13 MOVIMIENTOS EN EL PLANO. FRISOS Y MOSAICOS

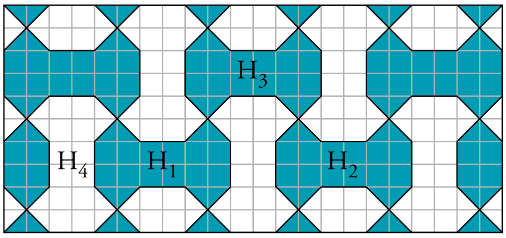
2 TRASLACIONES

Página 202

1 **El mosaico de la derecha se llama «multihueso». H_1, H_2, H_3 y H_4 son «huesos». Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.**

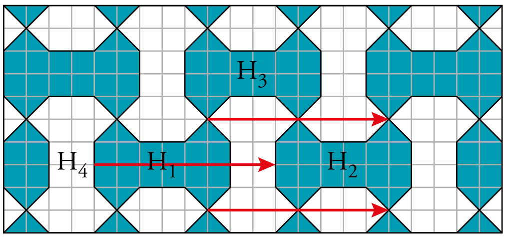
a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2? ¿Y el que transforma H_2 en H_3? ¿Y el que transforma H_3 en H_1?

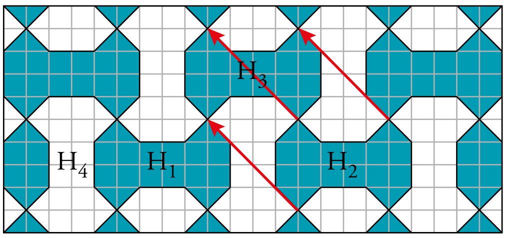


a) Son traslaciones H_1, H_2 y H_3.

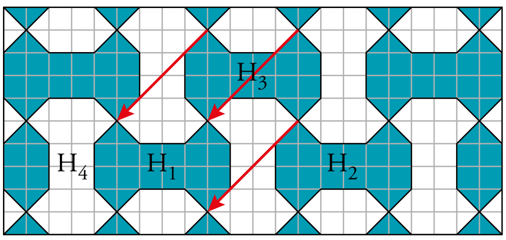
b) El vector que transforma H_1 en H_2 es (8, 0).



El vector que transforma H_2 en H_3 es (–4, 4).

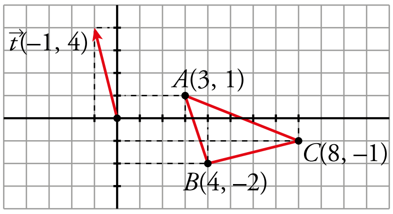


El vector que transforma H_3 en H_1 es (–4, –4).



Página 203

2 a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, –2)$ y $C(8, –1)$ según el vector $\vec{t}(–1, 4)$.

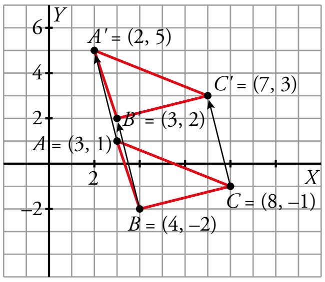


Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

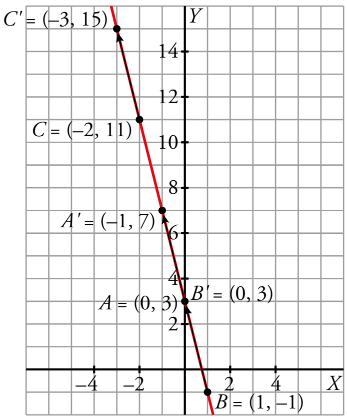
b) Comprueba que la recta $r: y = 3 – 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

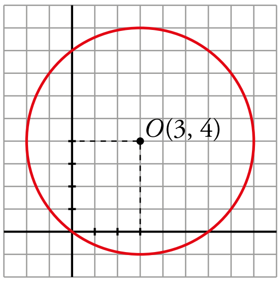
a) Los dos triángulos son iguales.



b)



3 **Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia *C* de centro *O*(3, 4) y radio 5.**

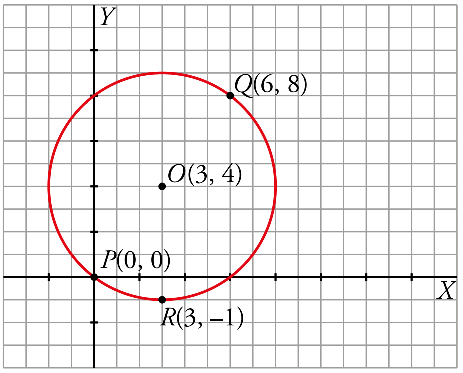


a) Comprueba que *C* pasa por *P*(0, 0), *Q*(6, 8) y *R*(3, –1).

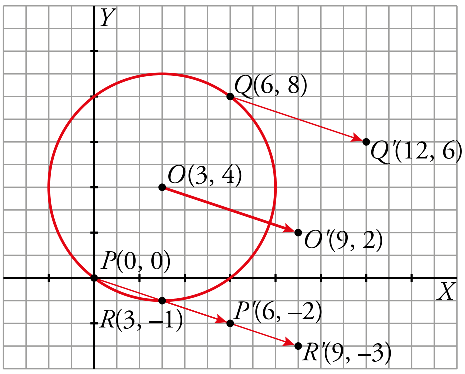
b) Traslada los puntos *O*, *P*, *Q* y *R* mediante la traslación T de vector $\vec{t}$ (6, –2).

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es *O'* = T(*O*) y radio 5 pasa por *P'*, *Q'* y *R'*.

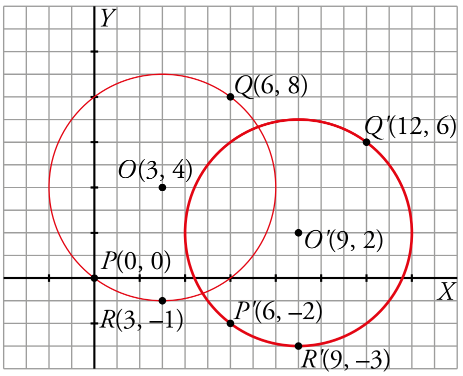
a) La circunferencia pasa por *P*, *Q* y *R*.



b) Los puntos trasladados son *P'*, *Q'* y *R'*.



c) Al trasladar *O*, encontramos el centro *O'* (9, 2). La circunferencia pasa por los trasladados de *P*, *Q* y *R*.



