

EXAMEN DE PROGRESIONES

Se recomienda:

- Antes de hacer algo, leer todo el examen.
- Resolver antes las preguntas que se te den mejor.
- Responde a cada parte del examen en una hoja distinta.
- Es una hoja de examen por las dos caras sobre la que no se escribe nada.
- Resuelve detalladamente el problema para obtener todos los puntos del mismo.
- El examen se hará a bolígrafo, NUNCA a lápiz

TEORÍA(como mínimo hay que sacar un punto)

- ¿Qué es una sucesión? ¿Cómo se denominan sus elementos? ¿Y designan cómo? ¿Por qué esto último se hace así? (0.225 p + 0.1 p + 0.15 p + 0.175 p)(# 0.65 p)
- ¿Qué es el término general de una sucesión? (0.15 p)
- ¿Qué es una progresión aritmética? ¿Cuál es su término general? (0.2 p + 0.15 p + 0.25 p)(# 0.6 p)
- ¿Qué es una progresión geométrica? ¿Cuál es su término general? (0.2 p + 0.15 p + 0.25 p)(# 0.6 p)

PROBLEMAS (como mínimo hay que sacar un cuatro)

- Escribe los términos a_{14} y a_{37} de las siguientes sucesiones dadas por su término general

1.1 $a_n = \frac{n-5}{2n}$ (2x0.25 p)

1.2 $a_n = (-2)^{n+1}$ (2x0.25 p)

1.3 $a_n = n^2 - 3n$ (2x0.25 p)(# 1.5 p)

- Escribe tres términos más en cada una de las siguientes sucesiones:

2.1 3, -3, -9, -15, -21..... (3x0.1 p)

2.2 420, 210, 105, $\frac{105}{2}$, $\frac{105}{4}$ (3x0.15 p)

2.3 2, 3, 5, 10, 18, 33, 61..... (3x0.2 p)

¿De qué tipo es cada una? (3x0.15 p)(# 1.8 p)

- De una progresión aritmética se conocen los datos siguientes:
$$\begin{cases} a_1 = -23 \\ d = 12 \end{cases}$$

Se pide:

3.1 Su término general. (0.3 p)

3.2 Sus cinco primeros términos. (5x0.15 p)

3.3 La suma de los 36 primeros términos. (0.15 p + 0.4 p)(# 1.6 p)

- De una progresión geométrica se conocen los datos siguientes:
$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ r = 4 \end{cases}$$

Se pide:

4.1 Su término general. (0.4 p)

4.2 Sus cinco primeros términos. (5x0.2 p)

4.3 La suma de los 17 primeros términos. (0.2 p + 0.6 p)(# 2 p)

5 Elige uno de estos dos problemas.

5.1 Halla el término general de una progresión aritmética de la que se conocen

$$\begin{cases} a_4 = -13 \\ a_9 = 7 \end{cases} \quad (0.75 \text{ p})$$

5.2 Halla el término general de una progresión geométrica de la que se conocen

$$\begin{cases} a_3 = 64 \\ a_8 = -2048 \end{cases} \quad (1.1 \text{ p})$$

SOLUCIÓN

1.

1.1 $a_n = \frac{n-5}{2n}$

• $a_{14} = \frac{14-5}{2 \cdot 14} = \frac{9}{28}$ 0.25 p

• $a_{37} = \frac{37-5}{2 \cdot 37} = \frac{32}{74} = \frac{16}{37}$ 0.25 p

1.2 $a_n = (-2)^{n+1}$

• $a_{14} = (-2)^{14+1} = -32768$ 0.25 p

• $a_{37} = (-2)^{37+1} = 274877906944$ 0.25 p

1.3 $a_n = n^2 - 3n$

• $a_{14} = 14^2 - 3 \cdot 14 = 154$ 0.25 p

• $a_{37} = 37^2 - 3 \cdot 37 = 1258$ 0.25 p

2. tres términos más en cada una de las siguientes sucesiones:

2.1 3, -3, -9, -15, -21,

$$\left\{ \begin{array}{l} -27 \\ -33 \\ -39 \end{array} \right. \quad 3 \times 0.1 \text{ p} \quad \text{restamos 6 al término anterior}$$

Es una progresión aritmética. 0.15 p

2.2 420, 210, 105, $\frac{105}{2}$, $\frac{105}{4}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{105}{8} \\ \frac{105}{16} \\ \frac{105}{32} \end{array} \right. \quad 3 \times 0.15 \text{ p} \quad \text{multiplicamos por } \frac{1}{2} \text{ el término anterior}$$

Es una progresión geométrica. 0.15 p

2.3 2, 3, 5, 10, 18, 33, 61,

$$\left\{ \begin{array}{l} 112 \\ 206 \\ 379 \end{array} \right. \quad 3 \times 0.2 \text{ p} \quad \text{cada término se obtiene de la suma de los tres anteriores}$$

Es una sucesión definida por una ley de recurrencia. 0.15 p

3. progresión aritmética $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = -23 \\ d = 12 \end{array} \right.$

3.1 $a_n = a_1 + (n-1)d = -23 + (n-1) \cdot 12 = -23 + 12n - 12 = 12n - 35$. 0.3 p

3.2 $1^\circ \rightarrow a_1 = 12 \cdot 1 - 35 = -23$ 0.15 p

$2^\circ \rightarrow a_2 = 12 \cdot 2 - 35 = -11$ 0.15 p

$3^\circ \rightarrow a_3 = 12 \cdot 3 - 35 = 1$ 0.15 p

$4^\circ \rightarrow a_4 = 12 \cdot 4 - 35 = 13$ 0.15 p

$5^\circ \rightarrow a_5 = 12 \cdot 5 - 35 = 25$ 0.15 p

3.3 $S_{36} = \frac{(a_1 + a_{36}) \cdot 36}{2} = \frac{(-23 + 397) \cdot 36}{2} = (-23 + 397) \cdot 18 = 6732$ 0.4 p

$36^\circ \rightarrow a_{36} = 12 \cdot 36 - 35 = 397$ 0.15 p.

