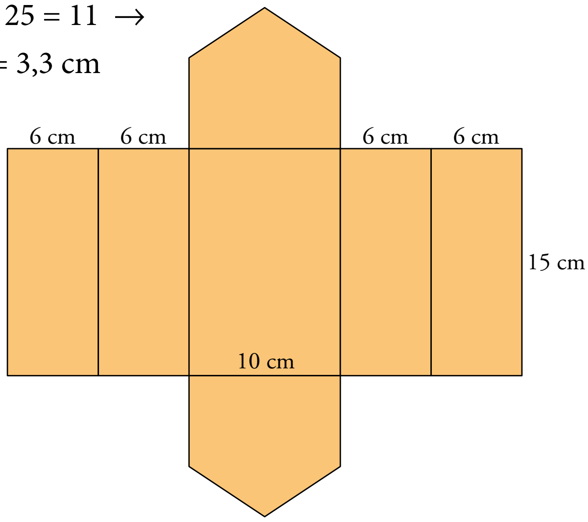
b)



Tomamos como base uno de los pentágonos.

$6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{11} = 3{,}3$ cm



$A_{\text{BASE}} = A_{\text{TRIÁNGULO}} + A_{\text{RECTÁNGULO}} =$

$= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \text{base} \cdot \text{altura}$

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{10 \cdot 3{,}3}{2} + 6 \cdot 10 = 76{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} =$

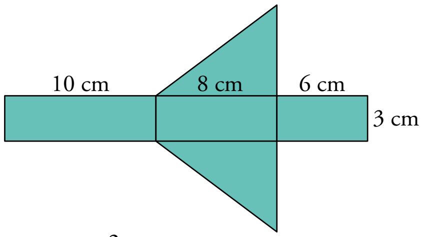
$= (6 \cdot 4 + 10) \cdot 15 = 510 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 510 + 2 \cdot 76{,}5 = 663 \text{ cm}^2$

c) Calculamos lo que mide la hipotenusa del triángulo:

$x^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \rightarrow x = 10$ cm

Tomamos como base uno de los triángulos:

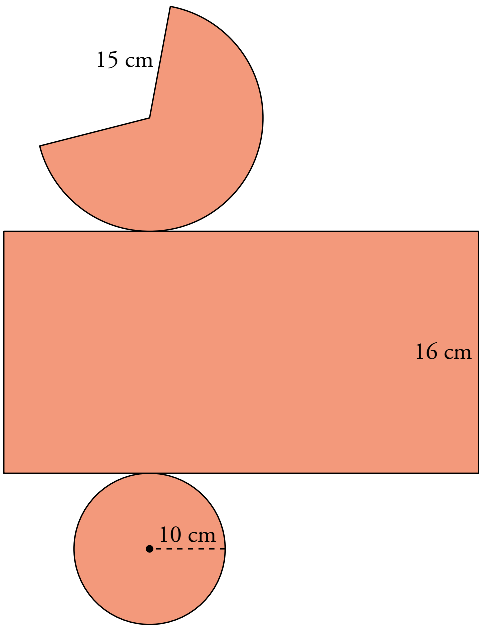


$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (10 + 8 + 6) \cdot 3 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 72 + 2 \cdot 24 = 120 \text{ cm}^2$

d)



$A_{\text{CONO}} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 15 = 150\pi = 471{,}24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi = 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 16 = 320\pi =$
$= 1\,005{,}31 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 471{,}24 + 314{,}16 + 1\,005{,}31 =$
$= 1\,790{,}71 \text{ cm}^2$

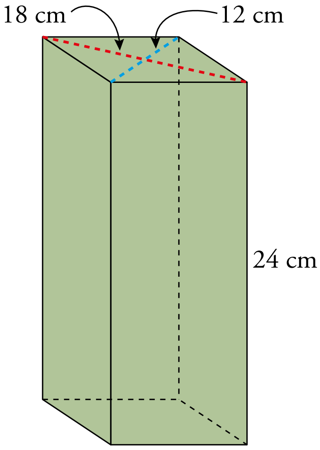
6 **Dibuja estos cuerpos geométricos y calcula su área:**

a) Prisma de altura 24 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Pirámide regular de altura 25 cm y base cuadrada de lado 9 cm.

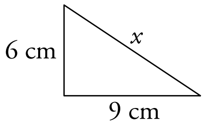
c) Cilindro de altura 17 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

d) Esfera inscrita en un cilindro de altura 1 m.

a) 

$A_{BASE} = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$

Calculamos la arista de la base:

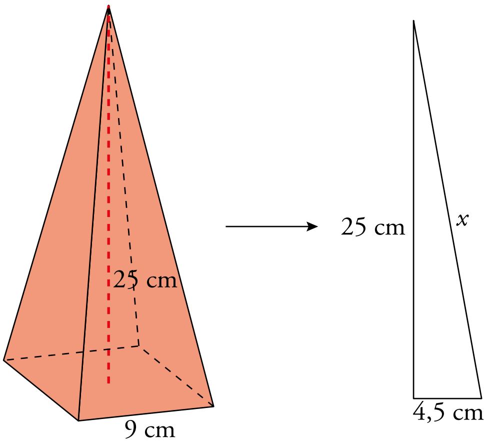


$x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117 \rightarrow$
$\rightarrow x = \sqrt{117} = 10{,}8 \text{ cm}$