3 ▶ GIROS. FIGURAS CON CENTRO DE GIRO

Página 205

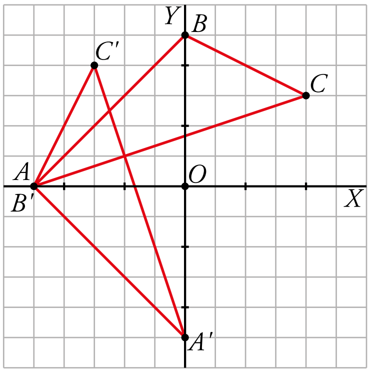
1 **Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro G de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.**

a) Transforma mediante G los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

a)



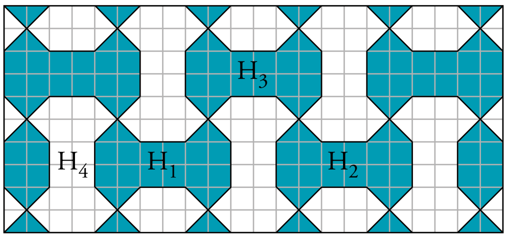
b) Se transforma en otra recta perpendicular a la primera.

c) La circunferencia se transforma en ella misma.

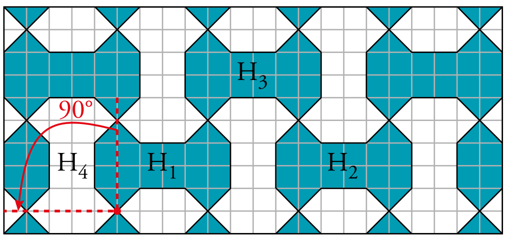
2 **Recuerda el mosaico «multihueso» que ya hemos visto en un ejercicio anterior.**

a) Describe un giro que transforme H_1 en H_4.

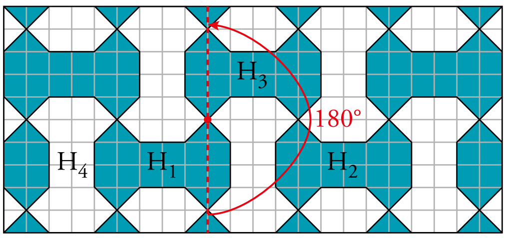
b) Describe un giro que transforme H_1 en H_3.



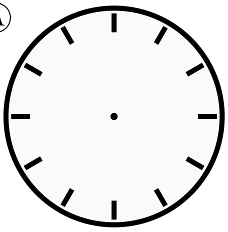
a) Es un giro de 90° con centro el punto marcado:



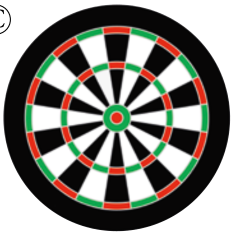
b) Es un giro de 180° y de centro el punto marcado:

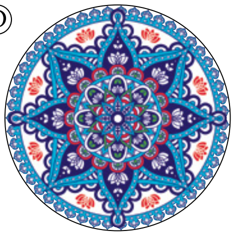


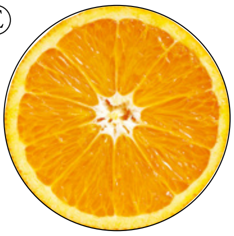
3 **Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.**

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓔ


Ⓕ


Todas las figuras tienen centro de giro O porque al girarlas alrededor de O coinciden consigo mismas n/veces, contando con la posición inicial.

A Tiene orden $n = 12 \rightarrow 360°: 12 = 30°$.

B Tiene orden infinito Cualquier giro la hace coincidir consigo misma.

C Tiene orden $n = 10 \rightarrow 360°: 10 = 36°$.

D Tiene orden $n = 8 \rightarrow 360°: 8 = 45°$.

E Tiene orden $n = 10 \rightarrow 360°: 10 = 36°$.

F Tiene orden $n = 30 \rightarrow 360°: 30 = 12°$.

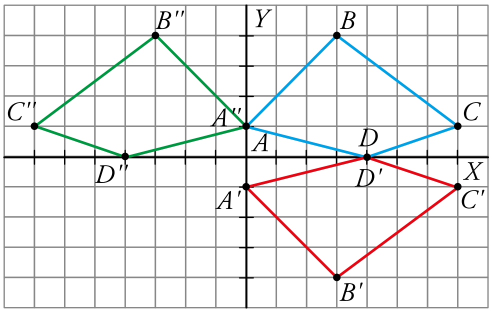
4 SIMETRÍAS AXIALES. FIGURAS CON EJES DE SIMETRÍA

Página 206

1 **Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y traza sobre ellos el cuadrilátero *F* cuyos vértices son, respectivamente, *A*(0, 1), *B*(3, 4), *C*(7, 1) y *D*(4, 0).**

a) Dibuja el cuadrilátero transformado de *F* mediante la simetría de eje *X*. ¿Qué coordenadas tienen sus vértices?

b) Dibuja el transformado de *F* mediante la simetría de eje *Y*. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?



a) ***A'***(0, –1); ***B'***(3, –4); *C'*(7, –1); *D'*(4, 0).

b) *A''*(0, 1); *B''*(–3, 4); *C''*(–7, 1); *D''*(–4, 0).

2 **Consideramos la simetría S de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante S de:**

a) Los puntos *A*(3, 1), *B*(4, 0), *C*(0, 4), *D*(5, 5).

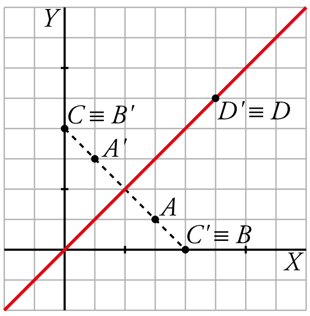
b) El eje *X*.

c) El eje *Y*.

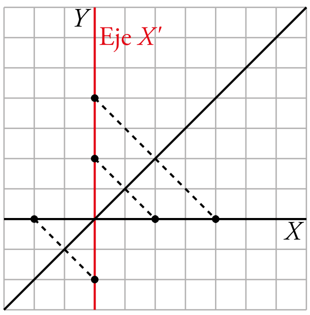
d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

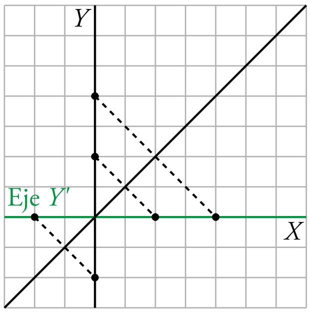
a)



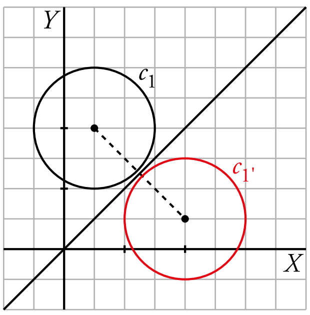
b)



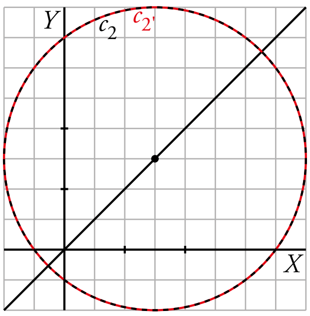
c)



d)

