

LÍMITES DE FUNCIONES. INDETERMINACIONES

1.- Dibuja la gráfica de una función que tenga los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 5; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2;$$

¿Qué asíntotas tiene la función?

2.- Representa una función que verifique los siguientes límites. ¿Qué asíntotas tiene?

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1;$$

3.- Dibuja la gráfica de una función que tenga como asíntota horizontal la recta $y = 1$, y como asíntotas verticales las rectas $x = -1$ y $x = 1$. ¿Puedes dibujar la gráfica de otra función distinta que cumpla lo mismo?

4.- Calcula los siguientes límites de funciones en un punto:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+5}{x-8} \right); \quad b) \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x+8}{\sqrt{x+1}+9} \right); \quad c) \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x+8}{2x-16} \right); \quad d) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+14}{x+1} \right);$$

5.- Cuando aparecen indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, al calcular límites en un punto, se resuelven factorizando el numerador y el denominador para poder simplificar después. Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2-9}{x-3} \right); \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \right); \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3+3x^2-5x}{5x} \right); \quad d) \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x^3+125}{x+5} \right);$$

6.- Calcula los siguientes límites en el infinito:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 7x^3 + 3) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 7x^3 + 3); \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 - 7x - 1) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 - 7x - 1)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4x^3 - 5x} \right) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4x^3 - 5x} \right); \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2x^3 + 4x + 4} \right) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{2x^3 + 4x + 4} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x^2 + 2} \right) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x^2 + 2} \right)$$

7.- Calcula los siguientes límites en el infinito de cocientes de polinomios (INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$)

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 5x + 3} \right) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 5x + 3} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^5 + 6x}{2x^5 + 8x + 1} \right) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^5 + 6x}{2x^5 + 8x + 1} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 5x}{4x^2 - 5x + 2} \right) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 - 5x}{4x^2 - 5x + 2} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + x^2}{x^2 - 2x^3} \right) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + x^2}{x^2 - 2x^3} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^4 - 3x^2}{1 + x^4} \right) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^4 - 3x^2}{1 + x^4} \right)$$

8.- Si sabemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, ¿cuáles de estas expresiones son indeterminaciones al hallar sus límites en el infinito?

- a) $f(x) \cdot g(x)$ b) $f(x) / g(x)$ c) $f(x) - g(x)$ d) $f(x)^{g(x)}$ e) $f(x) + g(x)$

9.- Comprueba que los siguientes límites son indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$, realiza las operaciones correspondientes y calcúlalos:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x + 3} - 2x \right)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x + 3} - \frac{x^2 + 5}{x + 1} \right)$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \right)$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - x^2 + 3}{x - 1} + \frac{x^2 + 3}{x + 1} \right)$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 2}{2} - \frac{x^3 + 2x^2}{2(x^2 + 1)} \right)$

10.- Calcula los cinco límites del ejercicio anterior, pero ahora para $x \rightarrow -\infty$.

11.- Cuando aparecen radicales en una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ se multiplica y se divide por el conjugado, y se tiene en cuenta que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Calcula:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3} - 2x)$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x + 1} - x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 4000} - \sqrt{x})$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1})$

12.- ¿Es $\frac{\infty}{0}$ una indeterminación? ¿Y $\frac{0}{\infty}$? Comprueba tu respuesta calculando los límites en el infinito de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{6 + x}{2} : \frac{3x}{x^2 + 1} \quad g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} : \frac{7 + x}{x^2} \quad h(x) = \frac{3x^2 + 1}{x} : \frac{1}{2 - x^2}$$

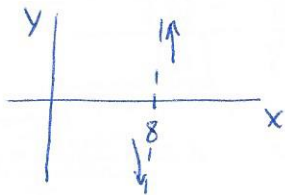
13.- Sabemos que $0 \cdot \infty$ es una indeterminación. Comprueba que puede dar resultados muy distintos, calculando los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x + 6}{2} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 - x}{x^2} \cdot \frac{5 + x + 6x^3}{3x + 2} \right)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9x + 5}{x^2 - 2} \cdot \frac{5x^3}{x + 3} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7 + x}{x^3} \cdot \frac{2x^2 + 1}{x} \right)$

$$4) a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x-8} = \frac{3+5}{3-8} = \frac{8}{-5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x+8}{\sqrt{x+1}+9} = \frac{16}{\sqrt{9}+9} = \frac{16}{3+9} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x+8}{2x-16} = \frac{8+8}{2 \cdot 8 - 16} = \frac{16}{0} = \pm \infty \text{ indet.}$$