$A_{LATERAL}$ = perímetro de la base · altura = $(4 \cdot 10{,}8) \cdot 24 =$
$= 1\,036{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 108 + 1\,036{,}8 = 1\,144{,}8 \text{ cm}^2$

b) Calculamos la altura de una cara:



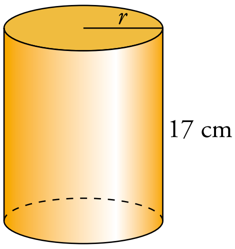
$x^2 = 25^2 + 4{,}5^2 \rightarrow x^2 = 625 + 20{,}25 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 = 645{,}25 \rightarrow$
$\rightarrow x = \sqrt{645{,}25} = 25{,}4 \text{ cm}$

$A_{TRIÁNGULO} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{9 \cdot 25{,}4}{2} = 114{,}3 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = 4 \cdot 114{,}3 = 457{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 81 + 457{,}2 =$
$= 538{,}2 \text{ cm}^2$

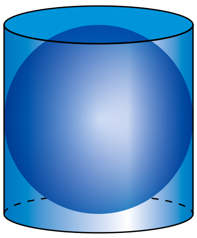
c) 

$44 = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{44}{2\pi} = 7 \text{ cm}$

$A_{LATERAL} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 7 \cdot 17 = 238\pi = 747{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 49\pi = 153{,}9 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2A_{BASE} = 747{,}7 + 2 \cdot 153{,}9 = 1\,055{,}5 \text{ cm}^2$

d) 

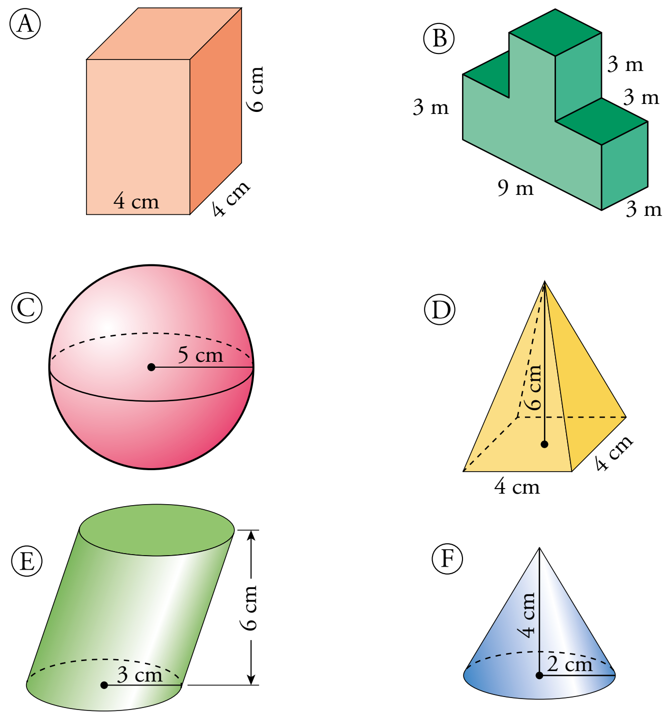
$r = 0{,}5 \text{ m}$

$A_{TOTAL} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi = 3{,}14 \text{ cm}^2$

Página 197

Volúmenes

7 Calcula el volumen de estos cuerpos:



Ⓐ $V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 4^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$

Ⓑ $V_1 = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = (9 \cdot 3) \cdot 3 = 81 \text{ m}^2$

$V_2 = l^3 = 27 \text{ m}^3$

$V = V_1 + V_2 = 81 + 27 = 108 \text{ m}^3$

Ⓒ $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} = 523{,}60 \text{ cm}^3$

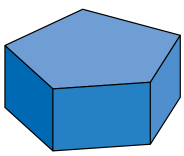
Ⓓ $V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 6}{3} = 32 \text{ cm}^3$

Ⓔ $V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi = 169{,}65 \text{ cm}^3$

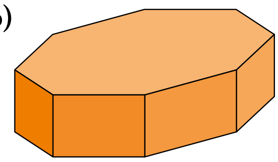
Ⓕ $V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} = \frac{16\pi}{3} = 16{,}76 \text{ cm}^3$

8 Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares. En ambos, arista básica = 10 cm; altura = 8 cm.

a)



b)



La apotema del pentágono regular es $a = 0{,}68 \cdot l$. La apotema del octógono regular es $a = 0{,}2 \cdot l$.

a) $A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{(10 \cdot 5) \cdot (0{,}68 \cdot 10)}{2} = 170 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (10 \cdot 5) \cdot (8) = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 170 + 400 = 740 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 170 \cdot 8 = 1\,360 \text{ cm}^3$

b) $A_{BASE} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \dfrac{(10 \cdot 8) \cdot (1{,}2 \cdot 10)}{2} = 480 \text{ cm}^2$

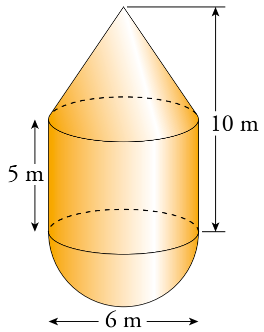
$A_{LATERAL} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (10 \cdot 8) \cdot (8) = 640 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 2 \cdot 480 + 640 = 1\,600 \text{ cm}^2$

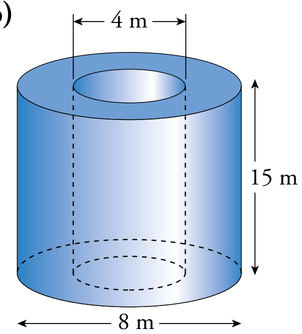
$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 480 \cdot 8 = 3\,840$

9 **Calcula el volumen de estos cuerpos:**

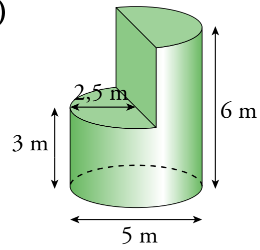
a)



b)



c)



a) Descomponemos el cuerpo en un cono, un cilindro y una semiesfera. Calculamos primero la generatriz del cono, g.