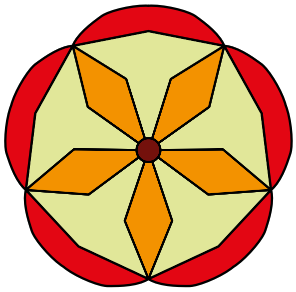


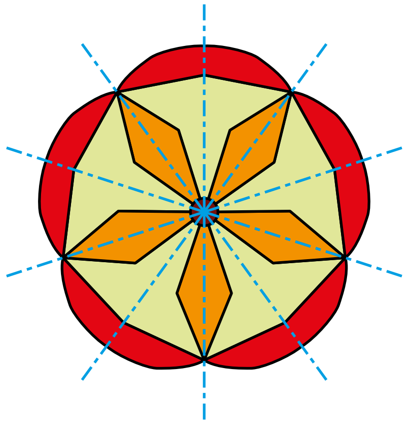
e)



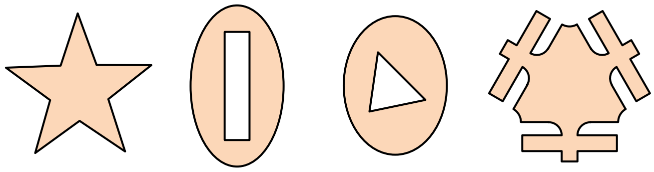
Página 207

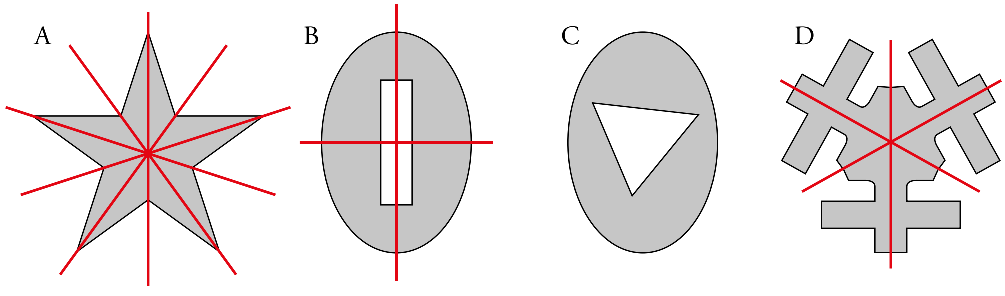
3 **Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría:**





4 **Encuentra los ejes de simetría de las siguientes figuras:**





No tiene

5 **Dibuja en tu cuaderno una figura con n ejes de simetría que no sea un polígono regular, donde:**

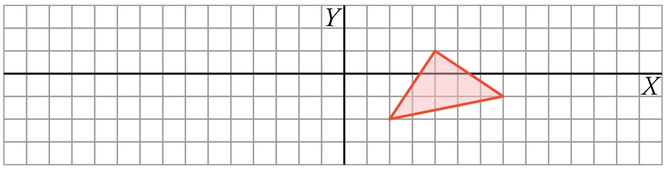
a) $n = 3$ **b)** $n = 4$ **c)** $n = 1$ **d)** $n = 0$

Respuesta abierta.

5 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

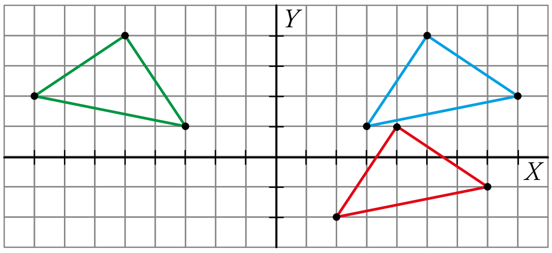
Página 208

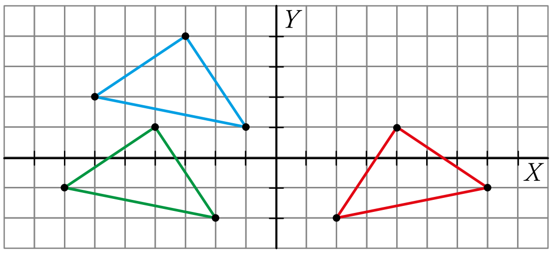
1 **Copia en tu cuaderno este dibujo:**



a) Traslada la figura mediante el vector $\vec{u}(1, 3)$ y aplica al resultado una simetría de eje *Y*.

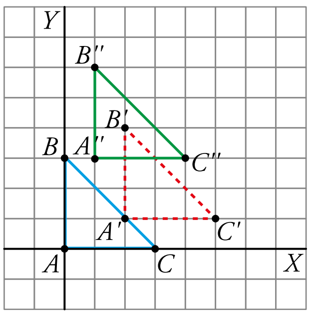
b) Realiza la composición contraria al apartado anterior: primero la simetría y después la traslación. ¿Obtienes el mismo resultado?

a)


b)


No se obtiene el mismo resultado que en a).

2 **Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo Δ de vértices $A(0, 0)$, $B(0, 3)$ y $C(3, 0)$. Realiza sobre él una traslación T_1 de vector $\vec{u}(2, 1)$ y luego otra T_2 de vector $\vec{v}(–1, 2)$. ¿Podrías haber realizado solo una traslación? ¿Cuál sería su vector?**



Se podía haber realizado una sola traslación de vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (–1, 2) = (1, 3)$

Página 209

3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes $x = 0$ (el eje Y) y $x = 6$, respectivamente.**

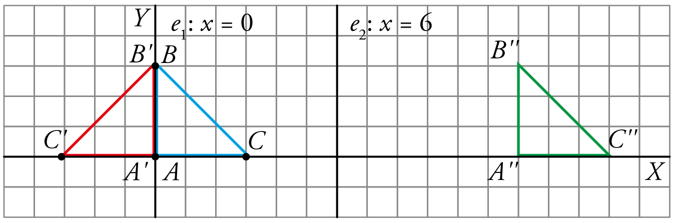
a) Transforma el triángulo Δ del ejercicio 2 de la página anterior mediante:

$$S_1 \text{ compuesta con } S_2$$

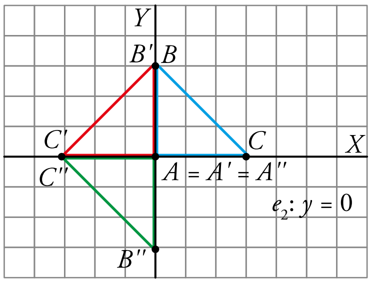
b) Transforma Δ mediante:

$$S_1 \text{ compuesta con la simetría de eje } X$$

a) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(–3, 0)$.
$A''(12, 0)$; $B''(12, 3)$; $C''(15, 0)$.



b) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(–3, 0)$.
$A''(0, 0)$; $B''(0, –3)$; $C''(–3, 0)$.



4 **Dibuja en unos ejes coordenados un cuadrilátero de vértices $A(1, 3)$, $B(6, 5)$, $C(7, –1)$ y $D(–1, –2)$.**

a) Halla las coordenadas del cuadrilátero transformado mediante la composición de dos simetrías de ejes X e Y.

b) La composición de las dos simetrías corresponde a un giro cuyo centro es el origen de coordenadas. ¿Cuál es el ángulo de giro?

a) $A(1, 3) \rightarrow A'(–1, 3) \rightarrow A''(–1, –3)$
$B(6, 5) \rightarrow B'(–6, 5) \rightarrow B''(–6, –5)$
$C(7, –1) \rightarrow C'(–7, –1) \rightarrow C''(–7, 1)$
$D(–1, –2) \rightarrow D'(1, –2) \rightarrow D''(1, 2)$

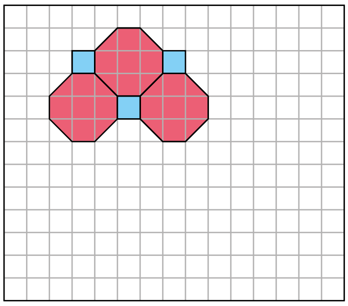
b) El ángulo de giro es 180°.

