www.mheducation.es

Matemáticas I

1.º Bachillerato

Antonio Nevot

Daniel Romero

Javier Soler

David Usero

Marta Viadas

Mc Graw Hill Education

SMARTBOOK®

... Una nueva forma **de aprender**

8. Funciones

Kepler-1638b es el planeta extrasolar más lejano descubierto hasta la fecha. Se cree que es similar a nuestra Tierra y orbita, dentro de la zona habitable, en torno a una estrella como el Sol, situada a unos 2500 años-luz de nosotros, en la constelación del Cisne. La luz que recibimos de dicha estrella es demasiado débil para poderla ver a simple vista. A pesar de ello, al observar su tenue brillo y estudiar en función del tiempo la variación de la intensidad de su luz, ha sido posible detectar el planeta que la acompaña. ¿Qué forma crees que tendrá la gráfica de esta función? ¿Será una función periódica? ¿Cómo crecerá y decrecerá la intensidad de la luz? ¿En qué momentos presentará máximos y mínimos? Responder a estas preguntas nos abrirá las puertas a otros mundos…

En esta unidad aprenderás:

1. Concepto de función
2. Dominio y recorrido
3. Puntos de corte con los ejes
4. Simetría
5. Crecimiento, acotación y curvatura
6. Periodicidad
7. Funciones polinómicas
8. Funciones con radicales
9. Funciones racionales
10. La función exponencial
11. La función logarítmica
12. Funciones trigonométricas
13. Funciones definidas a trozos
14. Operaciones con funciones
15. Transformación de funciones
16. La función inversa

1 Concepto de función

En múltiples ámbitos científicos, tecnológicos y socioeconómicos, como la física, la programación o la economía, aparecen un sinfín de magnitudes relacionadas unas con otras. Así, por ejemplo, la presión dentro del mar varía según la profundidad de inmersión, el tiempo de computación empleado en la resolución de un problema depende de la dificultad de este, o el coste unitario de producción viene dado por el número de unidades fabricadas.

Todas esas magnitudes pueden adoptar distintos valores dentro de ciertos rangos, por lo que reciben, en general, el nombre de **variables.** Y las posibles relaciones entre las distintas variables se traducen al lenguaje matemático mediante el concepto de **función.** Estas son las distintas formas en que suele expresarse una función:

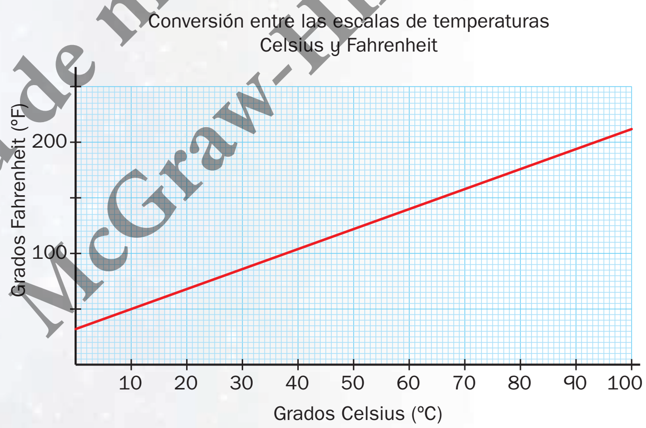
- Un **enunciado** o regla nos informa con palabras de qué forma se relacionan entre sí las variables. Por ejemplo: «el número de posibles contraseñas crece de manera exponencial con la longitud de las mismas, es decir, con el número de caracteres que la forman».
- Una **tabla** asocia a ciertos valores de una de las variables los correspondientes valores de la otra. Por ejemplo, la siguiente tabla de demanda pone de manifiesto que la cantidad de producto demandada se va reduciendo a medida que se incrementa su precio:

Precio de venta al público (en euros por cada barra de pan)	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
Cantidad semanal demandada (en miles de barras de pan)	300	150	100	75	50

Tabla 8.1. Demanda semanal de barras de pan en función de su precio.

- Una **gráfica** representa de forma clara y visual la relación que existe entre las variables. Observa la siguiente representación gráfica:

En el eje de abscisas se representan los grados Celsius, mientras que en el eje de ordenadas, su equivalencia en grados Fahrenheit.



- Una **fórmula** o expresión analítica condensa, cuando ello es posible, la dependencia exacta que se da entre las variables; es decir, cómo a través de ciertas operaciones realizadas sobre una de ellas podemos obtener la otra. Así, por ejemplo, para una eficacia en la frenada del 80 %, la distancia recorrida, d (en metros), por un vehículo desde que se accionan sus frenos hasta que este se detiene por completo depende de la velocidad a la que circula, v (en km/h), según:

$$d = 0{,}005\ v^2$$

Todos estos ejemplos tienen una característica en común: hacen corresponder cada valor de una de las variables con un único valor de la otra. Este hecho es el que define las funciones:

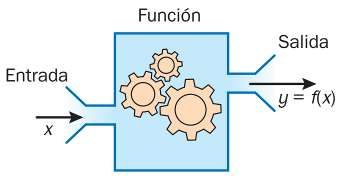
> Una **función** f es una **aplicación** entre dos conjuntos tal que a cada elemento perteneciente a un **conjunto inicial** se le asocia un único elemento dentro de un **conjunto final.**

1 Piensa

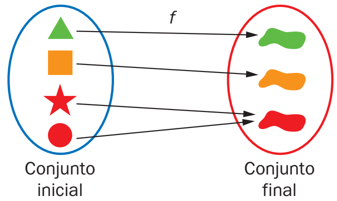
Explica la dependencia exponencial entre el número de contraseñas y la longitud de las mismas.

Punto de interés

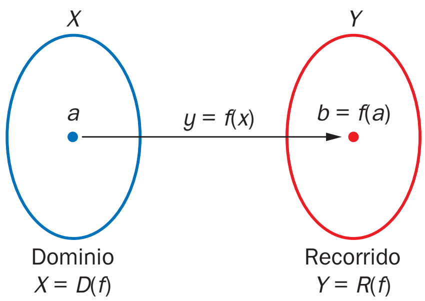
Hasta hace un par de siglos, los matemáticos consideraban que una función «respetable» era, más bien, todo aquello que pudiera expresarse mediante cierto tipo de fórmula, como $x^2 + 1$ o $\cos 2x$. Es decir, una especie de «máquina» capaz de realizar de manera explícita determinadas operaciones sobre números y de «escupir» después los resultados.



Hoy, sin embargo, las funciones se entienden en un sentido más amplio, como **aplicaciones** mediante las cuales un conjunto de números u otras entidades se pone en correspondencia con otra colección de elementos. Así, no es imprescindible que exista una fórmula para definir la acción explícita de la función. Lo esencial de esta aplicación es, en cambio, que a cada elemento del conjunto inicial le corresponda un solo elemento del conjunto final. Es decir, que todos los elementos del conjunto inicial deben tener un elemento asociado del conjunto final.



2 Dominio y recorrido

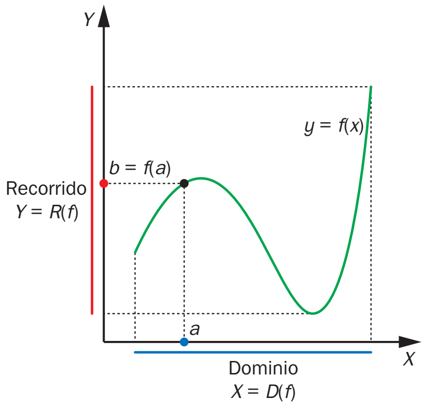


Si se toman como referencia los datos recogidos en la Tabla 8.1, se tiene que el conjunto inicial está formado por los valores de la variable «precio unitario de venta», que es donde la función ha sido «definida»; por su parte, el conjunto final viene dado por los valores de la variable «cantidad semanal demandada» correspondientes a cada uno de dichos precios, para los cuales son sus respectivas «imágenes».

El conjunto inicial X es el **dominio de definición** de la función, $D(f)$, y sus elementos reciben el nombre de **variable independiente,** x.

El conjunto final Y es el **recorrido** o **imagen** de la función, $R(f)$, y sus elementos reciben el nombre de **variable dependiente,** y, pues su valor depende del valor que tome x:

$$x \in X \xrightarrow{f} y = f(x) \in Y$$

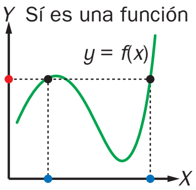


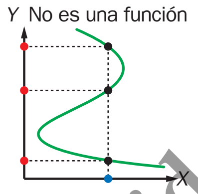
Varios valores diferentes de la variable independiente podrían tener la misma imagen en el recorrido, es decir, podrían compartir un valor idéntico de la variable dependiente, pero no al revés.

Las funciones estudiadas hasta el momento comparten, además, otra característica: sus elementos son números reales; esto es, son **funciones reales de variable real** que hacen corresponder, dentro de su dominio, cada número real con un único número real del recorrido:

$$x \in X \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} y = f(x) \in Y \subset \mathbb{R}$$

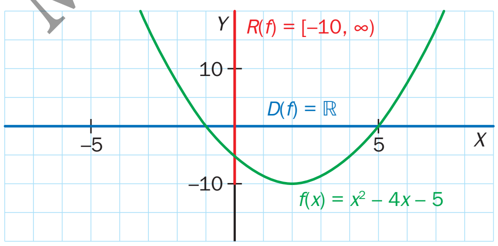
En estas funciones, el dominio y el recorrido, obtenido este último como imagen del dominio, no han de coincidir necesariamente con el conjunto de los números reales. El dominio puede verse restringido a un subconjunto de $\mathbb{R}$ en un determinado **contexto,** ya sea por la propia naturaleza del problema en el que surge la función o por limitación expresa de quien la propone.