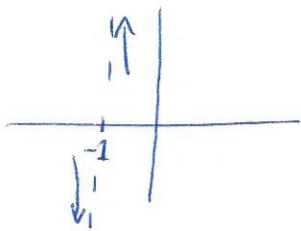
$$\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{x+8}{2x-16} = \frac{7+8}{14-16} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x+8}{2x-16} = \frac{9+8}{2 \cdot 9 - 16} = \frac{+}{+} = +\infty$$

} $\nexists \lim_{x \rightarrow 8}$

asintotă verticală în
 $x=8$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+14}{x+1} = \frac{-1+14}{-1+1} = \frac{13}{0} = \pm \infty \text{ indet.}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+14}{x+1} = \frac{-2+14}{-2+1} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+14}{x+1} = \frac{0+14}{0+1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

} $\nexists \lim_{x \rightarrow -1}$

$$5) a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 3+3 = 6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{2^2-4 \cdot 2+4}{2^2-4} = \frac{0}{0} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 - 5x}{5x} = \frac{0+0-0}{0} = \frac{0}{0} \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 3x - 5)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x - 5}{5} = \frac{0+0-5}{5} = \boxed{-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5} = \frac{(-5)^3 + 125}{-5 + 5} = \frac{0}{0} \text{ indet} = (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 + 125 = (x+5)(x^2 - 5x + 25) \\ -5 \end{array} \right. \begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 0 & 125 \\ -5 & -5 & 25 & -125 \\ \hline 1 & -5 & 25 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 25 = 0 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 100}}{2} \quad \text{no real roots}$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x^2 - 5x + 25)}{x+5} = (-5)^2 - 5(-5) + 25 = 25 + 25 + 25 = \boxed{75}$$

$$\boxed{6} \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 - 7x^3 + 3 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 - 7x^3 + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = \boxed{-\infty}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^2 - 7x - 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^2 = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^2 - 7x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^2 = \boxed{\infty}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{4x^3 - 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{4x^3} = \frac{3}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4x^3 - 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4x^3} = \frac{3}{-\infty} = \boxed{0}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x^3 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x^3} = \frac{2}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x^3 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x^3} = \frac{2}{-\infty} = \boxed{0}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{\infty} = \underline{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{\infty} = \underline{0}$$

$$\boxed{7} \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+4}{3x^2-5x+3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3x+4}{3x^2-5x+3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5+6x}{2x^5+8x+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5}{2x^5} = \underline{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5+6x}{2x^5+8x+1} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{2x^5} = \underline{\frac{3}{2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-5x}{4x^2-5x+2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{4} = \underline{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-5x}{4x^2-5x+2} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{4} = \underline{-\infty}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^2}{x^2-2x^3} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-2x} = \frac{1}{-\infty} = \underline{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+x^2}{x^2-2x^3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-3x^2}{1+x^4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{x^4} = \underline{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4-3x^2}{1+x^4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^4} = \underline{2}$$

$$8] a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = \frac{\infty}{\infty} \underline{\underline{\text{indet.}}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = \infty - \infty \underline{\underline{\text{indet.}}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = \infty^\infty = \infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x) = \infty + \infty = \infty$$