$g = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83 \text{ cm}$

$A = \pi r g + 2\pi r h + \dfrac{4\pi r^2}{2} = \pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + \dfrac{4\pi 3^2}{2} \approx 205{,}74 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 h + \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \dfrac{1}{3}\pi 3^2 5 + \pi 3^2 5 + \dfrac{\frac{4}{3}\pi 3^3}{2} \approx 207{,}35 \text{ cm}^3$

b) Descomponemos el cuerpo en dos cilindros, uno dentro de otro.

$A = 2(\pi R^2 - \pi r^2) + 2\pi R h + 2\pi r h = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi h(R + r) =$

$= 2\pi(4^2 - 2^2) + 2\pi 15(4 + 2) \approx 640{,}88 \text{ cm}^2$

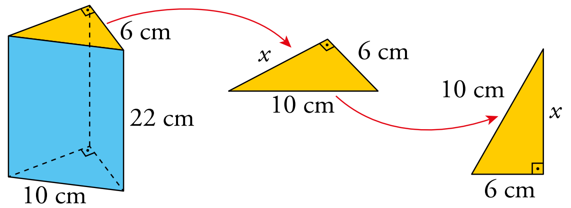
$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = \pi 15(4^2 - 2^2) \approx 565{,}49 \text{ cm}^3$

c) El volumen será $\dfrac{3}{4}$ del volumen de un cilindro recto de radio de la base 2,5 m y de altura de 6 m.

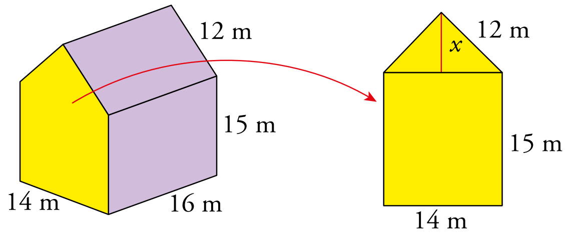
$V = \dfrac{3}{4}(A_{BASE} \cdot \text{altura}) = \dfrac{3}{4}(\pi \cdot r^2 \cdot h) = \dfrac{3}{4}(\pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 6) = 88{,}36 \text{ cm}^3$

10 Observa, utiliza el teorema de Pitágoras para calcular los datos que faltan y calcula el volumen de cada figura:

Ⓐ



Ⓑ



Ⓐ $10^2 = x^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = 8$ cm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \left(\dfrac{6 \cdot 8}{2}\right) \cdot 22 = 528 \text{ cm}^3$

Ⓑ Tomamos como base el pentágono amarillo.

$12^2 = x^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 95 \rightarrow x = 9{,}75$ m

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \left(15 \cdot 14 + \dfrac{14 \cdot 9{,}75}{2}\right) \cdot 16 = (210 + 68{,}25) \cdot 16 = 278{,}25 \cdot 16 = 4452 \text{ m}^3$

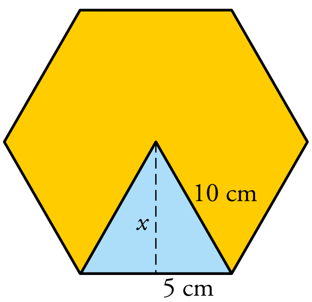
11 Calcula el volumen de:

a) Una pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 17 cm y la arista de la base 10 cm.

b) Un cono recto con 5 cm de radio en la base y 13 cm de generatriz.

c) Cilindro circunscrito a un prisma recto de base cuadrada de lado 10 cm y altura 18 cm.

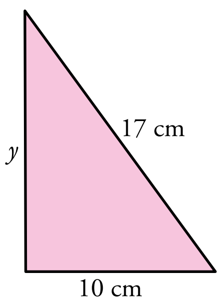
a) • Calculamos la apotema de la base y su área:



$10^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 75 \rightarrow x = 8{,}66$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$

• Calculamos la altura de la pirámide

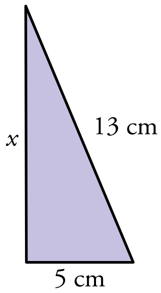


$17^2 = y^2 + 10^2 \rightarrow y^2 = 189 \rightarrow y = 13{,}75$ cm

- Calculamos el volumen de la pirámide:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 259{,}8 \cdot 13{,}75 = 1\,190{,}75\ \text{cm}^3$

b) • Calculamos la altura del cono:



$13^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = 12$ cm

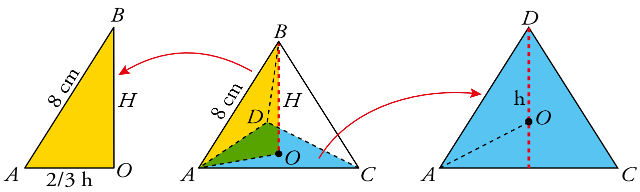
- $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314{,}16\ \text{cm}^3$

c) El radio de la base del cilindro mide 5 cm, y su altura, 18 cm.:

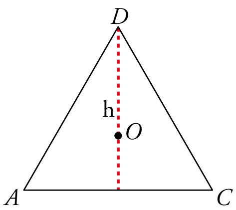
$V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{altura} = \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 1\,413{,}72\ \text{cm}^3$

12 **Halla el área y el volumen de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Para ello:**

- **No confundas la altura de la pirámide, *H*, con la altura, h, del triángulo equilátero sobre el que se apoya (la base).**
- **Para hallar *H*, recuerda que $\overline{AO} = \overline{DO} = 2/3$ h.**



Calculamos lo que mide la altura h:



$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h = 6{,}93$ cm

$A_{BASE} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72\ \text{cm}^2$

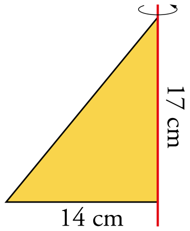
$A_{TOTAL} = 4 \cdot A_{BASE} = 110{,}88\ \text{cm}^2$

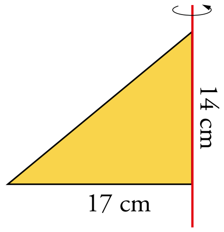
Calculamos lo que mide la altura H del tetraedro:

$$H^2 = 8^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 = 42{,}66 \rightarrow H = 6{,}53 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34\ \text{cm}^3$$

13 **Hacemos girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 14 cm y 17 cm alrededor de cada uno de ellos, obteniendo así dos conos distintos.**

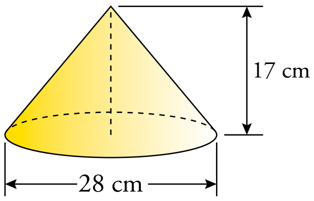




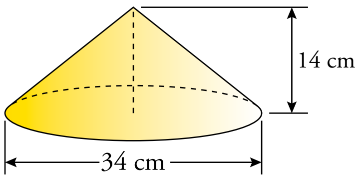
a) ¿Cuál de ellos tiene más volumen?

b) ¿Qué porcentaje de volumen tiene más uno que otro?

a)



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 14^2 \cdot 17 = 3\,489{,}26 \text{ cm}^3$$



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = 4\,236{,}96 \text{ cm}^3$$

El cono que tiene radio 17 cm es el que tiene más volumen.

b) El cono que tiene más volumen tiene aproximadamente un 21 % más de volumen que el otro.

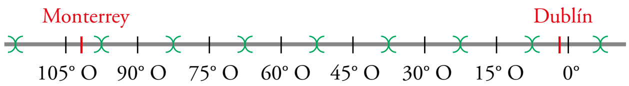
Página 198

Coordenadas geográficas

14 **Si en el huso 0 son las 8 a. m., ¿qué hora le corresponde al tercer huso al este? ¿Y al quinto al oeste?**

- En el uso al este son 3 horas más, las 11 a.m.
- En el quinto al oeste son 5 horas menos, las 3 a.m.

15 **Sabemos que en Dublín (longitud 6° O) son las 9 de la mañana. Utilizando este esquema, indica qué hora teórica le corresponde a Monterrey (100° O).**



En Monterrey son 7 horas menos, las 2 de la mañana.

16 **Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p. m., el vuelo dura 8 h y se siguieran las horas teóricas de sus correspondientes husos, ¿a qué hora local de Nueva York llegaría?**

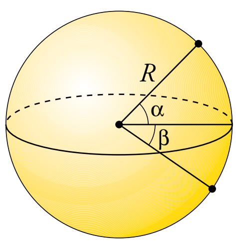
En Nueva York hay 6 horas menos que en Roma. Por tanto, cuando el avión sale de Roma son las 11-6 = 5 p.m. en Nueva York. Si el vuelo dura 8 horas, el avión llega a la 1 a.m., hora de Nueva York, del día siguiente.

17 **Si en La Habana (82° O) son las 8 p. m., asigna la hora teórica (según los husos horarios) a cada ciudad.**

Maputo (Mozambique)	**2 p. m.**
Natal (Brasil)	**3 a. m.**
Astaná (Kazajistán)	**8 p. m.**
Temuco (Chile)	**0 a. m.**
Honolulú (Hawái)	**11 a. m.**
Dakar (Senegal)	**11 p. m.**
Katmandú (Nepal)	**6 a. m.**
Melbourne (Australia)	**7 a. m.**

Maputo (32° E) $\rightarrow$ 3 a.m.	Natal $\rightarrow$ 11 p.m.
Astaná (71° E) $\rightarrow$ 6 a.m.	Temuco (73° O) $\rightarrow$ 8 p.m.
Honolulú (158° O) $\rightarrow$ 2 p.m.	Dakar (16° O) $\rightarrow$ 0 a.m.
Katmandú (85° E) $\rightarrow$ 7 a.m.	Melbourne (144° E) $\rightarrow$ 11 a.m.