6 MOSAICOS, CENEFAS Y ROSETONES

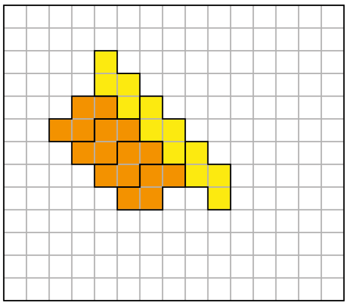
Página 210

1 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:**

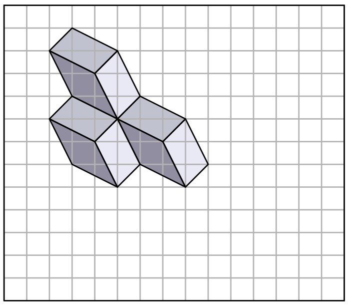
a)



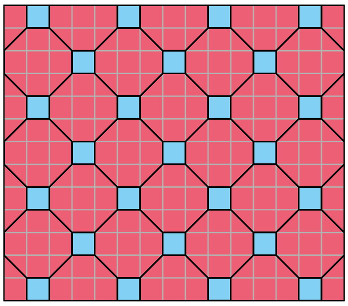
b)



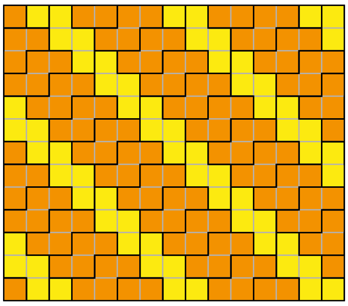
c)



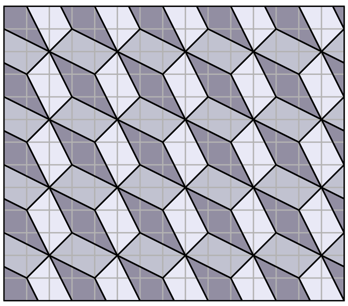
a)



b)



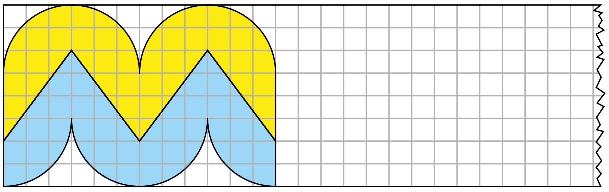
c)



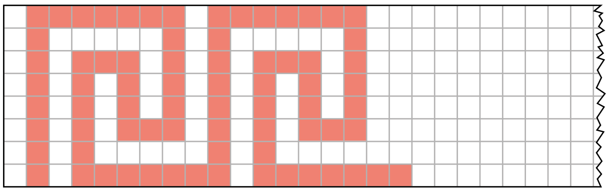
Página 211

2 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?**

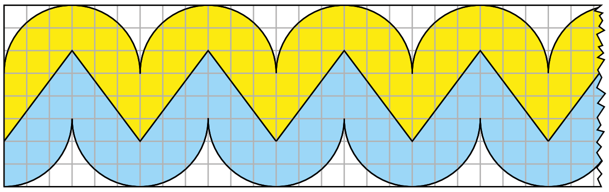
A



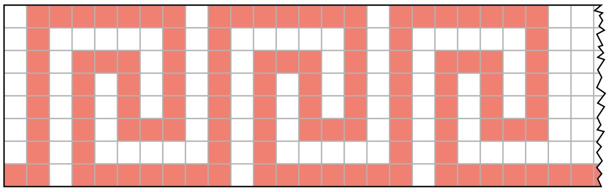
B



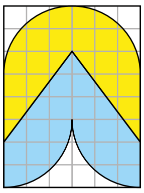
A



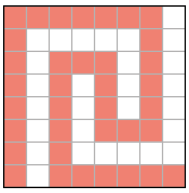
B



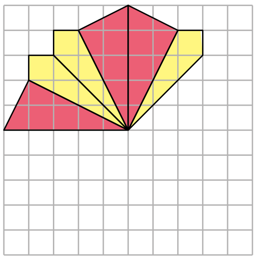
A Motivo mínimo:

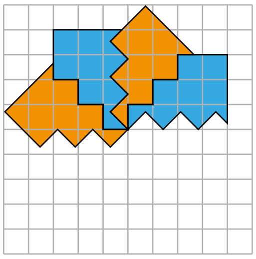


B Motivo mínimo:



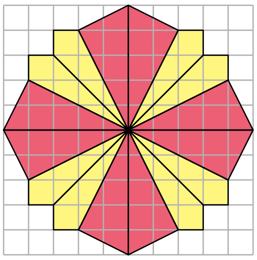
3 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes rosetones. Después, contesta a las preguntas:**

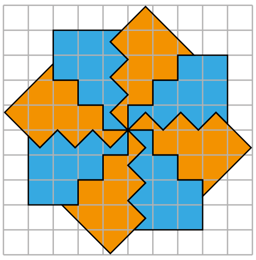
A


B


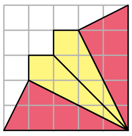
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?

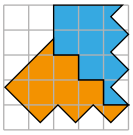
A


B


A. Este rosetón es de orden 4. El motivo mínimo es el siguiente:



B. Este rosetón es de orden 8. El motivo mínimo es el siguiente:



Página 212

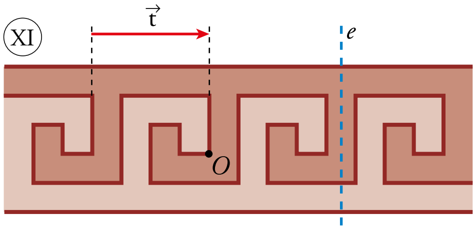
Hazlo tú

- **Encuentra movimientos que dejen invariante la cenefa XI de la página anterior.**

  a) Con color. **b) Sin color.**

  a) Dejan invariante la cenefa, respetando los colores, la traslación de vector $\vec{t}$ y la simetría de eje e.

  b) Si no tenemos en cuenta el color, también deja invariante la cenefa el giro de centro O y ángulo 180°.



Hazlo tú

- **¿Qué movimientos dejan invariante el rosetón XIII de la página anterior?**

Llamamos O al centro del rosetón.

El giro asociado al rosetón es de centro O y $\alpha = 360°: 16 = 22{,}5°$.

Otros giros de centro O y ángulos 2α, 3α, … 15α también dejan invariante la figura. Es decir, O es un centro de orden 16.

Además, tiene 16 ejes de simetría que pasan por O.