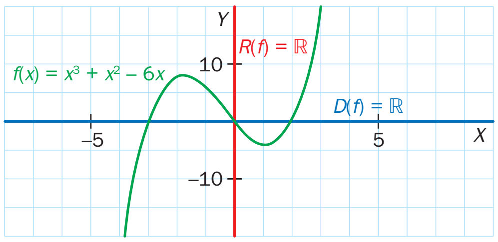




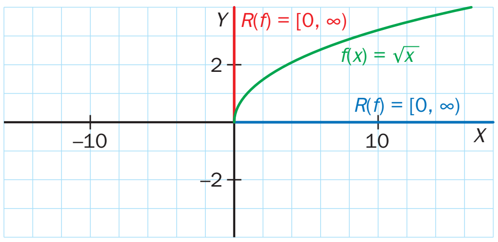
Por otro lado, en ocasiones no es posible realizar determinadas operaciones sobre cualquier número real, lo cual provoca que algunas funciones reales, debido a su propia **expresión analítica,** tengan como dominio cierto subconjunto de $\mathbb{R}$. Veamos qué dominio poseen los principales tipos de funciones:

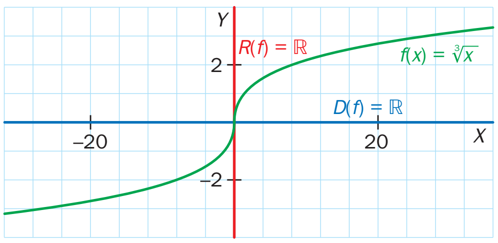
- **Polinomios.** Las expresiones polinómicas se encuentran definidas para todos los números reales.





- **Raíces.** Dentro de los números reales, las raíces de índice par no están definidas cuando el radicando es negativo; las de índice impar, sin embargo, sí lo están.

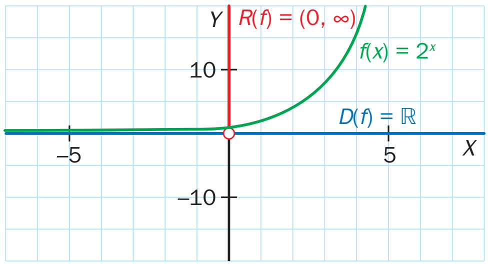


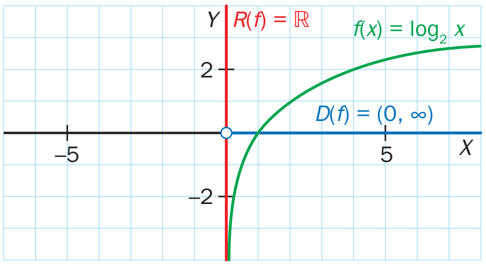


2 Piensa

En cada uno de los ejemplos de funciones presentados hasta ahora, identifica la variable dependiente e independiente, así como sus respectivos dominios de definición y recorridos.

- **Exponenciales y logaritmos.** La exponencial está definida para cualquier número real; el logaritmo, en cambio, solo se define para argumentos estrictamente positivos.

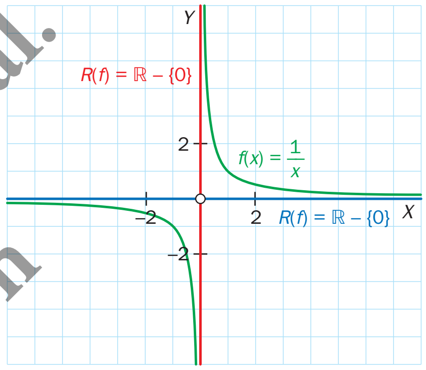




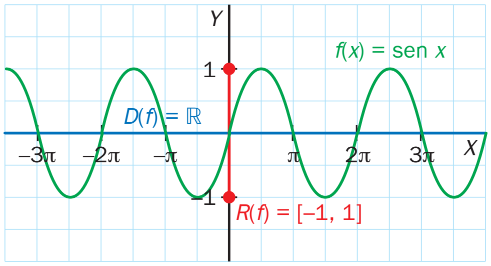
www Actúa

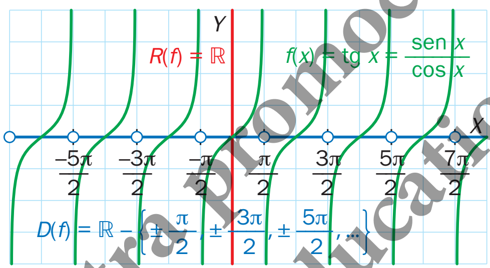
Comprueba por tu cuenta el **dominio** y el **recorrido** de algunas funciones con esta animación interactiva.

- **Fracciones.** Una expresión racional o, en general, que contenga la variable independiente en un denominador no se encuentra definida para aquellos valores que lo anulen.



- **Expresiones trigonométricas.** El seno y el coseno se encuentran definidos para todo número real, pero el resto de razones trigonométricas no están definidas allí donde su correspondiente denominador se anule.





Ejemplo 1. Determina el dominio de estas funciones sencillas:

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$ ***b)*** $f(x)=\log(1-x)$ ***c)*** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$ ***d)*** $f(x)=\text{cotg}\,x$

a) La raíz cuadrada solo está definida para radicandos nulos o positivos:

$$x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow D(f)=[-2,\infty)$$

b) El logaritmo exige argumentos estrictamente positivos:

$$1-x>0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow D(f)=(-\infty,1)$$

c) En esta función racional, excluimos del dominio los valores que anulan el denominador:

$$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$$

d) Como $\text{cotg}\,x=\cos x/\text{sen}\,x$, quedan fuera del dominio los valores que anulan el seno:

$$D(f)=\mathbb{R}-\{0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots\}$$

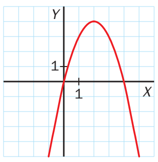
!! Ojo

Al estudiar el dominio, recuerda que no siempre es posible realizar cualquier operación matemática. Esto provoca que, a veces, la «maquinaria» de una función se «atasque»: **dividir entre cero,** hallar **raíces reales pares de números negativos** u obtener el **logaritmo de un argumento nulo o negativo** son tres operaciones que no están permitidas.

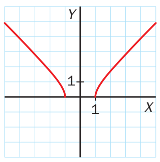
Actividades

1. Observa las siguientes gráficas y determina el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes:

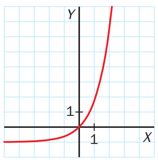
a)



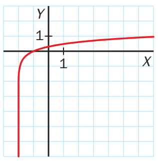
b)



c)



d)



2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4-5x^2+3$

b) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-x-2}$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^2-1}$

d) $f(x)=e^{2x}$

e) $f(x)=\log(4-x^2)$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$

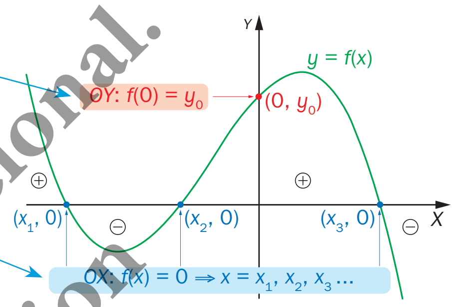
3 Puntos de corte con los ejes

Cuando se representa gráficamente una función, esta puede cruzarse con los ejes de coordenadas. Estos puntos de corte o intersección pueden aportar información muy valiosa. Por ejemplo, en la gráfica del margen aparecen representados datos sobre el paleomagnetismo terrestre. En ella se observa que, durante algunos periodos de tiempo, los valores del momento magnético son positivos y en otros, negativos. Cuando la función corta el eje de abscisas, esto indica que el momento magnético se anula, lo que implica una inversión de los polos del campo magnético terrestre. El único punto de corte con el eje vertical o de ordenadas nos informa acerca de la intensidad del momento magnético de la Tierra en la actualidad.

Los **puntos de corte** de una función con los ejes de coordenadas son:

El punto de corte de la función $y = f(x)$ con el eje de ordenadas *OY*: si existe, es único e indica el valor de la variable dependiente u ordenada, *y*, en el origen; es decir, es de la forma $(0, f(0))$, luego se halla calculando el valor de la función en $x = 0$.

Los puntos de corte de la función $y = f(x)$ con el eje de abscisas *OX* se caracterizan por que en ellos el valor de la variable dependiente u ordenada, *y*, es nulo. Es decir, estos puntos son de la forma $(x_i, 0)$, y para hallarlos basta con resolver la ecuación $f(x) = 0$.