18 **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



$\alpha = 37° \, 25'$

$\beta = 22° \, 35'$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $\alpha + \beta = 37° \, 25' + 22° \, 35' = 60°$

$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 60}{360} \approx 6\,670{,}65 \text{ km}$$

19 **La «milla marina» es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1'. Calcula la longitud de una milla marina.**

$1' = \frac{1}{60}$ grados; radio de la Tierra: $R \approx 6\,370$ km

Milla marina $\rightarrow \dfrac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \dfrac{2\pi R}{21\,600} \approx \dfrac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1{,}85$ km

20 **Alejandría, Nueva Orleans y Houston tienen todas la misma latitud, 30° N. Sus longitudes son, respectivamente, 30° E, 90° O y 95° O. ¿Qué distancia recorrería un avión que va de Alejandría a Nueva Orleans por el paralelo 30° N? ¿Y de Alejandría a Houston?**

Utilizando el ejercicio resuelto de la página 195, sabemos que el paralelo 30° tiene una longitud de 34 646 km aproximadamente.

Entre Alejandría y Nueva Orleans hay un arco de 90° – 30° = 60°; por tanto, la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 60° \approx 5\,724{,}33$ km.

Entre Alejandría y Houston hay un arco de 95° – 30° = 65°, por lo que la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 65° \approx 6\,201{,}36$ km.

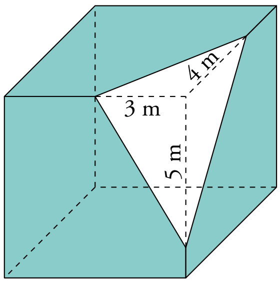
Resuelve problemas

21 **Observa que al seccionar un cubo como indica la figura, se obtiene de la esquina cortada una pirámide triangular.**

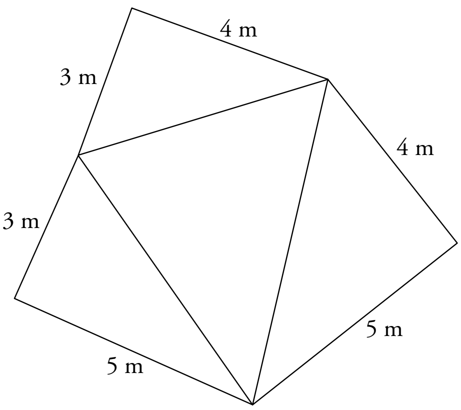
a) Dibuja el desarrollo de dicha pirámide.

b) Calcula su superficie lateral considerando la sección como base.

c) Calcula su volumen (apóyala sobre uno de los triángulos rectángulos).



a)



b) $A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{3 \cdot 5}{2} + \dfrac{3 \cdot 4}{2} + \dfrac{4 \cdot 5}{2} = \dfrac{47}{2} = 23{,}5 \text{ cm}^2$

c) $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20 \text{ cm}^3$

22 **Un dependiente envuelve una caja de zapatos de 30 cm de larga, 18 cm de ancha y 10 cm de alta con un trozo de papel, de forma que un 15 % del envoltorio queda solapado sobre sí mismo. ¿Qué cantidad de papel ha utilizado?**

Calculamos el área total de la caja de zapatos:

$A_{BASE} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL}$ = perímetro de la base · altura = $(2 \cdot 30 + 2 \cdot 18) \cdot 10 = 960 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 2 \cdot A_{BASE} + A_{LATERAL} = 2 \cdot 540 + 960 = 2\,040 \text{ cm}^2$

Habrá utilizado un 15 % más de la superficie de la caja $\rightarrow$ $2\,040 \cdot 1{,}15 = 2\,346 \text{ cm}^2$

Ha utilizado $2\,346 \text{ cm}^2$ de papel para envolverlo.

23 **Una empresa de carburantes tiene cuatro tanques esféricos de 20 m de diámetro y seis tanques cilíndricos de 20 m de altura y 10 m de radio en la base.**

Para evitar la corrosión, se contrata a un equipo de operarios que cobra, por pintar los depósitos, 12 €/m². Calcula el coste total de la operación.

$A_{ESFERA} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi = 1\,256{,}6 \text{ m}^2$

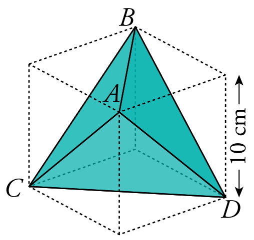
$A_{CILINDRO} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 + 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ m}^2$

$A_{TOTAL} = 4 \cdot 1\,256{,}6 + 6 \cdot 1\,884{,}96 = 16\,336{,}16 \text{ m}^2$

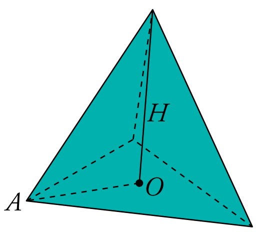
Coste = $12 \cdot 16\,336{,}16 = 196\,033{,}92$ €

El coste total de la operación es de 196 033,92 €.

24 **Este es el mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista. Halla su superficie y su volumen.**



Calculamos el lado del tetraedro:



$l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \rightarrow l = 14{,}14$ cm

Recordamos que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$. Por tanto, tenemos que hallar la altura del triángulo.