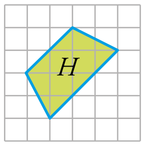
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 213

Practica

Traslaciones

1 **a) Representa en papel cuadriculado la figura *H* y trasládala mediante el vector $\vec{t_1}(6, 1)$. Llamamos H_1 a la figura resultante.**

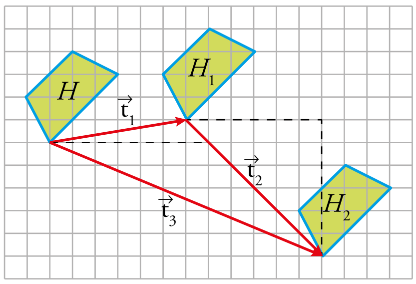


b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t_2}(3, -4)$.

c) Indica el vector de traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para obtener H?

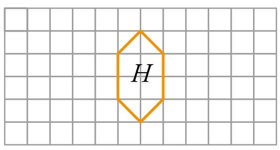
a) y b)



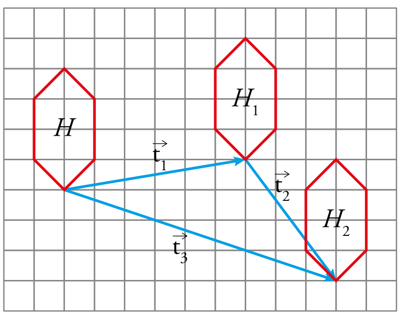
c) El vector es $\vec{t_3} = (6, 1) + (3, -4) = (9, -3)$, respresentado en la imagen.

d) Es el vector $-\vec{t_3} = (-9, 3)$.

2 **Responde a los apartados de la actividad anterior con esta otra figura:**



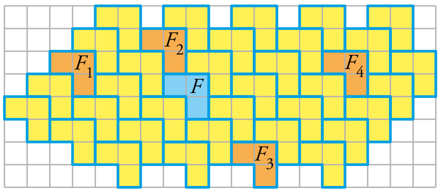
a) y b)



c) El vector es $\vec{t_3} = (9, -3)$.

d) El vector $-\vec{t_3} = (-9, 3)$.

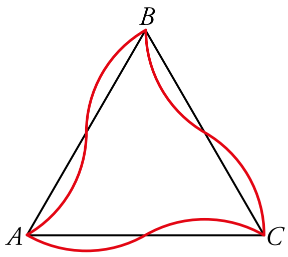
3 **Halla los vectores $\vec{t_1}$, $\vec{t_2}$, $\vec{t_3}$ y $\vec{t_4}$ que nos permiten transformar *F* en cada una de las otras figuras.**

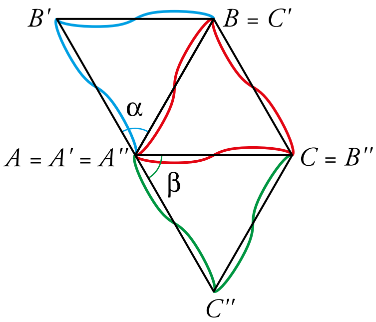


$\vec{t_1} = (-5, 1)$; $\vec{t_2} = (-1, 2)$; $\vec{t_3} = (3, -3)$; $\vec{t_4} = (7, 1)$

Giros

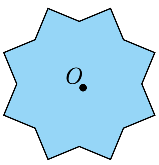
4 **Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro *A* y ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.**



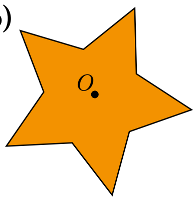


5 **Indica el menor ángulo que se debe girar alrededor de *O* cada una de estas figuras para mantenerse idénticas y halla el orden del centro de giro de *O*.**

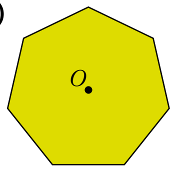
a)



b)



c)



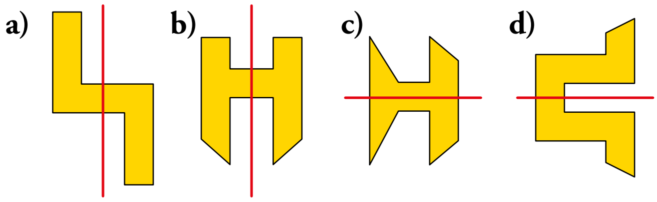
a) El menor ángulo es 45°. El centro es de orden 8.

b) El menor ángulo es 72°. El centro es de orden 5.

c) El menor ángulo es de, aproximadamente, 51,43°. El centro es de orden 7.

Simetrías

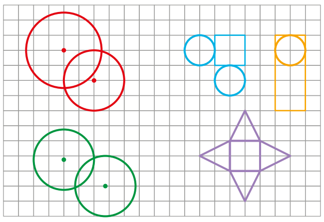
6 **Indica si se trata o no de un eje de simetría:**

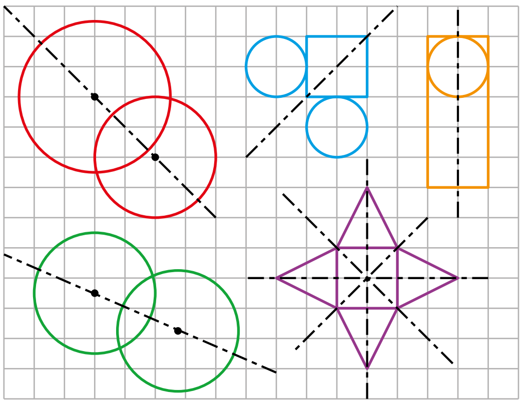


Son ejes de simetría los de las figuras b), c) y d).

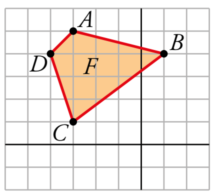
En a) no hay eje de simetría.

7 **Copia en tu cuaderno y señala los ejes de simetría de estas figuras. ¿Cuáles tienen simetría central? Señala su centro.**





8 **Calcula las coordenadas de los vértices de la figura F transformada mediante:**



a) La simetría de eje X.

b) La simetría de eje Y.

