Sucesiones

1. Escribe los cuatro primeros términos y el décimo término de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 3n - 2$ **c)** $c_n = n^3 - 1$ **e)** $e_n = (-1)^{n+1}$

b) $b_n = 5 - 2n$ **d)** $d_n = \dfrac{3}{n+2}$ **f)** $f_n = 2 \cdot 3^{n-2}$

2. Escribe los tres términos siguientes de estas sucesiones.

a) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}...$ **c)** 2, 6, 12, 20, 30…

b) –1, 8, –27, 64… **d)** 4, 8, 12, 16, 20…

3. Escribe los términos generales de las sucesiones del ejercicio anterior.

4. Escribe los términos generales y los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) A cada número natural le corresponde el cuadrado de su mitad.

b) A cada número natural le corresponde la mitad de su cuadrado.

c) A cada número natural le corresponde la suma de los cuadrados de sí mismo y de su siguiente.

5. Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia.

a) $a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + 3$ **c)** $c_1 = 1; c_2 = 7; c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

b) $b_1 = \dfrac{1}{12}; b_n = 2b_{n-1}$ **d)** $d_1 = 5; d_2 = 7; d_n = 2 \cdot (d_{n-1} + d_{n-2})$

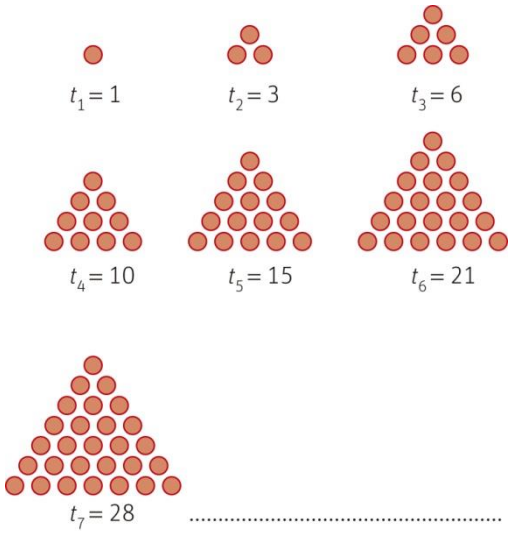
6. Encuentra la ley de recurrencia de las siguientes sucesiones en función de los dos términos anteriores.

a) $(a_n) = (2, 5, 10, 50, 500, 25\,000\ldots)$ para $n > 2$

b) $(b_n) = \left(2, 16, 8, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, 2...\right)$ para $n > 2$

c) $(c_n) = (1, 2, 9, 121, 16\,900\ldots)$ para $n > 2$

7. Encuentra la ley de recurrencia de los números triangulares que se obtienen como se observa en la siguiente ilustración.



.....

Progresiones aritméticas

1. Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. Calcula la diferencia en aquellas que lo sean.

a) 1, 7, 13, 19, 25…

b) –2, 4, 6, 8, –10…

c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}...$

d) 8, 5, 2, –1, –4…

e) 4, 9, 16, 25, 36…

f) 1, 3, 5, 7, 11…

2. Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

a) 3, 2, –7, –10…

b) 11, 13, 15, 17…

c) $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}...$

d) 1,2; 1,6; 2; 2,4…

3. Calcula el término general y los términos 100, 200 y 500 de las siguientes progresiones ariméticas.

a) $a_1 = 3, d = 2$

b) $b_1 = -5, d = -3$

c) $c_1 = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{4}$

d) $d_1 = 5, d = -4$

4. Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 3, a_4 = 15$

b) $b_2 = 6, b_5 = 0$

c) $c_3 = 7, c_7 = 9$

d) $d_1 = -3, d_9 = -19$

5. Calcula la suma de los veinte primeros términos de las progresiones aritméticas del ejercicio 3.

6. Averigua si los siguientes números pertenecen a las progresiones que se indican. En caso afirmativo, indica qué lugar ocupan.

a) 2702 y $a_n = 3n + 5$

b) 150 y $b_n = 140 - 2n$

c) 106 y $c_n = 10 + 4n$

7. El primer término de una progresión aritmética es 100, y la suma de sus 40 primeros términos, 7900. ¿Cuál es el término general de la progresión?

Progresiones geométricas

1. Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. Calcula la razón en aquellas que lo sean.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}...$

b) $\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{20}{7}, \frac{40}{7}...$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}...$

d) 1, 3, 3, 9, 27…

e) 2, –4, 8, –16, 32…

f) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}...$

2. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}...$

b) 2, –4, 8, –16, 32…

c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}...$

d) 1, –1, 1, –1, 1, –1…

3. Calcula el término general y la posición 12 de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, r = -2$

b) $b_1 = 5, r = 0{,}1$

c) $c_1 = 81, r = \frac{1}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{4}, r = -2$

4. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, a_4 = -24$

b) $b_2 = 0{,}0006, b_6 = 6$ y sus términos son positivos.