$h^2 = 14{,}14^2 - 7{,}07^2 \rightarrow h = 12{,}24$ cm

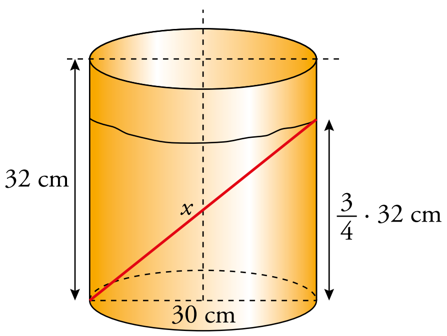
$H^2 = 14{,}14^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 12{,}24\right)^2 = 133{,}29 \rightarrow H = 11{,}54$ cm

$A_{BASE} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14{,}14 \cdot 12{,}24 = 86{,}54 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 4 \cdot 86{,}54 = 346{,}15 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 86{,}54 \cdot 11{,}54 = 332{,}89 \text{ cm}^3$

25 **Un bidón de pintura de forma cilíndrica, de 32 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base, está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que se habrá sumergido totalmente en la pintura?**



La altura de la pintura es $\frac{3}{4} \cdot 32 = 24$ cm

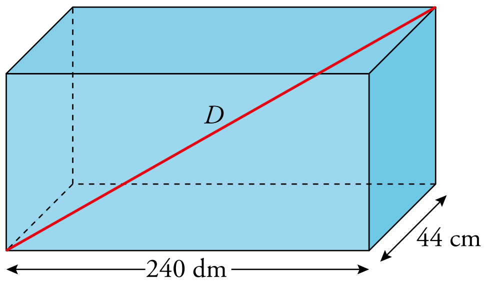
$x^2 = 24^2 + 30^2 = 576 + 900 = 1\,476 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{1\,476} = 38{,}4$ cm

40 cm > 38,4 cm

Solución: No, no se sumergirá del todo. Un pico de 0,6 cm se quedará asomando.

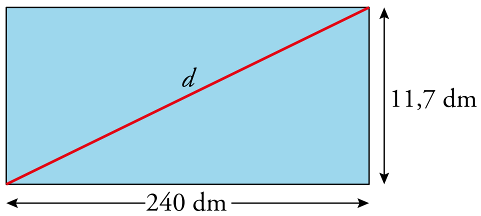
26 **La base de un ortoedro mide 240 cm × 44 cm. Su volumen es 1 235,52 dm³. Calcula las diagonales de sus caras y la diagonal principal.**



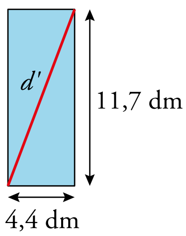
240 cm = 24 dm

44 cm = 4,4 dm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h \rightarrow 1\,235{,}52 = 24 \cdot 4{,}4 \cdot h \rightarrow h = 11{,}7$ dm



$d^2 = 11{,}7^2 + 24^2 \rightarrow d = 26{,}7$ dm



$d'^2 = 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow d' = 12{,}5$ dm

$D = 24^2 + 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow D = 27{,}06$ dm

27 **Se introduce una bola de piedra de 12 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 12 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

a) $V_{\text{BOLA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi = 904{,}78 \text{ cm}^3$

Se han derramado 904,78 cm³ de agua.

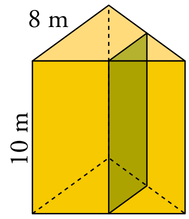
b) Llamamos h a la altura que alcanza el agua.

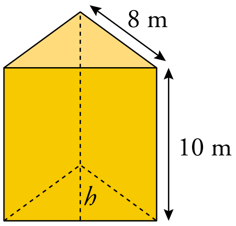
$904{,}78 = 12 \cdot 12 \cdot h \rightarrow 904{,}78 = 144h \rightarrow h = \frac{904{,}78}{144} = 6{,}28$ cm

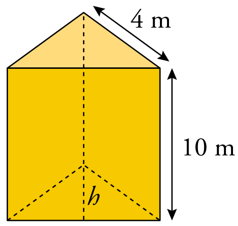
El algua alcanzará una altura de 6,28 cm.

Página 199

28 Cortamos un prisma triangular regular por un plano perpendicular a las bases y que pasa por el punto medio de dos aristas. Calcula el volumen de los dos prismas que se obtienen.







$h^2 = 8^2 - 4^2 \to h = 6{,}93$ m

$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}71 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 27{,}71 \cdot 10 = 277{,}1 \text{ m}^3$

$h^2 = 4^2 - 2^2 \to h = 3{,}46$ m

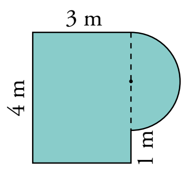
$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 6{,}93 \text{ m}^2$

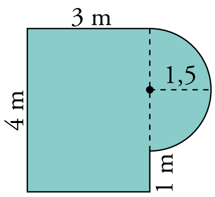
$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 6{,}93 \cdot 10 = 69{,}3 \text{ m}^3$

Por tanto, el volumen del prisma cuadrangular que se forma es $277{,}1 - 69{,}3 = 207{,}8$ m^3, y el del prisma triangular, $69{,}3$ m^3.

29 Calcula el volumen de una habitación de 2,30 m de altura, cuya planta tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura.

Halla, también, la superficie de las paredes.