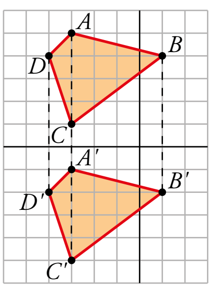
c) La simetría central que tiene por centro el origen de coordenadas.

d) La simetría de eje la recta que pasa por C y B.

e) La simetría central que tiene por centro el vértice B.

f) ¿Qué puntos o segmentos son invariantes con respecto a las simetrías de los apartados d) y e)?

a)

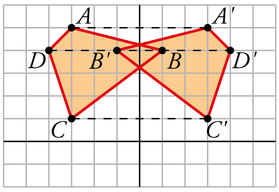


$A' = (-3, -5)$

$B' = (1, -4)$

$C' = (-3, -1)$

$D' = (-4, -4)$

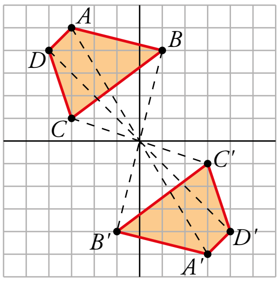
b) 

$A' = (3, 5)$

$B' = (-1, 4)$

$C' = (3, 1)$

$D' = (4, 4)$

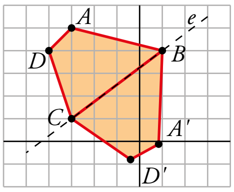
c) 

$A' = (3, -5)$

$B' = (-1, -4)$

$C' = (3, -1)$

$D' = (4, -4)$

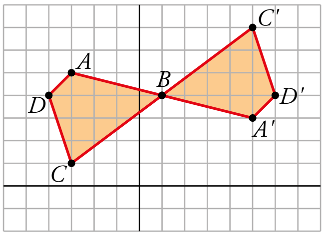
d) 

$A' = (0{,}84; -0{,}12)$

$B' = B = (1, 4)$

$C' = C = (-3, 1)$

$D' = (-0{,}4; -0{,}8)$

e) 

$A' = (5, 3)$

$B' = B = (1, 4)$

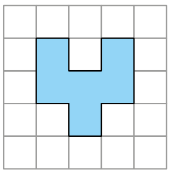
$C' = (5, 7)$

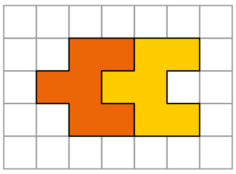
$D' = (6, 4)$

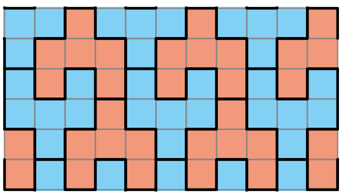
f) Con respecto a la simetría del apartado d), el segmento *BC* es invariante, y con respecto a la del apartado e), es invariante el punto *B*.

Mosaicos, frisos y rosetones

9 **Completa en tu cuaderno el siguiente mosaico a partir de la pieza azul. Busca una forma de engranarla distinta de la de la derecha.**

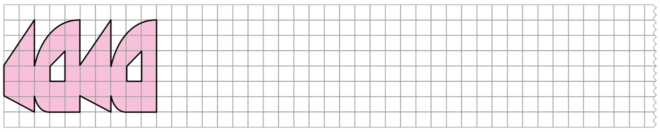




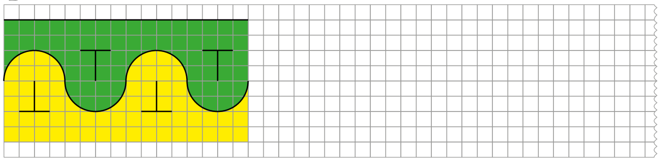


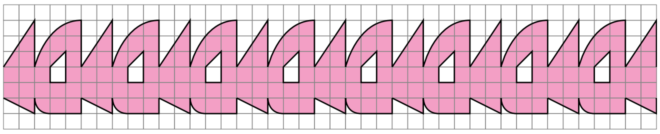
10 **Completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?**

A



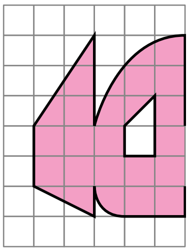
B

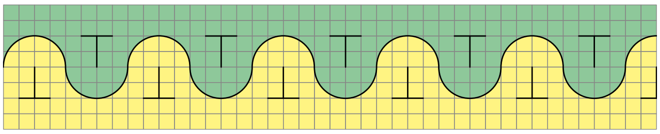




Motivo mínimo

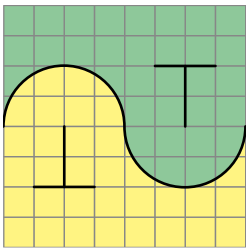
A





Motivo mínimo

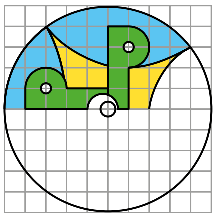
B



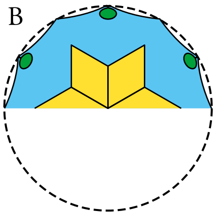
Página 214

11 **Completa en tu cuaderno estos rosetones:**

A

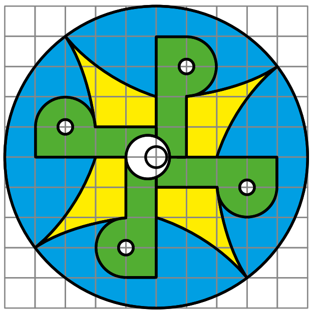


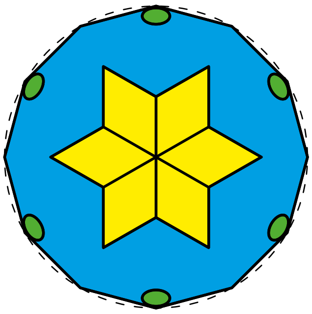
B



a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?

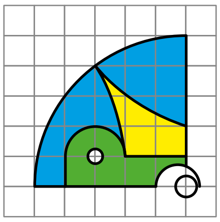




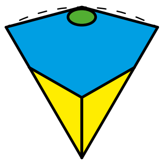
a) A → giro de orden 4.

B → giro de orden 6.

b) A

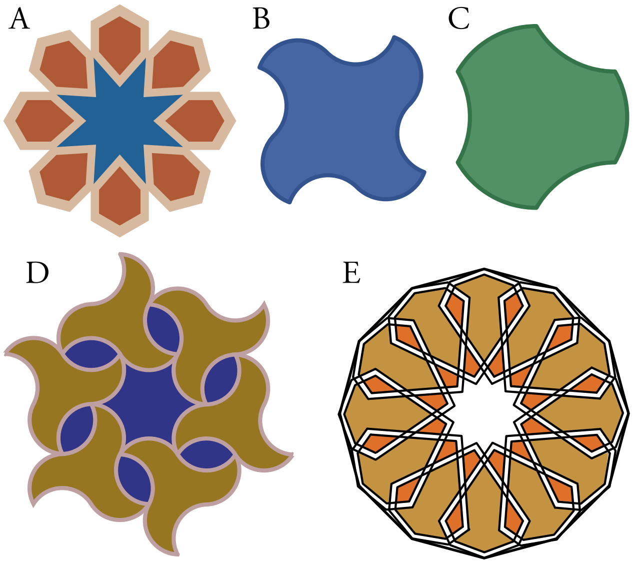


B



Resuelve problemas

12 **a) Indica el centro de giro de estas figuras:**



b) Halla el orden de cada uno de estos centros y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

c) ¿Cuáles tienen, además, centro de simetría?

a) El centro de cada figura es su centro de giro.

b) Todas tienen centro de giro de orden n porque el punto central de cada una permite girar la figura y que coincida con ella misma n veces.

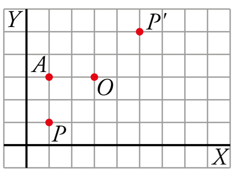
Los órdenes de giro de cada una y sus ángulos mínimos de coincidencia son:

FIGURA	A	B	C	D	E
ORDEN DE GIRO	8	4	3	6	12
ÁNGULO MÍNIMO	45°	90°	120°	60°	30°

c) Todas las figuras tienen centro de simetría excepto la C.