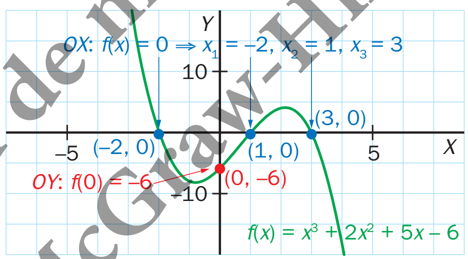
En los puntos de corte con el eje de abscisas, **la función $f(x)$ cambia de signo** (de positiva a negativa, o viceversa), siempre que esta pueda dibujarse de un solo trazo, no alcance en ellos un valor máximo o mínimo y, naturalmente, no se trate de la función $f(x) = 0$.

Ejemplo 2. **Localiza los puntos de corte con los ejes de estas funciones:**

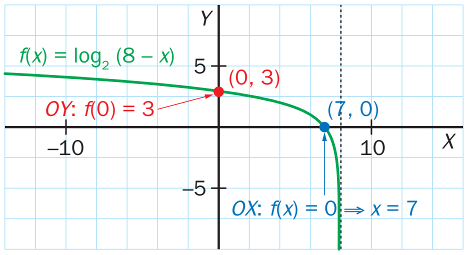
a) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ ***b)*** $f(x) = \log_2(8 - x)$

- Para hallar los puntos de corte con el eje *OX*, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$.
- Para hallar el punto de corte con el eje *OY*, evaluamos la función en $x = 0$.

a)



b)



Actividades

3. Localiza los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

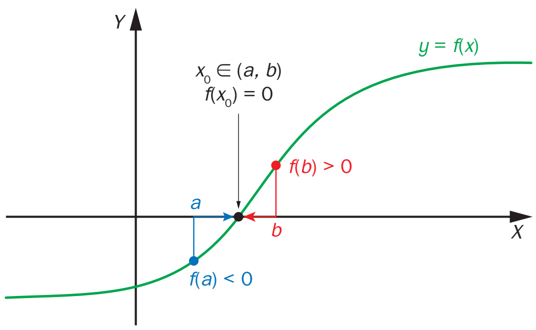
a) $f(x) = 5x + 3$ *b)* $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ *c)* $f(x) = x^2 + 2$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ *e)* $f(x) = e^x$ *f)* $f(x) = \log x$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 5}$ *h)* $f(x) = \cos x$ *i)* $f(x) = \sec x$

4. A veces no es posible resolver de manera exacta cierta ecuación $f(x) = 0$. Pero si la función $f(x)$ puede dibujarse de forma continua en un intervalo $[a, b]$ donde su valor cambia de signo, está claro que en algún punto x_0 de su interior esta debe cruzar el eje *OX* y anularse. Así pues, con hacer tal intervalo lo suficientemente pequeño sin más que dividirlo una y otra vez por la mitad, podemos hallar la raíz de la ecuación con la precisión que deseemos. Es el llamado método de la bisección.

Teniendo esto en cuenta, resuelve de manera aproximada la ecuación $x = \cos x$. Para ello, parte de la función $f(x) = x - \cos x$ en el intervalo $[0, 1]$ y obtén su raíz con un error de aproximación de una centésima.



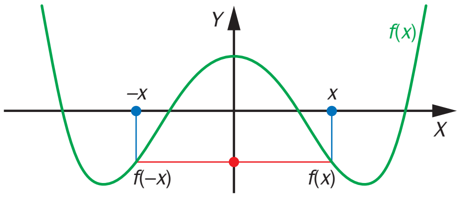
4 Simetría

Las funciones pueden ser simétricas respecto del eje de ordenadas y respecto del origen:

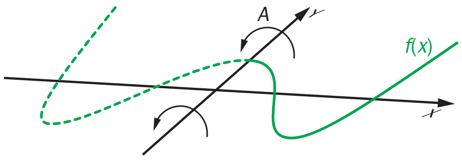
Una función es **simétrica respecto del origen** *O* cuando se verifica que:

$$\mathbf{f(-x)=f(x)} \quad \text{para todo} \quad x \in D(f)$$

En tal caso, se la denomina **función par:**



Función par: $f(x) = f(-x)$

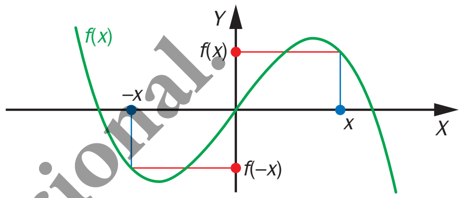


La transformación *A* consiste en plegar la gráfica de la función $f(x)$ a lo largo del eje *OY*, cambiando *x* por $-x$. Si al realizar este único pliegue la mitad izquierda de la gráfica se obtiene a partir de la mitad derecha, se trata de una función par.

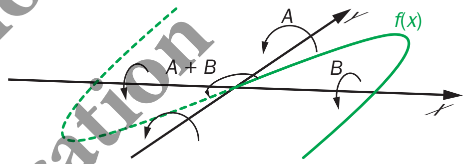
Una función es **simétrica respecto del eje de ordenadas,** *OY*, cuando se verifica que:

$$\mathbf{f(-x)=-f(x)} \quad \text{para todo} \quad x \in D(f)$$

En tal caso, se la denomina **función impar:**



Función impar: $f(x) = -f(-x)$



La transformación *B* consiste en plegar la gráfica de la función $f(x)$ a lo largo del eje *OX*, cambiando *y* por $-y$. Si la mitad izquierda de la gráfica se obtiene a partir de la mitad derecha tras realizar de forma sucesiva ambos pliegues, *A* y *B*, esta es impar.

Ejemplo 3. Comprueba si estas funciones poseen alguna simetría:

a) $\mathbf{f(x)=x^4-3x^2}$ **b)** $\mathbf{f(x)=2x^3-5x}$ **c)** $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2+1}}$

d) $\mathbf{f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}}$ **e)** $\mathbf{f(x)=x^3+x^2}$

Para ello, basta con inspeccionar el valor de $f(-x)$ y compararlo con el de $f(x)$:

a) $f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2=x^4-3x^2=f(x) \Rightarrow$ función par

b) $f(-x)=2(-x)^3-5(-x)=-2x^3+5x=-(2x^3-5x)=-f(x) \Rightarrow$ función impar

c) $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x) \Rightarrow$ función par

d) $f(-x)=\dfrac{(-x)}{(-x)^2-4}=\dfrac{-x}{x^2-4}=-\dfrac{x}{x^2-4}=-f(x) \Rightarrow$ función impar

e) $f(-x)=(-x)^3+(-x)^2=-x^3+x^2$, que no coincide con $f(x)=x^3+x^2$ ni con $-f(x)=-x^3-x^2$, luego esta función no es ni par ni impar.

@ www Actúa

Disfruta de las **simetrías** presentes en la naturaleza.

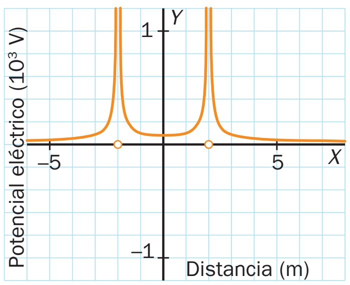
Actividades

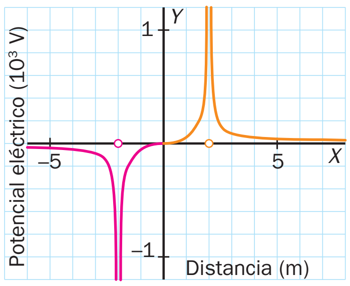
5. En las gráficas de la derecha aparece representado el potencial eléctrico que dos cargas generan a su alrededor. Explica el tipo de simetría presente en cada uno de los casos.

6. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x^2+2$ *b)* $f(x)=5x^3-4x$ *c)* $f(x)=\sqrt{x^4-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ *e)* $f(x)=x^2-3x$



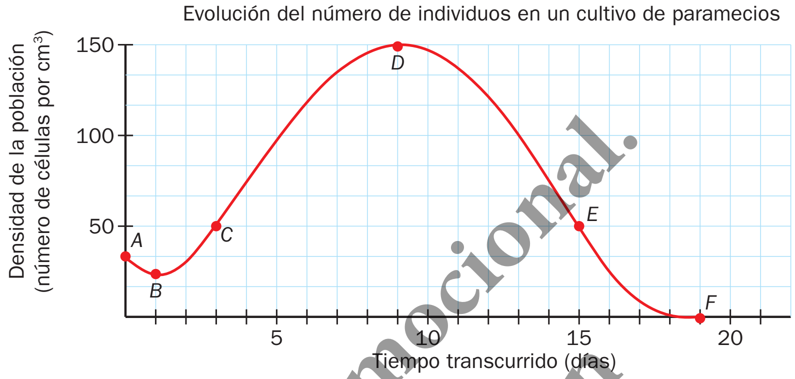


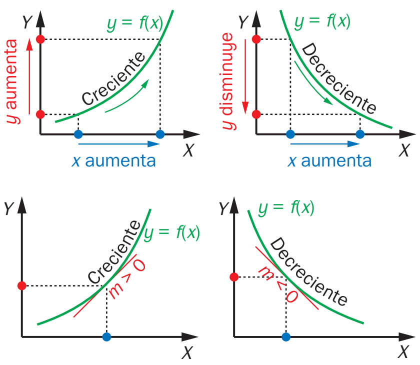
5 Crecimiento, acotación y curvatura

@ www Actúa

Experimenta con el **crecimiento** y la **curvatura** de las funciones mediante esta animación interactiva.