5. Calcula la suma de los ocho primeros términos de las progresiones geométricas del ejercicio 3.

6. Calcula la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes.

a) 81, 27, 9, 3, 1…

b) 50; 5; 0,5; 0,05…

c) 8, 4, 2, 1…

7. Cierto tipo de bacterias se reproducen por fisión cada 30 minutos, es decir, de cada bacteria se obtienen dos en ese plazo de tiempo. Si se introducen 10 bacterias en un cultivo, ¿cuántas habrá al cabo de 24 horas si ninguna de ellas muere?

Ficha *Sucesiones*

1. **a)** $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_{10} = 28$

b) $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = -3$, $b_{10} = -15$

c) $c_1 = 0$, $c_2 = 7$, $c_3 = 26$, $c_4 = 63$, $c_{10} = 999$

d) $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{3}{4}$, $d_3 = \frac{3}{5}$, $d_4 = \frac{1}{2}$, $d_{10} = \frac{1}{4}$

e) $e_1 = 1$, $e_2 = -1$, $e_3 = 1$, $e_4 = -1$, $e_{10} = -1$

f) $f_1 = \frac{2}{3}$, $f_2 = 2$, $f_3 = 6$, $f_4 = 18$, $f_{10} = 13\,122$

2. **a)** $\frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}$ **b)** $-125, 216, -343$ **c)** $42, 56, 72$ **d)** $24, 28, 32$

3. **a)** $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ **b)** $b_n = (-1)^n \cdot n^3$ **c)** $c_n = n \cdot (n+1)$ **d)** $d_n = 4n$

4. **a)** $a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_4 = 4$

b) $b_n = \frac{n^2}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 2$, $b_3 = \frac{9}{2}$, $b_4 = 8$

c) $c_n = n^2 + (n+1)^2 \Rightarrow c_1 = 5$, $c_2 = 13$, $c_3 = 25$, $c_4 = 41$

5. **a)** $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 13$, $a_4 = 16$, $a_5 = 19$

b) $b_1 = \frac{1}{12}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{2}{3}$, $b_5 = \frac{4}{3}$

c) $c_1 = 5$, $c_2 = 7$, $c_3 = 6$, $c_4 = \frac{13}{2}$, $c_5 = \frac{25}{4}$

d) $d_1 = 5$, $d_2 = 7$, $d_3 = 24$, $d_4 = 62$, $d_5 = 172$

6. **a)** $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

b) $b_1 = 2$, $b_2 = 16$, $b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

c) $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_n = (c_{n-1} + c_{n-1})^2$

7. $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + n$

Ficha *Progresiones aritméticas*

1. **a)** Sí es progresión aritmética: $d = 6$.

b) No es progresión aritmética.

c) No es progresión aritmética.

d) Sí es progresión aritmética: $d = -3$.

e) No es progresión aritmética.

f) No es progresión aritmética.

2. **a)** $a_n = 3 + (n-1)\cdot(-5) = 8 - 5n$

b) $b_n = 11 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 9$

c) $c_n = \frac{5}{3} + (n-1)\cdot\frac{1}{3}$

d) $d_n = 1{,}2 + (n-1)\cdot 0{,}4 = 0{,}4n + 0{,}8$

3. **a)** $a_n = 3 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 1 \Rightarrow a_{100} = 201,\ a_{200} = 401,\ a_{500} = 1001$

b) $b_n = -5 + (n-1)\cdot(-3) = -3n - 2 \Rightarrow b_{100} = -302,\ b_{200} = -602,\ b_{500} = -1502$

c) $c_n = \frac{3}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{4} = \frac{n+5}{4} \Rightarrow c_{100} = \frac{105}{4},\ c_{200} = \frac{205}{4},\ c_{500} = \frac{505}{4}$

d) $d_n = 5 + (n-1)\cdot(-4) = 9 - 4n \Rightarrow d_{100} = -391,\ d_{200} = -791,\ d_{500} = -1991$

4. **a)** $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 15 = 3 + 3d \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 1$

b) Sustituyendo en la fórmula general:

$$b_n = b_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1 + d \\ b_5 = b_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = b_1 + d \\ 0 = b_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 8 - 2(n-1) = 10 - 2n$$

c) Sustituyendo en la fórmula general:

$$c_n = c_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} c_3 = c_1 + 2d \\ c_7 = c_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = c_1 + 2d \\ 9 = c_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 6 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c_n = 6 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+11}{2}$$

d) $d_n = d_1 + (n-1)d \Rightarrow d_9 = d_1 + 8d \Rightarrow -19 = -3 + 8d \Rightarrow d = -2 \Rightarrow d_n = -3 + (n-1)\cdot(-2) = -2n - 1$

5. **a)** $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{3 + 41}{2}\cdot 20 = 440$

b) $S_{20} = \frac{b_1 + b_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{-5 - 62}{2}\cdot 20 = -670$

c) $S_{20} = \frac{c_1 + c_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{25}{4}}{2}\cdot 20 = \frac{310}{4} = \frac{155}{2}$

d) $S_{20} = \frac{d_1 + d_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{5 - 71}{2}\cdot 20 = -660$

6. **a)** $2702 = 3n + 5 \Rightarrow n = 899$. Ocupa el lugar 899.

b) $150 = 140 - 2n \Rightarrow n = -5$. No pertenece a la progresión porque la solución no es un número natural.

c) $106 = 10 + 4n \Rightarrow n = 24$. Ocupa el lugar 24.