13 **Observa la cuadrícula.**

Un giro de 180° alrededor de $O(3, 3)$ transforma el punto $P(1, 1)$ en $P'(5, 5)$.



a) Di tres movimientos más que transformen P en P'.

b) ¿Cuál es la imagen de $A(1, 3)$ en cada uno?

a) Otros movimientos que convierten P en P' son:

– La simetría central de centro O (mismo movimiento que el giro descrito en el enunciado).

– El giro de centro O y ángulo –180°.

– La traslación de vector $\vec{t} = (4, 4)$.

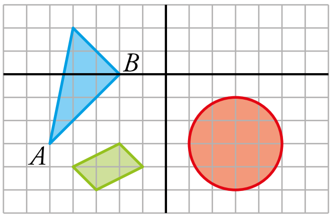
– La simetría axial de eje la recta que pasa por O y es perpendicular a PP'.

b) En la simetría central y los giros, $A' = (5, 3)$.

En la traslación, $A' = (5, 7)$.

En la simetría axial, $A' = (3, 5)$.

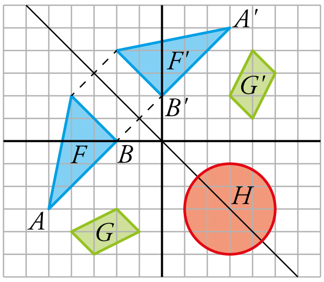
14 **a) Representa, en tu cuaderno, las transformadas de estas figuras mediante la simetría cuyo eje es la recta $y = -x$:**



b) ¿Cuál es la ecuación de la transformada de la recta que pasa por A y B?

c) ¿Alguna de las figuras es invariante?

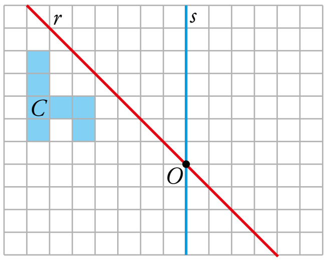
a)



b) La transformada de la recta que pasa por A y B es la misma recta, ya que es perpendicular al eje de simetría. Su ecuación es $y = x + 2$.

c) Sí, es invariante el círculo.

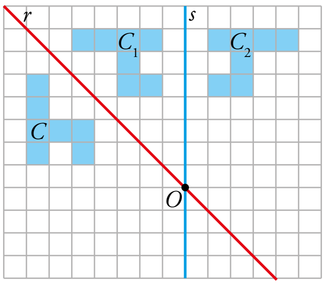
15 **a) Dibuja en tu cuaderno la imagen C_1 transformada de C mediante la simetría de eje r.**



b) Dibuja C_2, transformada de C_1 mediante la simetría de eje s.

c) Define el giro equivalente a la composición de las dos simetrías que transforman C en C_2.

a) y b)

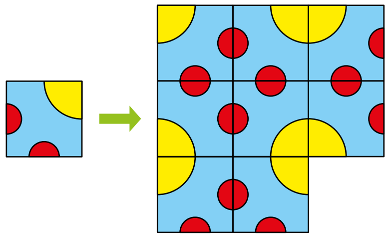


c) El giro equivalente a la composición de las dos simetrías es de centro O y ángulo –90°.

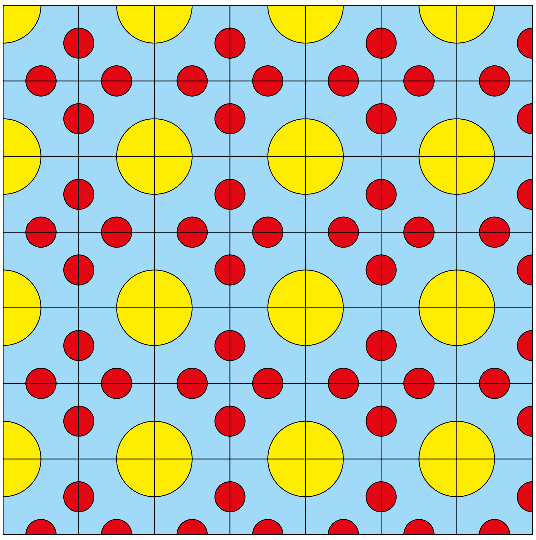
16 **Queremos alicatar una pared de 4,6 m × 3 m con azulejos cuadrados de 20 cm de lado como este:**

a) Completa, en tu cuaderno, un mosaico de 7 × 7 azulejos.

b) Averigua cuántos círculos grandes y cuántos pequeños (completos) habrá en la pared alicatada.



a)

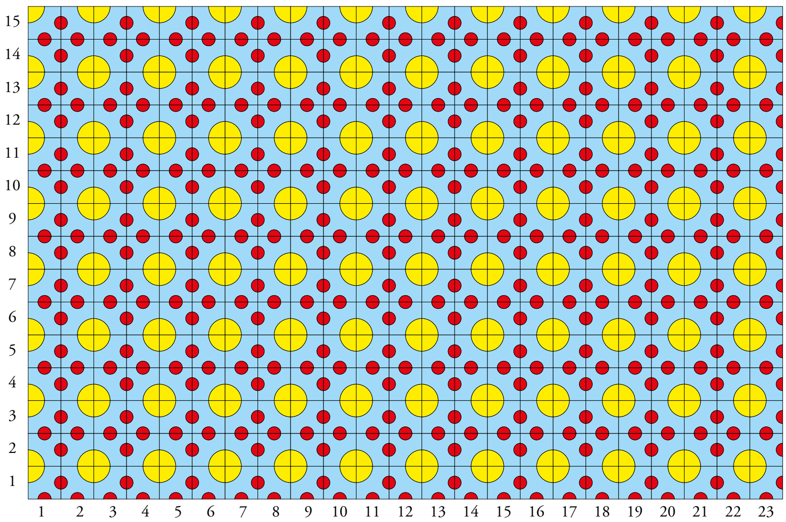


b) La pared es de 460 cm × 300 cm; por tanto, caben 23 columnas × 15 filas de azulejos.

Como cada 2 × 2 azulejos hacen un círculo grande completo, y no debemos contar los que se quedan “medios”, es como si tuviéramos 22 columnas × 14 filas de azulejos.

Habrá entonces 11 columnas × 7 filas de círculos; es decir, 11 · 7 = 77 círculos grandes.

Observa la figura:



Contamos los círculos pequeños por columnas: comenzamos con la primera y vamos añadiendo columnas.

El número de círculos pequeños (completos) depende de que la columna sea par o impar. Veámoslo:

1.ª columna: 7 círculos pequeños completos.

2.ª columna: se suman 3 · 7 + 1 = 22 círculos pequeños completos.

3.ª columna: se suman 7 círculos pequeños completos.