Otro aspecto importante de las funciones radica en cómo estas crecen o decrecen, a qué ritmo lo hacen, y dónde alcanzan sus valores máximos y mínimos. A continuación se toma como referencia la gráfica obtenida al estudiar en el laboratorio un cultivo de cierto tipo de paramecios para analizar el crecimiento, la acotación, los extremos y la curvatura de una función.





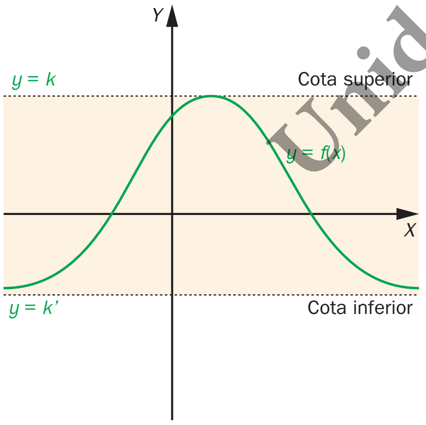
Crecimiento

En ciertos tramos de la gráfica anterior se aprecia cómo la densidad de la población crece a medida que transcurren los días (*BC* y *CD*), mientras que en otros decrece (*AB*, *DE* y *EF*).

Una función $y = f(x)$ es **creciente** o **decreciente** en cierto intervalo según aumente o disminuya, respectivamente, el valor de la variable dependiente, *y*, a medida que aumenta el valor de la variable independiente, *x*.

Observa cómo en todo punto donde la función es creciente, la gráfica está, de izquierda a derecha, inclinada hacia arriba, es decir, su pendiente es positiva; en los puntos donde es decreciente, sin embargo, la gráfica está inclinada hacia abajo y posee pendiente negativa.

Acotación

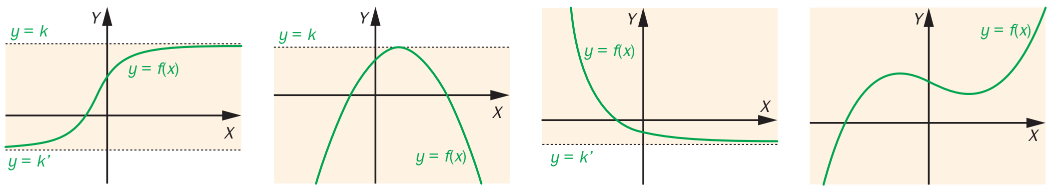


En la gráfica también se puede observar que la densidad de la población no aumenta sin límite, pues esta no sobrepasa el valor de 150, ni tampoco disminuye por debajo de 0, como es lógico, dada la naturaleza del problema. Este tipo de funciones se denominan acotadas.

Una función $y = f(x)$ está **acotada** cuando existen dos valores, k y k', tales que $k' \leq f(x) \leq k$; a dichos valores se les llama, respectivamente, **cota superior** y **cota inferior.**

La gráfica de una función acotada se halla encerrada, por tanto, entre las rectas horizontales $y = k$ e $y = k'$. En caso contrario, la función no es acotada, aunque pudiera estarlo superior o inferiormente, quedando su gráfica por debajo de $y = k$ o por encima de $y = k'$, respectivamente.

Ejemplo 4. **De las siguientes funciones, ¿cuál de ellas está acotada?**

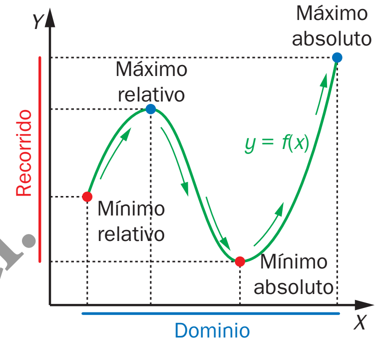


f(*x*) acotada — *f*(*x*) acotada superiormente — *f*(*x*) acotada inferiormente — *f*(*x*) no acotada

Extremos

En la gráfica para la densidad de la población de paramecios se comprueba asimismo que algunos de sus puntos representan valores extremos de la función, pues en ellos esta alcanza un máximo (*A* y *D*) o un mínimo (*B* y *F*).

Un **máximo** o un **mínimo** de una función, denominados **extremos,** son, respectivamente, el valor más grande o más pequeño que esta toma, ya sea en cierto intervalo (extremo local o **relativo**), o bien en todo su dominio de definición (extremo global o **absoluto**).

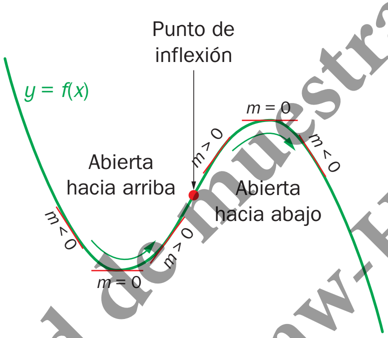


Curvatura

Por la inclinación o pendiente de la gráfica en cada uno de sus puntos apreciamos algunos tramos en los que el crecimiento o decrecimiento es cada vez más rápido (como ocurre, respectivamente, en *BC* y *DE*), y otros donde, en cambio, se ralentiza (como sucede en *CD* y *EF*, respectivamente). De todo ello nos informa la **curvatura** de la función:

Una función es **abierta hacia arriba (cóncava)** o **abierta hacia abajo (convexa)** en cierto intervalo según aumente o disminuya, respectivamente, el valor de su pendiente a lo largo del mismo.

Un **punto de inflexión** separa regiones de la función con distinta curvatura.



!! Ojo

Cuando una función es abierta hacia arriba y tiene forma de valle suele decirse que es **cóncava,** y cuando es abierta hacia abajo, con forma de montaña, **convexa.** Pero, ¡cuidado!, en ocasiones estos términos se emplean al revés.

3 Piensa

¿Qué podemos decir acerca del crecimiento y la curvatura en los extremos *B* y *D*? ¿Y en los puntos de inflexión *C* y *E*?

Actividad resuelta 1

Analiza el crecimiento y la curvatura de la gráfica de la población de paramecios.

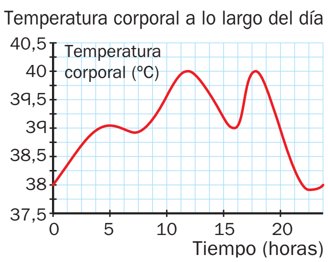
Para estudiarlo, debemos determinar los intervalos del dominio en los que esta función crece y decrece, así como aquellos en los que es abierta hacia arriba o hacia abajo; también hemos de localizar las coordenadas de sus extremos y los puntos de inflexión.

Esta función es creciente en el intervalo $(1, 9)$ y decreciente en los intervalos $[0, 1)$ y $(9, 19]$. Sus extremos están localizados en los puntos de coordenadas $(0, 30)$ (máximo relativo), $(1, 25)$ (mínimo relativo), $(9, 150)$ (máximo absoluto) y $(19, 0)$ (mínimo absoluto).

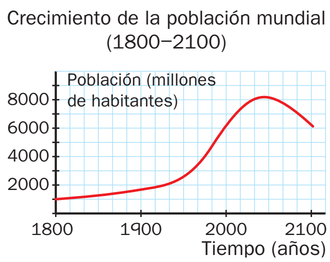
La función es abierta hacia arriba en los intervalos $(0, 3)$ y $(15, 19)$, y abierta hacia abajo en el intervalo $(3, 15)$. Posee, además, dos puntos de inflexión, situados en las coordenadas $(3, 50)$ y $(15, 50)$.

Actividades

7. La siguiente gráfica representa la variación de temperatura corporal experimentada por un paciente a lo largo de un día. Analiza su crecimiento y localiza sus extremos.

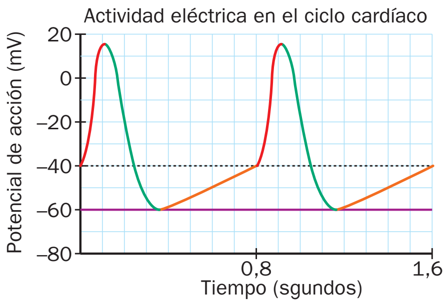


8. Observa la gráfica y responde: ¿en qué década comenzó a ralentizarse el crecimiento de la población mundial? ¿Cuándo se espera que esta alcance su valor máximo?



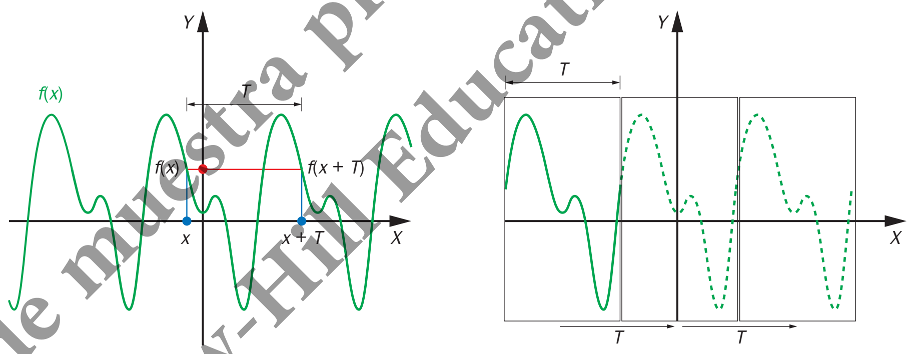
6 Periodicidad

Las mareas, la actividad del corazón o la propagación de las ondas acústicas son fenómenos que se repiten en el tiempo de acuerdo con un ciclo bien definido. Todos ellos son periódicos, luego pueden tratarse por medio de funciones periódicas, cuya gráfica se reproduce a sí misma una y otra vez cada cierto intervalo de la variable independiente.