4. progresión geométrica $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = -2 \\ r = 4 \end{array} \right.$

4.1 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = (-2) \cdot 4^{n-1}$ 0.4 p

4.2 $1^\circ \rightarrow a_1 = (-2) \cdot 4^{1-1} = (-2) \cdot 4^0 = -2$ 0.2 p

$2^\circ \rightarrow a_2 = (-2) \cdot 4^{2-1} = (-2) \cdot 4^1 = -8$ 0.2 p

$$3^0 \rightarrow a_3 = (-2) \cdot 4^{3-1} = (-2) \cdot 4^2 = -32 \quad 0.2 \text{ p}$$

$$4^0 \rightarrow a_4 = (-2) \cdot 4^{4-1} = (-2) \cdot 4^3 = -128 \quad 0.2 \text{ p}$$

$$5^0 \rightarrow a_5 = (-2) \cdot 4^{5-1} = (-2) \cdot 4^4 = -512 \quad 0.2 \text{ p}$$

$$4.3 \quad S_{17} = \frac{a_{17} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{-8589934592 \cdot 4 - (-2)}{4 - 1} = \frac{-34359738368 + 2}{3} = -11$$

$$453246122 \quad 0.6 \text{ p}$$

$$17^0 \rightarrow a_{17} = (-2) \cdot 4^{17-1} = (-2) \cdot 4^{16} = -8589934592 \quad 0.2 \text{ p}$$

5 Elige uno de estos dos problemas.

$$5.1 \text{ término general de una progresión aritmética } \begin{cases} a_4 = -13 \\ a_9 = 7 \end{cases}$$

PRIMERA FORMA

Se tiene que $a_9 = a_8 + d = a_7 + d + d = a_6 + d + 2d = a_5 + d + 3d = a_4 + d + 4d = a_4 + 5d$.

Es decir: $7 = -13 + 5d \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7 + 13 = 5d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 = 5d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{20}{5} = 4 \quad 0.35 \text{ p}$$

Por otro lado, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = a_1 + (n - 1) \cdot 4$

En particular, $a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -13 = a_1 + 3 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -13 = a_1 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -13 - 12 = -25 \quad 0.25 \text{ p}$$

Finalmente, $a_n = -25 + (n - 1) \cdot 4 = -25 + 4n - 4 = -29 + 4n \quad 0.15 \text{ p}$

SEGUNDA FORMA

El término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

En particular tenemos que:

$$\begin{cases} a_4 = -13 \\ a_9 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (4 - 1) \cdot d = -13 \\ a_1 + (9 - 1) \cdot d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = -13 \\ a_1 + 8d = 7 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que resolvemos por el método de reducción: restamos en columna para obtener;

$$-5d = -20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{-20}{-5} = 4 \quad 0.35 \text{ p}$$

Sustituimos este valor de d en una de las dos ecuaciones para hallar a_1 .

$$a_1 + 3d = -13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 3 \cdot 4 = -13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -12 - 13 = -25 \quad 0.25 \text{ p}$$

El término general es $a_n = -25 + (n - 1) \cdot 4 = -25 + 4n - 4 = -29 + 4n \quad 0.15 \text{ p}$

$$5.2 \text{ progresión geométrica } \begin{cases} a_3 = 64 \\ a_8 = -2048 \end{cases} \quad (1.1 \text{ p})$$

PRIMERA FORMA

Se tiene que $a_8 = a_7 \cdot r = a_6 \cdot r \cdot r = a_5 \cdot r \cdot r^2 = a_4 \cdot r \cdot r^3 = a_3 \cdot r \cdot r^4 = a_3 \cdot r^5$

Es decir, $-2048 = 64 \cdot r^5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^5 = \frac{-2048}{64} = -32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[5]{-32} = -2 \quad 0.525 \text{ p}$$

Por otro lado, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = a_1 \cdot (-2)^{n-1}$

En particular, $a_3 = a_1 \cdot (-2)^{3-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 64 = a_1 \cdot (-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{64}{4} = 16 \quad 0.425 \text{ p}$$

Finalmente, $a_n = 16 \cdot (-2)^{n-1} \quad 0.15 \text{ p}$

SEGUNDA FORMA

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

En particular tenemos que:
$$\begin{cases} a_3 = 64 \\ a_8 = -2048 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \cdot r^{3-1} = 64 \\ a_1 \cdot r^{8-1} = -2048 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \cdot r^2 = 64 \\ a_1 \cdot r^7 = -2048 \end{cases}$$

Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolvemos por el método de sustitución. Despejamos la a_1 en la primera ecuación: $a_1 = \frac{64}{r^2}$

Sustituimos este valor en la otra ecuación:

$$\frac{64}{r^2} \cdot r^7 = -2048 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64r^5 = -2048 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^5 = \frac{-2048}{64} = -32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[5]{-32} = -2 \quad 0.525 \text{ p}$$

Sustituimos este valor para hallar el correspondiente a $a_1 = \frac{64}{(-2)^2} = 16 \quad 0.425 \text{ p}$

Finalmente, $a_n = 16 \cdot (-2)^{n-1} \quad 0.15 \text{ p}$