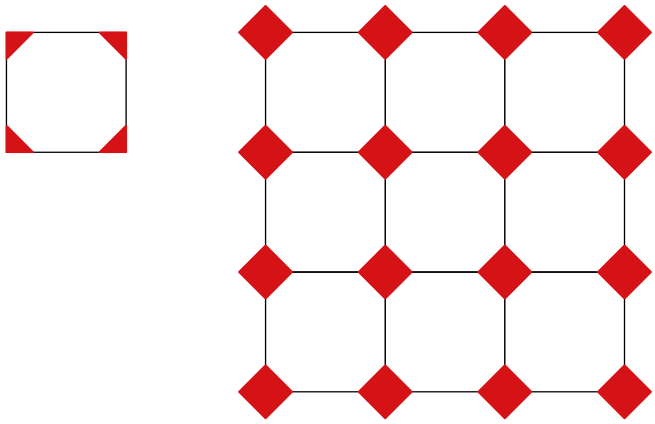
4.ª columna: se suman 3 · 7 + 1 = 22 círculos pequeños completos.

…

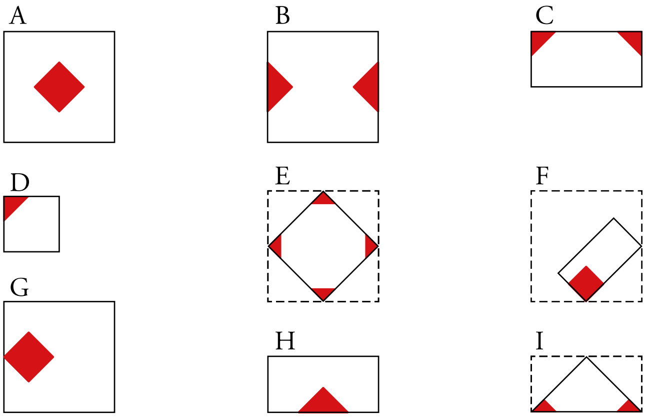
Así, en las columnas pares se añaden 22 círculos completos y en las impares, solo 7. Del 1 al 23 hay 11 columnas pares y 12 impares.

Por tanto, habrá 11 · 22 + 12 · 7 = 242 + 84 = 326 círculos pequeños completos.

17 **Con la baldosa de la izquierda, se puede hacer un suelo como el de la derecha.**



¿Con cuáles de estas otras se puede construir el mismo suelo si lo único que importa es la disposición de los cuadrados rojos, no las líneas entre baldosas?

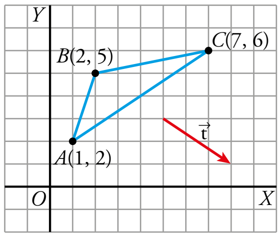


Se puede construir el mismo suelo con las baldosas A, B, C, D, G, H e I.

AUTOEVALUACIÓN

Página 215

1 **Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del ABC mediante cada uno de los siguientes movimientos:**



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje X.

c) La simetría de eje Y.

d) El giro de centro O y ángulo –90°.

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto $P(0, 4)$ es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores el eje Y es una recta doble?

a) $A'(4, 0)$; $B'(5, 3)$; $C'(10, 4)$

b) $A'(1, -2)$; $B'(2, -5)$; $C'(7, -6)$

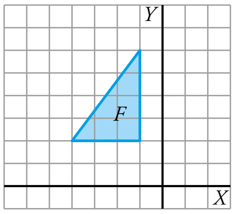
c) $A'(-1, 2)$; $B'(-2, 5)$; $C'(-7, 6)$

d) $A'(2, -1)$; $B'(5, -2)$; $C'(6, -7)$

e) En la simetría de eje Y el punto $P(0, 4)$ es doble.

f) En las simetrías de eje X y de eje Y, el eje Y es doble.

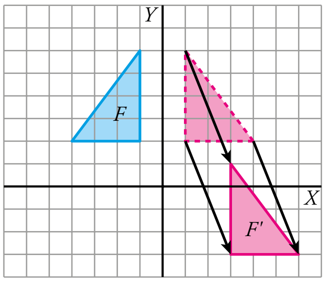
2 **Llamamos S a la simetría de eje Y, y T, a la traslación de vector $\vec{t}(2, -5)$.**



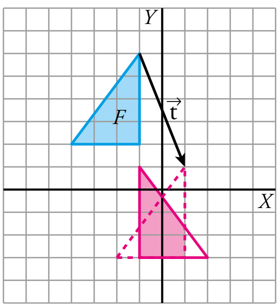
a) Obtén la transformada de la figura F mediante la composición de S con T.

b) Obtén la transformada de F mediante la composición de T con S.

a)

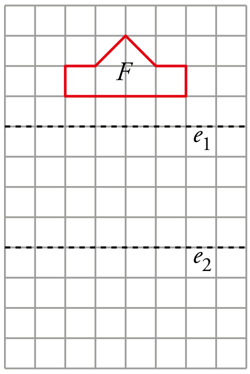


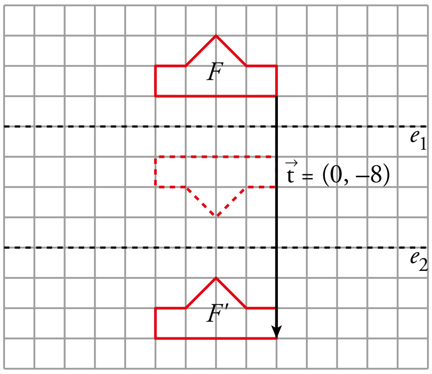
b) La figura coloreada es el resultado de la composición de movimientos.



3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes e_1 y e_2, respectivamente. Dibuja la figura F' transformada de F mediante S_1 compuesta con S_2.**

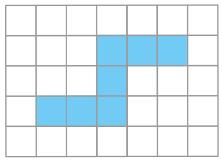
¿Qué otro movimiento nos permite obtener F' a partir de F?





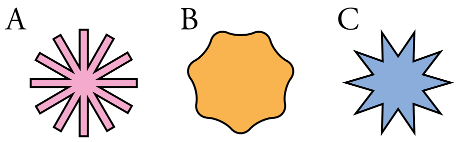
Con una traslación de vector $\vec{t}\,(0, -8)$ se obtiene F' a partir de F.

4 **Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:**



Respuesta abierta.

5 **Dibuja en tu cuaderno los ejes de simetría y los centros de giro de estas figuras.**



Indica el orden del centro de giro de cada una. ¿Cuál es el ángulo mínimo de coincidencia?

A → Tiene 12 ejes de simetría. Todos pasan por el centro de la figura. 6 de ellos pasan por el medio de dos brazos opuestos. Los otros 6 pasan por los vértices donde se unen dos brazos.

El orden del centro de giro es 12, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 12 = 30°.

B → Tiene 7 ejes de simetría. Cada uno de ellos pasa por el centro de la figura y por el punto medio de uno de sus salientes.

El orden del centro de giro es 7, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 7 ≈ 51,43°.

C → Tiene 10 ejes de simetría. 5 de ellos pasan por uno de los puntos de la estrella y por el centro de la figura. Los otros 5 pasan por uno de los vértices donde se juntan 2 brazos de la estrella y por el centro.

El orden del centro de giro es 10, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 10 ≈ 36°.