$$9] a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x+3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{x+3} - \lim_{x \rightarrow \infty} 2x =$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty - \infty \underline{\underline{\text{indet.}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 7 - 2x(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 7 - 2x^2 - 6x}{x+3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-11x + 7}{x+3} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-11x}{x} = \boxed{-11}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x+3} - \frac{x^2 + 5}{x+1} \right) \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty - \infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 5x + 7)(x+1) - (x^2 + 5)(x+3)}{(x+3)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 5x + 7x + 7 - x^3 - 3x^2 - 5x - 15}{x^2 + x + 3x + 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 - 3x - 8}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \boxed{\infty}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \right) = \infty - \infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 - 1) - x(x^3 + 1)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 - x^3 + x + x^2 - 1 - x^4 - x}{x^3 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 - 1}{x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^3} = \boxed{-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - x^2 + 3}{x - 1} + \frac{x^2 + 3}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^2 + 3}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x + 1} =$$

$$\stackrel{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x + \lim_{x \rightarrow \infty} x = -\infty + \infty \text{ indet}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x - x^2 + 3)(x + 1) + (x^2 + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^3 - x^2 + 3x + 3 + x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7x}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2} = \boxed{-1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x^3 + 2x^2}{2(x^2 + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2}{2x^2 + 2} =$$

$$\stackrel{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \infty - \infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(2x^2+2) - 2(x^3+2x^2)}{2 \cdot 2(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x + 4x^2 + 4 - 2x^3 - 4x^2}{4x^2 + 4}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\boxed{10} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x+3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{x+3} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x =$$

$$\stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty \text{ indet} =$$

$$= \dots (\text{igual que 9a}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-11x+7}{x+3} = \frac{+\infty}{-\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-11x}{x} = \boxed{-11}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x+3} - \frac{x^2 + 5}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 7}{x+3} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - \lim_{x \rightarrow -\infty} x =$$

$$= -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty \text{ indet} = \dots (\text{igual que 9b}) \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6x^2 - 3x - 8}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \boxed{-\infty}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} =$$

$$\stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty - (-\infty) =$$

$$= -\infty + \infty \text{ indet} = \dots (\text{igual que 9c}) \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 - 1}{x^3 - x} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^3} = \boxed{-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - x^2 + 3}{x-1} + \frac{x^2 + 3}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x^2 + 3}{x-1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x+1} =$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \lim_{x \rightarrow -\infty} x =$$

$$= -(-\infty) + (-\infty) = \infty - \infty \text{ indet} = \dots \text{ igual que 9d} \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 7x}{x^2 - 1} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \boxed{-1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x^3 + 2x^2}{2(x^2 + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{2x^2 + 2} =$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} =$$

$$= -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty \text{ indet} = \text{igual que 9e} \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{4x^2 + 4} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4x} = \frac{2}{-\infty} = \boxed{0}$$

$$\boxed{11} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 3} - 2x) = \infty - \infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x) \cdot (\sqrt{4x^2 - 3} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 3} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 3} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{4x^2 - 3} + 2x} = \frac{-3}{\infty} = \boxed{0}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = \infty - \infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - x} + x)}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ indet}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2x} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 4000} - \sqrt{x}) = \infty - \infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x + 4000} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x + 4000} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x + 4000} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4000 - x}{\sqrt{x + 4000} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4000}{\infty + \infty} = \boxed{0}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1} = \infty - \infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = \boxed{1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \infty - \infty \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\infty} = \boxed{0}$$

13

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{x^2+1} \cdot \frac{x+6}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{x^2+1} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6}{2} = \\
 &= 0 \cdot \infty \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+18x+x+6}{2x^2+2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x+5}{x^2-2} \cdot \frac{5x^3}{x+3} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+5}{x^2-2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x+3} = \\
 &= 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{45x^4+25x^3}{x^3+3x^2-2x-6} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{45x^4}{x^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} 45x = \boxed{\infty}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{x^2} \cdot \frac{5+x+6x^3}{3x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5+x+6x^3}{3x+2} = \\
 &= 0 \cdot \infty \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15+3x+18x^3-5x-x^2-6x^3}{3x^3+2x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3-x^2-2x+15}{3x^3+2x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3}{3x^3} = \boxed{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7+x}{x^3} \cdot \frac{2x^2+1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7+x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x} = \\
 &= 0 \cdot \infty \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2+7+2x^3+x}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = \boxed{0}
 \end{aligned}$$