

Sucesiones y operaciones

11.73 Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$

b) $-4, -2, 0 \dots$

c) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1 \dots$

a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$

b) $2, 4, 6, 8, 10$

c) $3, 9, 27, 81, 243$

11.74 Dadas las sucesiones $(a_n) = (1, 3, 5, 7 \dots)$, $(b_n) = (2, 4, 6, 8 \dots)$, $(c_n) = (-15, -10, -5, 0 \dots)$, halla:

a) $(a_n + b_n)$

b) $2 \cdot (a_n) - (c_n)$

c) $(a_n - c_n) \cdot (b_n)$

a) $(a_n + b_n) = 2n - 1 + 2n = 4n - 1$

b) $2 \cdot (a_n) - c_n = 2 \cdot (2n - 1) - (-5n + 20) = 4n - 2 + 5n - 20 = 9n - 22$

c) $(a_n - c_n) \cdot (b_n) = (2n - 1 + 5n - 20) \cdot (2n) = (7n - 21) \cdot 2n = 14n^2 - 42n$

11.75 Averigua cuál es el término que falta en las siguientes sucesiones.

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \square, \frac{16}{3}, \frac{32}{3} \dots$

c) $27, -9, \square, -1, \frac{1}{3} \dots$

b) $-9, -6, -3, \square, 3 \dots$

d) $\square, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625} \dots$

a) $\frac{8}{3}$

b) 0

c) 3

d) 1

11.76 Determina si los números $1, \frac{1}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}$ son términos de la sucesión de término general $a_n = \frac{3n - 1}{n + 3}$.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = 1 \Rightarrow 3n - 1 = n + 3 \Rightarrow n = 2$. Sí, es el segundo término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3n - 1) = n + 3 \Rightarrow n = 1$. Sí, es el primer término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{8}{5} \Rightarrow n = 3$. Sí, es el tercer término.

$\frac{3n - 1}{n + 3} = \frac{11}{7} \Rightarrow 7(3n - 1) = 11(n + 3) \Rightarrow n = 4$. Sí, es el cuarto término.

11.77 Halla los términos primero, décimo y vigésimo de cada sucesión.

$a_n = n^2 + 1$

$b_n = \frac{3n + 2}{2n - 1}$

$a_n = n^2 + 1 \Rightarrow a_1 = 2; a_{10} = 101; a_{20} = 401$

$b_n = \frac{3n + 2}{2n - 1} \Rightarrow b_1 = 5; b_{10} = \frac{32}{19}; b_{20} = \frac{62}{39}$

11.78 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones recurrentes.

a) $a_1 = -3; a_n = 2a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = 5; a_2 = -5; a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

a) $-3, -4, -6, -10, -18, -34 \dots$

b) $5, -5, -25, -65, -145, -305, -625 \dots$

Progresiones aritméticas y geométricas

11.79 Escribe el término general de cada progresión aritmética.

a) $-5, -1, 3, 7 \dots$

b) $-4, \frac{-7}{2}, -3, \frac{-5}{2} \dots$

a) $a_n = -5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 9$

b) $b_n = -4 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-9 + n}{2}$

11.80 El sexto término de una progresión aritmética es 6, y la diferencia es igual a 3. Calcula:

a) El valor del primer término de la progresión.

b) La suma de los 10 primeros términos.

a) $a_6 + a_1 + 5d \Rightarrow 6 = a_1 + 5 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 6 - 15 \Rightarrow a_1 = -9$

b) $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(-9 + 18) \cdot 10}{2} = 45$

11.81 El número de donantes de sangre en un hospital el primer día de cierto mes fue de 30 personas. Si cada día el número de donantes aumentó en 7 personas, ¿cuántas personas donaron sangre el último día del mes?

El número de donantes es una progresión aritmética con $a_1 = 30$ y $d = 7$. $a_{31} = a_1 + 30d = 30 + 210 = 240$

El número de donantes es la suma de los 31 primeros términos: $S_{31} = \frac{(30 + 240) \cdot 31}{2} = 4185$ donantes

11.82 Halla el décimo término de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la suma de los 10 primeros términos es 355.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(4 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 355 \Rightarrow 4 + a_{10} = 71 \Rightarrow a_{10} = 67$$

11.83 ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 7 comprendidos entre 1 y 100?

Los múltiplos de siete forman una progresión aritmética: $a_n = 7n$

El primer múltiplo de siete es $a_1 = 7$.

El último múltiplo de siete menor que 100 es $a_{14} = 7 \cdot 14 = 98$.

La suma buscada es $S_{14} = \frac{(7 + 98) \cdot 14}{2} = 735$.

11.84 Halla el término general de las progresiones geométricas.

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{75}, \frac{1}{375} \dots$

b) $5, -1, \frac{1}{5}, \frac{-1}{25} \dots$

a) $a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$

b) $5 \left(\frac{-1}{5} \right)^{n-1}$

11.85 Calcula el primer término de una progresión geométrica cuyo tercer término es 192 y la razón es 8.

$$a_3 = a_1 r^2 = a_1 \cdot 8^2 = 192 \Rightarrow a_1 = \frac{192}{64} = 3$$

11.86 Halla cuánto vale la suma de los 30 primeros términos de la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16 ...

La razón es: $r = 2 \Rightarrow a_{30} = 2^{29}$

$$\text{La suma de los 30 primeros términos es: } S_{30} = \frac{2^{29} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 1\,073\,741\,823$$

11.87 El tercer término de una progresión geométrica es 144 y la razón es 6. ¿Qué posición ocupa dentro de la progresión el número 5 184?

$$a_3 = a_1 r^2 = a_1 \cdot 6^2 = 144 \Rightarrow a_1 = \frac{144}{36} = 4$$

$$\text{Buscamos un } n \text{ que verifique: } a_n = 4 \cdot 6^{n-1} = 5\,184 \Rightarrow 6^{n-1} = 1\,296 = 6^4 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$$