$A_{BASE} = a \cdot b + \pi r^2 = 3 \cdot 4 + \pi \cdot 1{,}5^2 = 19{,}07 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 19{,}07 \cdot 2{,}30 = 43{,}861 \text{ m}^3$

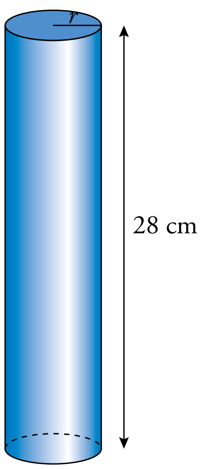
Calculamos la superficie de las paredes:

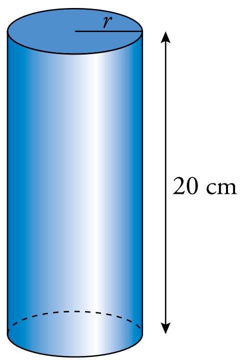
Perímetro $= 4 + 2 \cdot 3 + 1 + 1{,}5\pi = 15{,}71$

$A = \text{Perímetro} \cdot \text{altura} = 15{,}71 \cdot 2{,}30 = 36{,}13 \text{ m}^2$

El volumen es $43{,}861$ m^3 y la superficie de las paredes $36{,}13$ m^2.

30 Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?





$L = 2\pi r \to r = \dfrac{20}{2\pi} = 3{,}18$

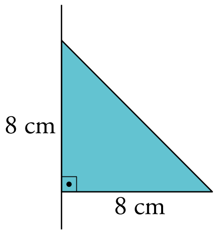
$V = \pi r^2 h = 891{,}27 \text{ cm}^3$

$L = 2\pi r \to r = \dfrac{28}{2\pi} = 4{,}46$

$V = \pi r^2 h = 1\,247{,}8 \text{ cm}^3$

Conseguimos mayor volumen si soldamos por el lado de 20 cm.

31 **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, se hace girar alrededor de la hipotenusa. Halla el volumen del cuerpo que se forma.**



Se forma un cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 536,16$$

32 **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm^2. Halla el área total y el volumen del cono.**

Necesitamos saber la generatriz del cono y el radio de la base.

El arco de circunferencia correspondiente a 120° corresponderá con el perímetro de la circunferencia de la base.

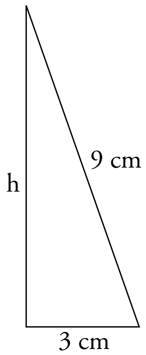
$$\frac{2\pi g 120°}{360°} = 2\pi r \;\rightarrow\; \frac{2}{3}\pi g = 2\pi r \;\rightarrow\; g = 3r$$

El área de la superficie lateral de un cono es $A_{\text{LATERAL}} = \pi r g$

$84,78 = \pi r g$

Así, hemos encontrado dos ecuaciones para las dos incógnitas que queremos saber:

$$\begin{cases} g = 3r \\ 84,78 = \pi r g \end{cases} \rightarrow 84,78 = \pi \cdot r \cdot 3r \rightarrow 84,78 = 3\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{84,78}{3\pi} \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3 \text{ cm}$$



$g = 3 \cdot 3 = 9$ cm

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi = 28,27$ cm^2

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 28,27 + 84,78 = 113,14$ cm^2

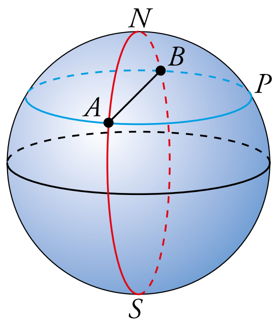
Para el volumen necesitamos la altura del cono:

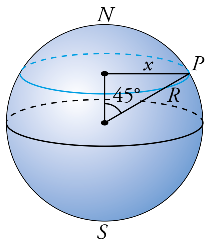
$9^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h^2 = 81 - 9 \rightarrow h^2 = 72 \rightarrow h = \sqrt{72} = 8,5$ cm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 28,27 \cdot 8,5 = 240,3$ cm^3

El área mide 113,14 cm^2 y el volumen, 240,3 cm^3.

33 **Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (APB) o siguiendo la ruta polar (ANB). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto.**



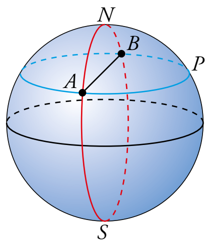


Hallamos el radio paralelo a 45°

$$R^2 = x^2 + x^2 \to x^2 = \frac{R^2}{2} \to x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504,27$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{APB}} = \frac{2\pi \cdot 4\,504,27}{2} = 14\,143,41 \text{ km}$$



Para ir de A a B por ANB abarca un ángulo de 45° + 45° = 90° sobre el meridiano.

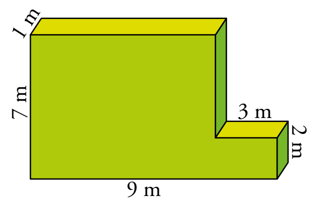
Por tanto:

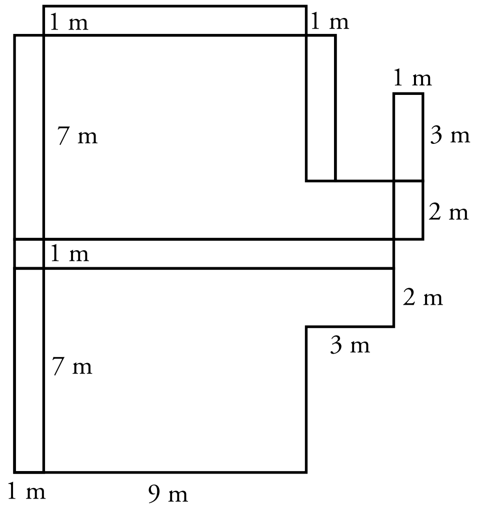
$$L_{\text{ANB}} = \frac{2\pi \cdot R \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi\, 6\,370}{2} \approx 10\,000,9 \text{ km}$$