7. $a_n = 9 + (n-1)\cdot(-6) = 15 - 6n$

$$S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2}\cdot 40 = 20\cdot(100 + a_{40}) = 2000 + 20a_{40} \Rightarrow 7900 = 2000 + 20a_{40} \Rightarrow a_{40} = 295$$

$$a_{40} = 295 \Rightarrow 295 = 100 + 39d \Rightarrow d = 5 \Rightarrow a_n = 100 + (n-1)\cdot 5 = 5n + 95$$

Ficha *Progresiones geométricas*

1. **a)** No es progresión geométrica.

b) Sí es progresión geométrica $r = 2$.

c) Sí es progresión geométrica: $r = \frac{1}{2}$.

d) No es progresión geométrica.

e) Sí es progresión geométrica $r = -2$.

f) Sí es progresión geométrica: $r = \frac{3}{2}$.

2. **a)** $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$

b) $b_n = 2 \cdot (-2)^{(n-1)}$

c) $c_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)}$

d) $d_n = (-1)^{(n-1)}$

3. a) $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)} \Rightarrow a_{12} = -6144$

b) $b_n = 5 \cdot 0{,}1^{(n-1)} \Rightarrow b_{12} = 5 \cdot 10^{-11}$

c) $c_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} \Rightarrow c_{12} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} = \frac{3^4}{3^{11}} = \frac{1}{3^7}$

d) $d_n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{(n-1)} \Rightarrow d_{12} = 512$

4. **a)** $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow -24 = 3 \cdot r^3 \Rightarrow -8 = r^3 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow a_n = 3 \cdot (-2)^{(n-1)}$

b) Sustituyendo en la fórmula general:

$$b_n = b_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1 \cdot r \\ b_6 = b_1 \cdot r^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}0006 = b_1 \cdot r \\ 6 = b_1 \cdot r^5 \end{cases} \Rightarrow r^4 = 10\,000 \Rightarrow r = 10 \Rightarrow b_1 = 0{,}00006 \Rightarrow b_n = 0{,}00006 \cdot 10^{(n-1)}$$

5. **a)** $S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3 \cdot (-2)^7 \cdot (-2) - 3}{-2 - 1} = -255$

b) $S_8 = \frac{b_8 \cdot r - b_1}{r - 1} = \frac{5 \cdot 0{,}1^7 \cdot 0{,}1 - 5}{0{,}1 - 1} = 5{,}56$

c) $S_8 = \frac{c_8 \cdot r - c_1}{r - 1} = \frac{81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{6560}{54} = \frac{3280}{27}$

d) $S_8 = \frac{d_8 \cdot r - d_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (-2)^7 \cdot (-2) - \frac{1}{4}}{-2 - 1} = \frac{64 - \frac{1}{4}}{-3} = \frac{255}{-12} = \frac{-85}{4}$

6. **a)** $S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{81}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{243}{2}$

b) $S_\infty = \frac{b_1}{1 - r} = \frac{50}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{500}{9}$

c) $S_\infty = \frac{c_1}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16$

7. El número de bacterias forman una progresión geométrica en la que $a_1 = 10$ y $r = 2$: $a_n = 10 \cdot 2^{(n-1)}$.

$a_1 = 10$, $a_2 = 20$ (30 minutos), $a_3 = 40$ (60 minutos), $a_4 = 80$ (90 minutos)…

A las 24 horas habrá, $a_{49} = 10 \cdot 2^{48}$ bacterias.

Ficha *Progresiones aritmético - geométricas*

1. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión $a_n = \frac{(5n+1)\cdot 2^n}{(-3)^n}$.

En este caso a = 5, b =1 y $r = -\frac{2}{3}$, luego se puede calcular la suma de los infinitos términos.

$$S = \frac{a\cdot r + b\cdot r\cdot(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{10}{3} - \frac{10}{9}}{\frac{25}{9}} = \frac{-\frac{40}{9}}{\frac{25}{9}} = -\frac{8}{5}$$

2. Dada la progresión de términos 4, 4, 3, 2, $\frac{5}{4}$, ...:

a) Comprueba que es una progresión aritmético-geométrica y obtén su término general.

La progresión del ejercicio, es el producto de la progresión aritmética 2, 4, 6, 8, ... y de la progresión geométrica 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$. El término general de la primera es $a_n = 2n$ y de la segunda es $b_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, con lo que el término general de la progresión aritmético-geométrica será $c_n = 2n\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

El sexto término será $12\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{4}$ y el séptimo $14\cdot\frac{1}{32} = \frac{7}{16}$.

b) Calcula, si es posible, la suma de los infinitos términos de esta progresión.

$$S = \frac{a\cdot r + b\cdot r\cdot(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$$