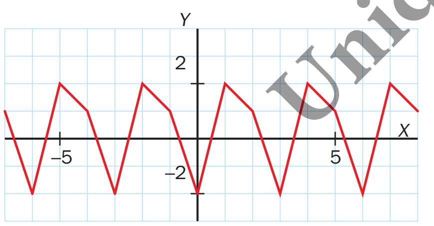


Una **función** es **periódica,** con período $T > 0$, si su gráfica se repite al recorrer una longitud T a lo largo del eje de abscisas *OX:*

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ldots = f(x+nT), \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$



Por tanto, conocida la forma que posee la función en cualquier intervalo de longitud T, es posible construir el resto de la misma sin más que desplazar su gráfica, hacia la derecha y hacia la izquierda, un número entero de veces su periodo T a lo largo de todo su dominio.



Ejemplo 5. Comprueba que la gráfica del margen corresponde a una función periódica y halla su periodo.

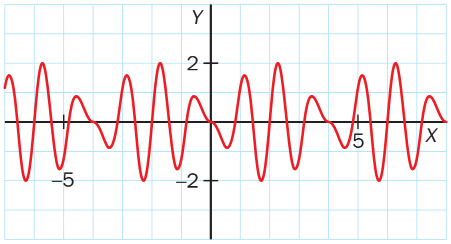
Si observamos el valor que toma la función en un punto cualquiera, comprobamos que, en efecto, la gráfica se repite en intervalos de tres unidades; por ejemplo:

$$f(-4) = f(-1) = f(2) = f(5) = 1$$

Se trata, así pues, de una función periódica cuyo periodo es $T = 3$.

Actividades

9. Comprueba la periodicidad de la función que aparece en la gráfica del margen y determina su periodo.



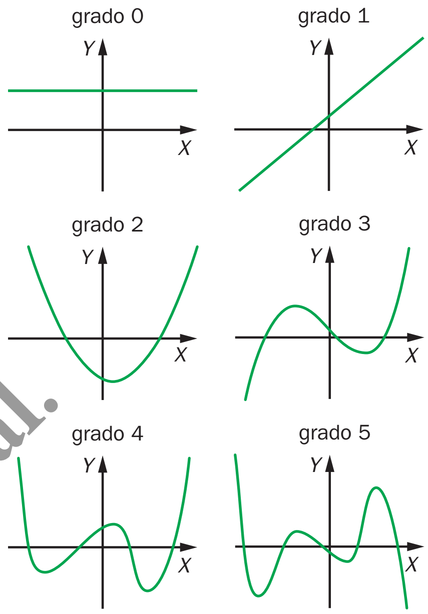
10. La Luna pasa por sus cuatro fases en 28 días, durante los cuales solo vemos desde la Tierra una porción de su cara iluminada por el Sol. Construye una tabla con la fracción de superficie lunar visible a lo largo de 56 días, tomando como puntos de referencia los momentos en que se alcanza cada una de las cuatro fases, y representa gráficamente los datos. ¿Es periódica esta función? ¿Qué forma crees que tendrá?

7 Funciones polinómicas

Una **función polinómica** de grado n es aquella cuya fórmula o expresión analítica viene dada por un polinomio de dicho grado; así, por ejemplo, $f(x) = 5$ es una función polinómica de grado 0 o función constante, $g(x) = 3x - 2$ lo es de grado 1, $h(x) = 5x^2 + 2x - 1$, de grado 2, etc.

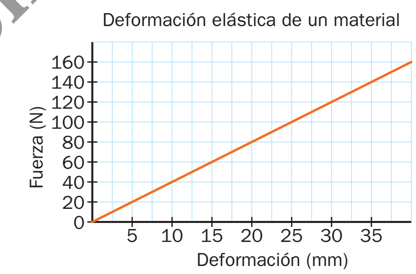
Las principales características de las funciones polinómicas son:

- Su dominio es $\mathbb{R}$; en el caso de tener grado impar, su recorrido también es $\mathbb{R}$.
- Todas ellas poseen un punto de corte con el eje OY y, a lo sumo, n puntos de corte con el eje OX.
- Dado que las funciones de grado impar tienen como recorrido toda la recta real, estas han de cortar al eje OX en, al menos, un punto.
- Las de grado par, en cambio, están acotadas inferior o superiormente, ya que poseen un mínimo o un máximo absolutos, respectivamente; además, en este caso podrían no existir puntos de corte con el eje OX.



Funciones polinómicas de primer grado

Si cierta magnitud varía en función de otra, puede ocurrir que variaciones iguales en la variable independiente provoquen la misma variación en la variable dependiente. Este comportamiento se observa en multitud de fenómenos: por ejemplo, la deformación elástica que provoca una fuerza deformadora en un material, o los modelos más sencillos de oferta y demanda, obedecen a este tipo de dependencia, que se expresa con una función polinómica de primer grado, cuya gráfica es una línea recta.



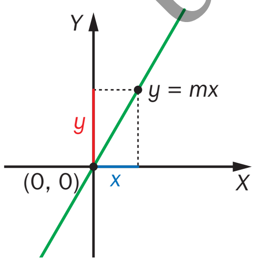
En este material, por cada 5 milímetros de deformación se requiere un aumento de 20 newtons en la fuerza deformadora.

> Las **funciones polinómicas de primer grado** se llaman funciones **lineales** si pasan por el origen de coordenadas, o **afines** si no lo hacen. Son de la forma $\boldsymbol{f(x) = mx + n}$, con $m \neq 0$, y su gráfica es una **recta** con **pendiente** m y **ordenada en el origen** n.

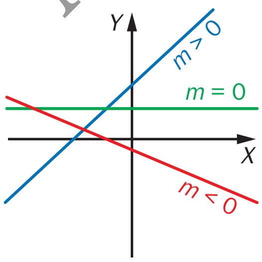
La **pendiente** de la recta viene dada por la expresión: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, donde Δy y Δx son, respectivamente, las variaciones o incrementos de la variable dependiente e independiente, proporcionales entre sí. Según el valor de m, al recorrer la gráfica desde la izquierda hacia la derecha según el sentido positivo del eje OX, se tiene que:

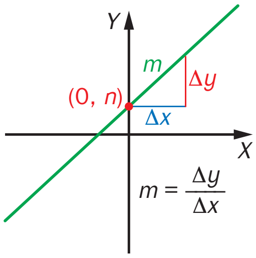
- Si $m > 0$, la función es **creciente** y su gráfica es una recta inclinada hacia arriba.
- Si $m < 0$, la función es **decreciente** y su gráfica es una recta inclinada hacia abajo.

Cuando $m = 0$, se trata, en realidad, de una función polinómica de grado 0, es decir, de la función **constante** $f(x) = n$, cuya gráfica es una recta horizontal de altura n.

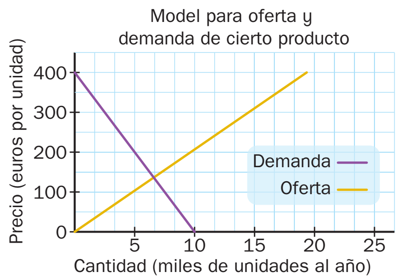


Función lineal





Función afín

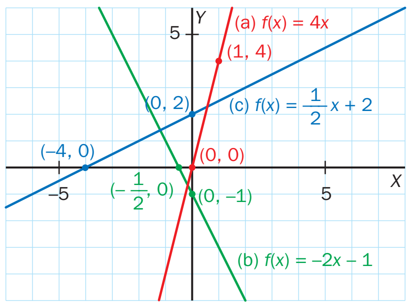


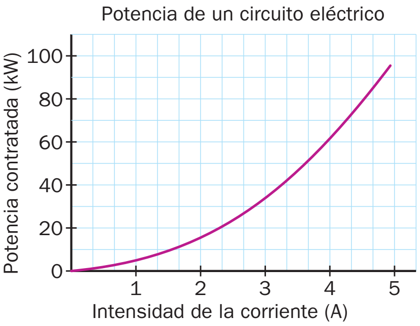
En este sencillo modelo de oferta-demanda, cada aumento de 5 000 unidades en la demanda está asociado a una disminución de 200 euros en el precio unitario.

Ejemplo 6. **Representa gráficamente estas funciones polinómicas de primer grado:**

a) $\boldsymbol{f(x) = 4x}$ ***b)*** $\boldsymbol{f(x) = -2x - 1}$ ***c)*** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x + 2}$

Para representar una recta, en primer lugar tenemos que fijarnos en el valor de la pendiente y en si esta es positiva —como en las funciones *(a)* y *(c)*—, o negativa —como en la función *(b)*—, con el fin de conocer su inclinación. Después tomamos dos puntos cualesquiera; por ejemplo, los puntos de corte con los ejes. Si la recta pasa por el origen —como ocurre con *(a)*— entonces será necesario coger algún otro punto.