AUTOEVALUACIÓN

Página 199

1 **Dibuja a mano alzada el desarrollo plano de este prisma. Después halla su superficie y su volumen:**





- Tomamos como base uno de los hexágonos:

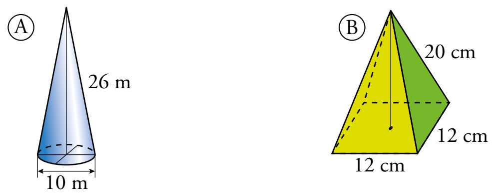
  $A_{BASE} = 7 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 42 + 6 = 48 \text{ m}^2$

  $A_{LATERAL} = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 9 = 32 \text{ m}^2$

  $A_{TOTAL} = 2 \cdot A_{BASE} + A_{LATERAL} = 2 \cdot 48 + 32 = 128 \text{ m}^2$

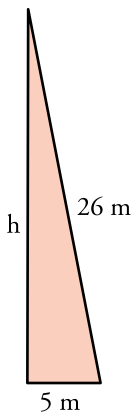
- $V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 48 \cdot 1 = 48 \text{ m}^3$

2 **Calcula el área y el volumen de estos cuerpos:**



a) $r = 5$ m; $g = 26$ m.

Calculamos la altura del cono:



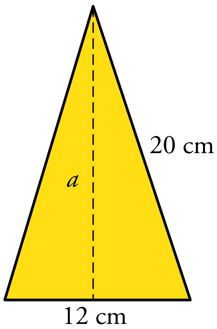
$26^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 651$

$h = 25{,}51$ m

$A = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 5 \cdot 26 + \pi \cdot 5^2 = 486{,}95 \text{ m}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 25{,}51 = 667{,}85 \text{ cm}^3$

b) • Calculamos la altura de una de las caras laterales:



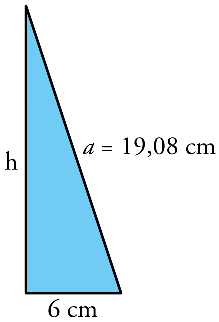
$20^2 = a^2 + 6^2 \;\rightarrow\; a^2 = 364 \;\rightarrow\; a = 19{,}08$ cm

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{\text{Perímetro de base} \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 19{,}08}{2} = 457{,}92 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{BASE}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 144 + 457{,}92 = 601{,}92 \text{ cm}^2$

• Calculamos la altura de la pirámide:



$a^2 = h^2 + 6^2 \;\rightarrow\; 364 = h^2 + 36 \;\rightarrow\; h^2 = 328 \;\rightarrow\; h = 18{,}11$ cm

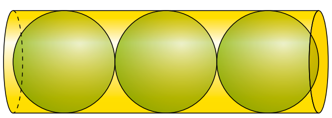
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 18{,}11 = 869{,}28 \text{ cm}^3$$

3 **Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**

$$\frac{360}{40\,000} = \frac{10}{x} \;\rightarrow\; x \approx 1\,111$$

La distancia entre las ciudades es, aproximadamente, de 1 111 km.

4 **Tres pelotas de tenis se introducen en un tubo cilíndrico de 6,6 cm de diámetro en el que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**



La altura del cilindro es la suma de los 3 diámetros de las pelotas de tenis:

$h = 3 \cdot 6{,}6 = 19{,}8$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 = 677{,}4 \text{ cm}^3$

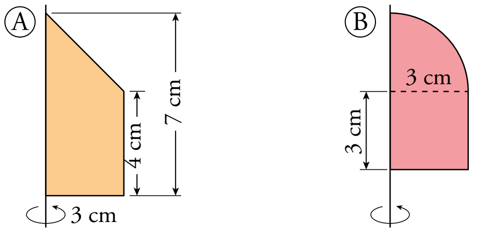
$$V_{\text{PELOTA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3 = 150{,}5 \text{ cm}^3$$

El volumen de las 3 pelotas es $3 \cdot 150{,}5 = 451{,}6 \text{ cm}^3$

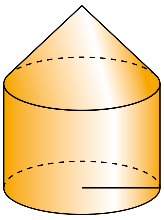
Por tanto, el volumen de la parte vacía es:

$V = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$

5 **Calcula el área total y el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**



Calculamos la generatriz:



$$g^2 = 3^2 + 3^2 \rightarrow g^2 = 18 \rightarrow g = \sqrt{18} \rightarrow g = 4{,}24 \text{ cm}$$

$$A_{\text{CONO}} = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 4{,}24 = 68{,}23 \text{ cm}^2$$

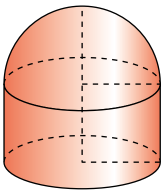
$$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 131{,}95 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 68{,}23 + 131{,}95 = 200{,}18 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = 9\pi = 28{,}27 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TOTAL}} = 28{,}27 + 113{,}1 = 141{,}37 \text{ cm}^3$$



$$A_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^2}{2} + \pi \cdot 3^2 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 3 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 84{,}82 + 113{,}1 = 197{,}92 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = 6\pi = 18{,}85 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TOTAL}} = 18{,}85 + 84{,}82 = 103{,}67 \text{ cm}^3$$