La potencia consumida por un circuito eléctrico aumenta con el cuadrado de la intensidad de la corriente.

Funciones polinómicas de segundo grado

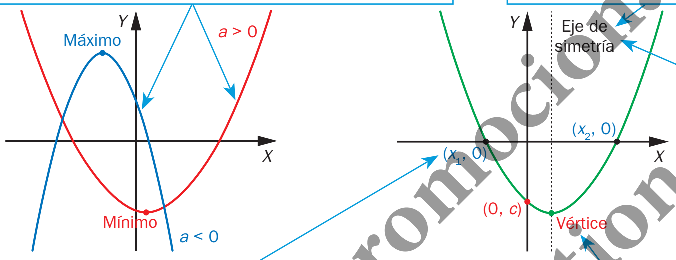
En ocasiones, la variable dependiente varía con el cuadrado de la variable independiente. A modo de ejemplo, la gráfica del margen muestra que la potencia consumida por un circuito eléctrico aumenta con el cuadrado de la intensidad de la corriente que circula por él. En casos como este, la gráfica de la función es una parábola.

> Las **funciones polinómicas de segundo grado** o **cuadráticas** son de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, con $a \neq 0$, y su representación gráfica es una **parábola.**

Las características principales de las funciones polinómicas de segundo grado son:

La parábola es **abierta hacia arriba** si $a > 0$, y **abierta hacia abajo** si $a < 0$.

Tiene un **eje vertical de simetría** que pasa por su vértice, y dos **ramas laterales.**



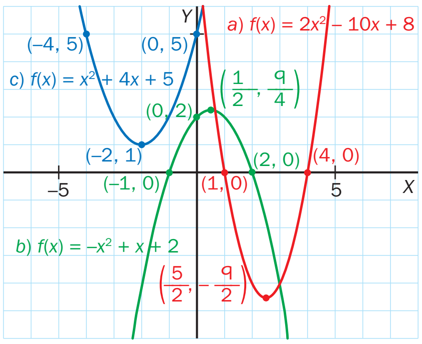
Si $b = 0$, el eje de simetría de la parábola coincide con el eje OY.

Poseen, como mucho, dos **puntos de corte** con el eje de abscisas OX:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Su **vértice** es el **mínimo** absoluto (si $a > 0$) o el **máximo** absoluto (si $a < 0$) de la función, y está situado en un punto de abscisas:

$$\boldsymbol{x_v = \frac{-b}{2a}}$$



Ejemplo 7. Representa gráficamente estas funciones polinómicas de segundo grado:

a) $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 10x + 8}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + x + 2}$ **c)** $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 4x + 5}$

En el caso de una parábola, observamos antes si el coeficiente a es positivo *(a* y *c)* o negativo *(b)* para determinar su curvatura. Después hallamos el vértice y los puntos de corte con los ejes. En caso de que la parábola no corte al eje OX (c), o bien lo haga en el vértice, toma otros puntos escogidos de manera estratégica.

Actividad resuelta 2

Obtén la expresión algebraica de:

a) La función polinómica de grado 1 cuyos puntos de corte con los ejes de coordenadas son $(0,–1)$ y $(2,0)$.

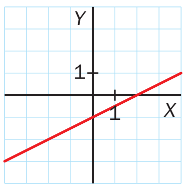
b) La función polinómica de grado 2 cuyos puntos de corte con los ejes de coordenadas son $(0,8)$, $(–4,0)$ y $(3,0)$.

a) Como el punto de corte de esta recta con el eje OY es $(0,–1)$, tenemos que $f(x) = mx - 1$.

Si, además, corta al eje OX en el punto $(2,0)$, se verifica que $0 = 2m - 1$, de donde $m = 1/2$.

Así pues, se trata de la recta cuya función es:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

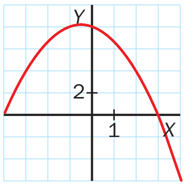


b) Los puntos de corte de esta parábola con el eje OX son $(–4,0)$ y $(3,0)$, así que la función puede expresarse como $f(x) = a(x+4)(x-3)$.

Por otro lado, corta al eje OY en el punto $(0,8)$, por lo que $8 = -12a \Rightarrow a = -2/3$.

Por tanto, la parábola tiene por función:

$$f(x) = -\frac{2}{3}(x+4)(x-3) = $$
$$= -\frac{2}{3}(x^2 + x - 12)$$



Actividades

11. Representa estas funciones polinómicas de primer grado:

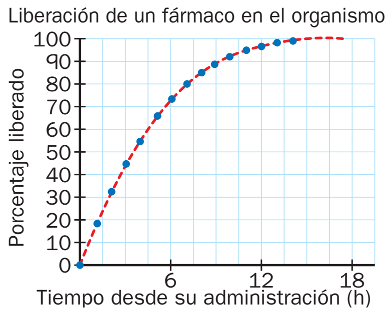
a) $f(x) = -3x$ *b)* $f(x) = 2x + 3$ *c)* $f(x) = 2 - 4x$

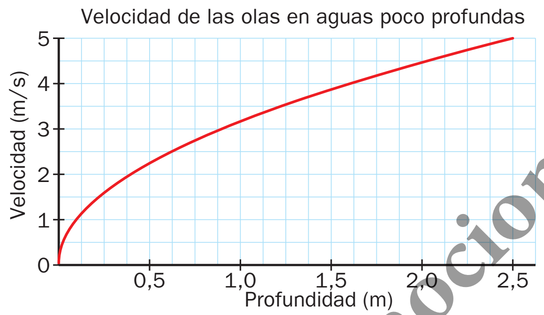
12. Representa estas funciones polinómicas de segundo grado:

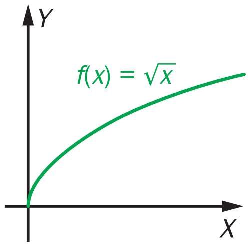
a) $f(x) = x^2 + 5x + 4$ *b)* $f(x) = -x^2 - 2x$ *c)* $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

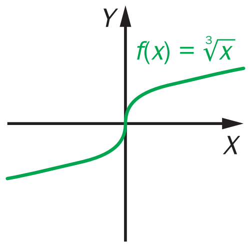
8 Funciones con radicales

Con cierta frecuencia, una variable puede depender de otra a través de una raíz, ya sea esta cuadrada, cúbica, o de algún otro índice. Por ejemplo, el tiempo transcurrido desde la administración de un determinado fármaco y la cantidad de este que se libera en el organismo se hallan relacionados a través de una raíz cúbica. Otro caso lo encontramos en el estudio del aumento de la velocidad de una ola en aguas poco profundas, que depende de la raíz cuadrada de la profundidad.









Las **funciones con radicales** son aquellas cuya expresión algebraica incluye la variable independiente en el interior de una **raíz de índice *n*:** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{g(x)}}$.

Una vez determinado el dominio $D(g)$ del radicando $g(x)$, entonces:

- Si n es **par,** $f(x)$ está definida para aquellos valores del dominio de $g(x)$ que hacen el radicando positivo o nulo: $D(f) = \{x \in D(g) | g(x) \geq 0\}$; en este caso, además, nos quedamos con el valor positivo de la raíz para garantizar la unicidad de las imágenes.
- Si n es **impar,** $f(x)$ está definida donde lo esté $g(x)$: $D(f) = D(g)$.

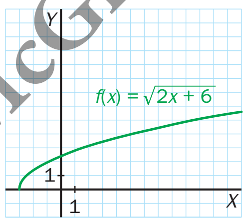
Ejemplo 8. Realiza la representación gráfica de algunas funciones con raíces:

a) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2x+6}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x-2}}$ **c)** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2-4}}$ **d)** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2+1}}$

Para representar estas funciones, localizamos los puntos de corte y evaluamos algunos otros puntos de sus respectivos dominios:

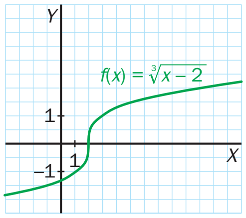
a) $2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D(f) = [-3, \infty)$

x	−3	−5/2	−1	0	3/2	5
y	0	1	2	$\sqrt{6}$	3	4



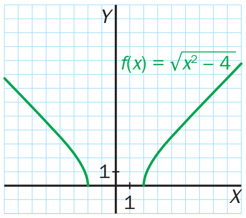
b) $D(f) = \mathbb{R}$

x	−6	0	1	2	3	10
y	−2	$-\sqrt[3]{2}$	−1	0	1	2



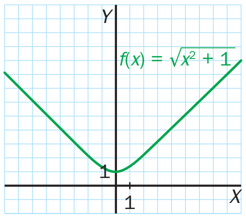
c) $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \leq -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow D(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

x	±2	±3	±4	±5	±6
y	..0	$\sqrt{5}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{32}$



d) $x^2 + 1 \geq 0 \forall x \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

x	0	±1	±2	±4	±5
y	..1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{26}$



Actividades

13. Representa las siguientes funciones con radicales:

a) $f(x) = \sqrt{4-2x}$ *b)* $f(x) = -\sqrt[3]{x+5}$

c) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ *d)* $f(x) = \sqrt{x^2+3}$

14. En unos mismos ejes, representa estas funciones con radicales dentro del intervalo $[0,2]$:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ *b)* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *c)* $f(x) = \sqrt[5]{x}$ *d)* $f(x) = \sqrt[10]{x}$

9 Funciones racionales

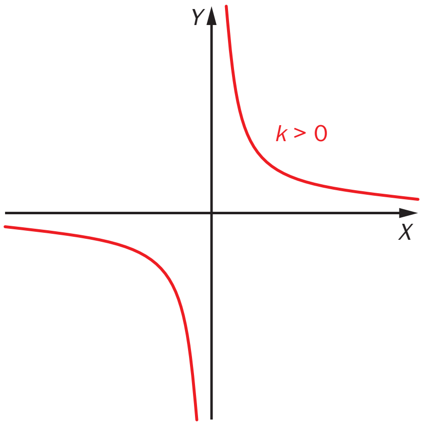
Si se toman dos polinomios cualesquiera, como, por ejemplo, $P(x) = x - 2$ y $Q(x) = x^2 - 1$, es posible construir la función que resulta de su cociente o razón:

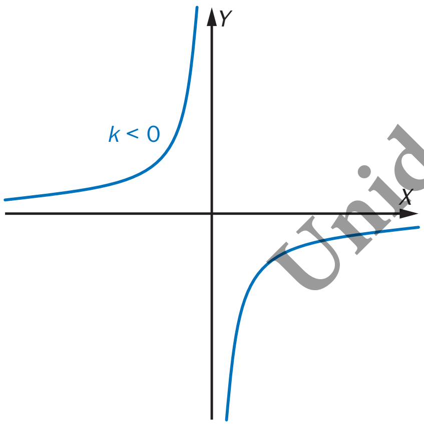
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-2}{x^2-1}$$

Esta función está bien definida en toda la recta real salvo en $x = \pm 1$, ya que estos valores anulan el denominador: $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Una **función racional** se define a partir del cociente entre dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, donde el grado de $Q(x)$ es mayor que cero: $\boldsymbol{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$.

El dominio de una función racional está formado por todos los números reales que no anulen el denominador: $D(f) = \{x \mid Q(x) \neq 0\}$.





Función de proporcionalidad inversa

La función racional más sencilla es $f(x) = k/x$, donde k es un número cualquiera distinto de cero. Dicha función establece una relación inversamente proporcional entre las variables x e $y = f(x)$, de forma que su producto se mantiene constante: $x \cdot y = k$. Así, al duplicar, por ejemplo, el valor de la variable independiente x, se reduce a la mitad el de la variable dependiente y.

La **función de proporcionalidad inversa** es la función racional $\boldsymbol{f(x) = \frac{k}{x}}$, con $k \neq 0$.

Su gráfica es una **hipérbola equilátera** cuyos ejes son los ejes de coordenadas.

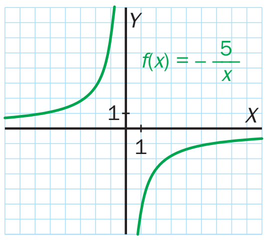
Las características de una función racional son:

- Su dominio es toda la recta real menos el valor $x = 0$: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Posee simetría respecto del origen de coordenadas, o sea, es una función impar.
- La función es decreciente si $k > 0$, y sus ramas se sitúan en el primer y tercer cuadrante.
- La función es creciente si $k < 0$, y sus ramas se sitúan en el segundo y cuarto cuadrante.
- Carece de puntos de corte con los ejes, aunque su gráfica se aproxima a estos tanto como queramos al prolongarla indefinidamente: al eje OX cuando tiende hacia $x = \pm\infty$, y al eje OY cuando nos acercamos a $x = 0$, tanto por la izquierda como por la derecha.

Ejemplo 9. Representa la función $\boldsymbol{f(x) = -\frac{5}{x}}$.

Como $k = -5 < 0$, la función es creciente y sus ramas están en el segundo y cuarto cuadrante. Representamos la función con ayuda de una tabla de valores.

x	±1	±2	±3	±4	±5
y	∓5	∓5/2	∓5/3	∓5/4	∓1



Actividades

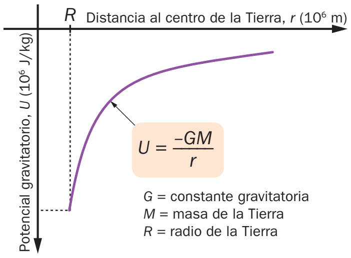
15. Representa estas funciones racionales y comprueba en cada una de ellas que el producto $x \cdot y$ se mantiene constante:

a) $f(x) = -\frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{4x}$

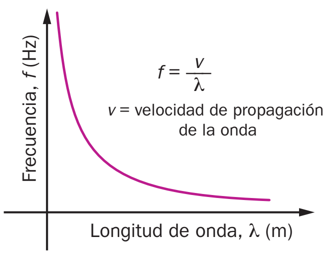
c) $f(x) = \frac{2}{3x}$ d) $f(x) = -\frac{3}{5x}$

16. Explica el comportamiento de las dos gráficas de la derecha como ejemplos de función de proporcionalidad inversa.

Potencial gravitatorio en torno a la Tierra



Frecuencia y longitud de onda



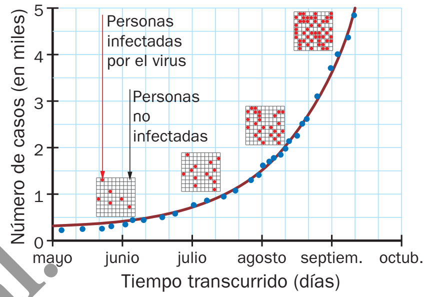
10 La función exponencial

Multitud de contextos físicos, químicos, biológicos, económicos o demográficos en los que aparece de manera natural un proceso de crecimiento o decrecimiento traen consigo la función exponencial. Así, por ejemplo, al representar los datos sobre la epidemia del virus del ébola se observa que, al transcurrir cierto intervalo de tiempo el número de infectados por el virus se duplica. Así pues, tras *n* periodos de tiempo, el número de personas infectadas será de

$$1\cdot\overbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}^{n\text{ veces}}=2^n,$$

y la epidemia evoluciona según una función exponencial creciente.

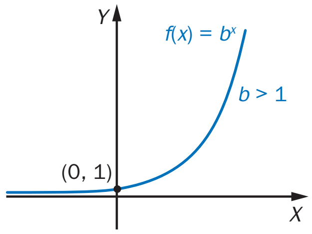
Epidemia de enfermedad por el virus del Ébola

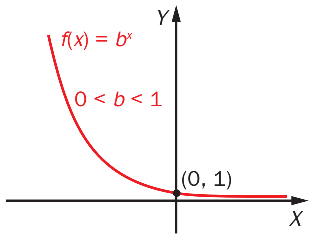


> Una **función exponencial** es de la forma $f(x)=b^x$, con $b>0$ y $b\neq 1$.

Las características de las funciones exponenciales son:

- Su dominio es toda la recta real: $D(f)=\mathbb{R}$; su recorrido solo es positivo: $R(f)=(0,\infty)$.
- Si $b>1$, es una función exponencial creciente, cuyo crecimiento es tanto más rápido cuanto mayor sea b; además, es el tipo de función con crecimiento más rápido.
- Si $0<b<1$, es una función exponencial decreciente.
- Su punto de corte con el eje *OY* es el $(0,1)$, pues $b^0=1$; todas ellas pasan, además, por el punto $(1,b)$, ya que $b^1=b$.
- Carece de puntos de corte con el eje *OX*, pero su gráfica se aproxima a él tanto como queramos al prolongarla indefinidamente hacia $x=-\infty$, si es una exponencial creciente $(b>1)$, o hacia $x=+\infty$, si es una exponencial decreciente $(0<b<1)$.
- La función exponencial varía en cada uno de sus puntos a un ritmo distinto, ya que su pendiente cambia; sin embargo, la variación relativa experimentada por la función en intervalos iguales se mantiene constante.

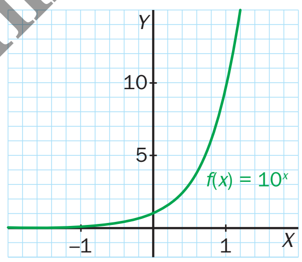




Ejemplo 10. Representa la función $f(x)=10^x$.

Dado que $b>1$, se trata de una función exponencial creciente. Representamos su gráfica a partir del punto de corte con el eje *OY* y de algunos otros puntos de su dominio.

x	−1	−1/2	0	1/2	1
y	1/10	$\sqrt{1/10}$	1	$\sqrt{10}$	10



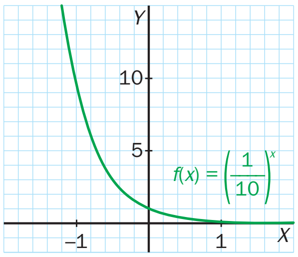
Piensa 4

Justifica esta última propiedad de la función exponencial.

Ejemplo 11. Representa la función $f(x)=(1/10)^x$.

Dado que $0<b<1$, se trata una función exponencial decreciente. Representamos su gráfica a partir del punto de corte con el eje *OY* y de algunos otros puntos de su dominio.

x	−1	−1/2	0	1/2	1
y	10	$\sqrt{10}$	1	$\sqrt{1/10}$	1/10



Actividades

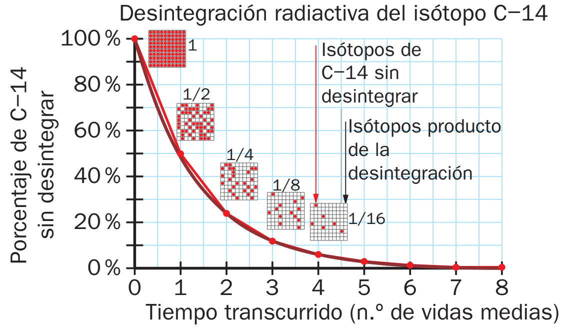
17. Representa las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x)=(3/2)^x$ b) $f(x)=(2/3)^x$

c) $f(x)=2^{-x}$ d) $f(x)=(1/2)^{-x}$

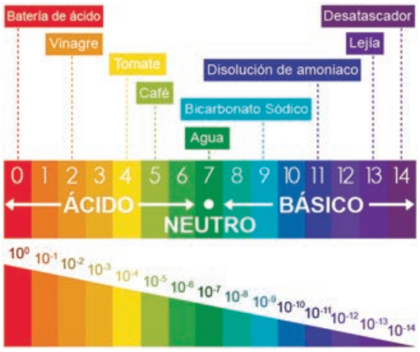
18. La gráfica que aparece representada a la derecha ¿se corresponde con una función exponencial? Interpreta los datos y justifica tu respuesta.

Desintegración radiactiva del isótopo C−14

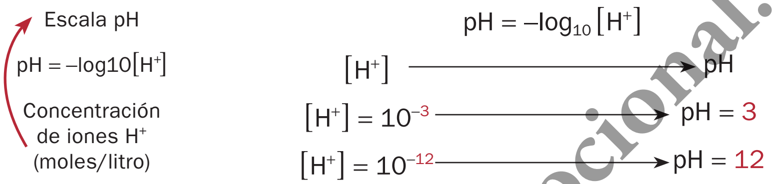


11 La función logarítmica

> **!! Ojo**
>
> No olvides el concepto de logaritmo:
>
> $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$
>
> Además, si no se especifica la base, b, del logaritmo, es que se trata del **logaritmo neperiano** o **natural,** cuya base es el número $e = 2{,}718281\ldots$
>
> $\log x = y \Leftrightarrow e^y = x$

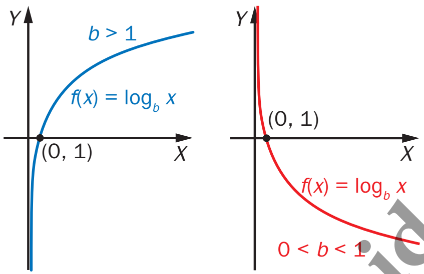


Algunas variables o magnitudes varían en un rango muy amplio de valores y, en ocasiones, lo hacen, además, de forma muy rápida. Esto dificulta su representación gráfica y el estudio de las funciones asociadas a dichas variables. Una manera de «domesticar» su comportamiento y de convertir su análisis en algo más manejable consiste en tomar logaritmos. Por ejemplo, al estudiar la acidez de las disoluciones en química, es más cómodo tratar con el pH, que conlleva emplear números sencillos, como 3 o 12, en lugar de trabajar con concentraciones de 10^{-3} o 10^{-12} moles de iones H^+ por cada litro de disolución. Para ello es necesario pasar de una variable (la concentración de iones H^+) a la otra (su equivalencia en la escala de pH), para lo cual se define la siguiente función:



Un «truco» parecido a este también se emplea, por ejemplo, en acústica al definir el nivel de intensidad sonora, en decibelios; en sismología, para expresar por medio de la escala de Richter la energía liberada en un terremoto; o en astronomía, para cuantificar la cantidad de luz que se recibe de un astro a través de su magnitud aparente.

> Una **función logarítmica** tiene la forma $f(x) = \log_b x$, con $b > 0$ y $b \neq 1$.



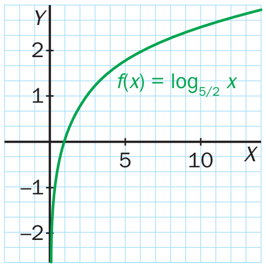
Las características de una función logarítmica son:

- Solo está definida para argumentos estrictamente positivos: $D(f) = (0, \infty)$; su recorrido, en cambio, es toda la recta real: $R(f) = \mathbb{R}$.
- Si $b > 1$, es una función logarítmica creciente, y su crecimiento es tanto más lento cuanto mayor sea b; de hecho, se trata del tipo de función con crecimiento más lento.
- Si $0 < b < 1$, es una función logarítmica decreciente.
- Su punto de corte con el eje OX es el $(1,0)$, pues $\log_b 1 = 0$; todas ellas pasan, además, por el punto $(b,1)$, ya que $\log_b b = 1$.
- Carece de puntos de corte con el eje OY, aunque su gráfica se aproxima a él tanto como queramos al prolongarla indefinidamente cuando nos acercamos a $x = 0$, bien hacia $-\infty$ —si es creciente $(b > 1)$—, o bien hacia $+\infty$ —si es decreciente $(0 < b < 1)$—.

Ejemplo 12. Realiza la representación gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_{5/2} x$.

Como $b > 1$, es una función logarítmica creciente. Trazamos su gráfica a partir del punto de corte con el eje OX y de algunos otros puntos de su dominio.

x	4/25	2/5	1	5/2	25/4
y	–2	–1	0	1	2



Actividades

19. Representa las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x) = \log_{1/2} x$ *b)* $f(x) = \log_{3/2} x$

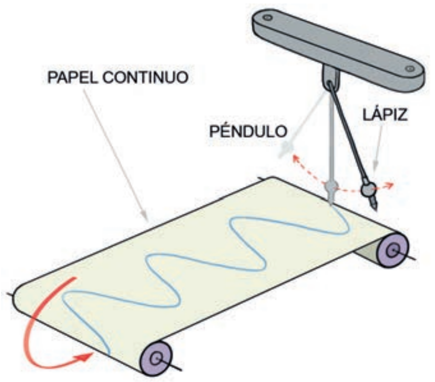
c) $f(x) = \log_2(-x)$ *d)* $f(x) = \log_2(1/x)$

20. Busca información acerca de situaciones en las que resulte conveniente emplear escalas logarítmicas. Defínelas, en cada caso, mediante una función logarítmica adecuada y represéntalas.

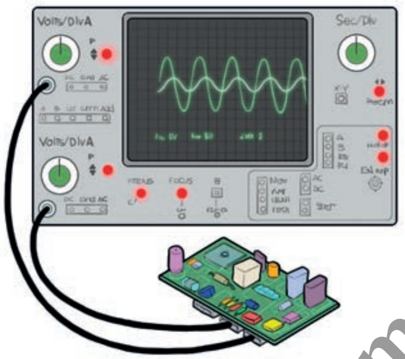
12 Funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno aparecen de forma natural en muchos fenómenos en los que se observa la oscilación periódica de alguna magnitud: los movimientos circulares o armónicos, la vibración de los materiales, las señales de los circuitos electrónicos y la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas son solo algunos ejemplos de ello.

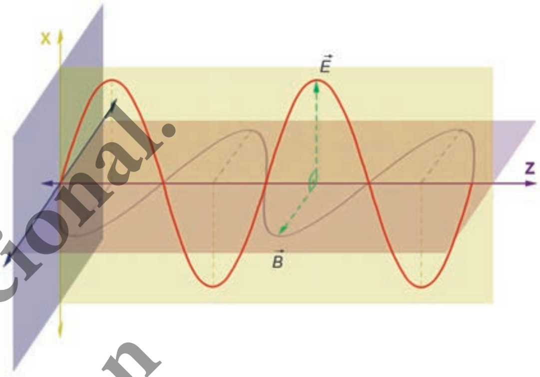
Elongación en el movimiento armónico de un péndulo



Oscilación del voltaje, V, en un circuito electrónico



Vibración del campo eléctrico, E, y magnético, B, en la propagación de una onda electromagnética



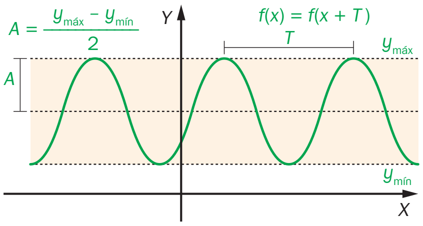
Funciones seno y coseno

En todos estos casos, las magnitudes oscilan de forma periódica entre dos valores extremos, $y_{máx}$ e $y_{mín}$, a través de las funciones **seno** o **coseno** de cierta **amplitud, *A*,** y **periodo, *T*.**

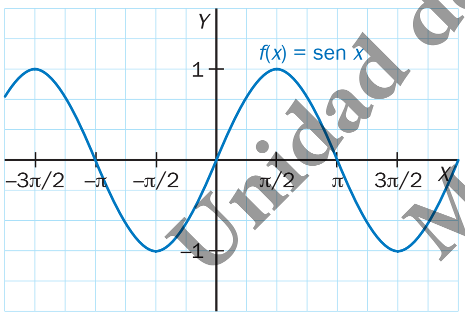
Como se observa en la gráfica del margen, característica de las funciones de este tipo, la amplitud y el periodo de oscilación se hallan según:

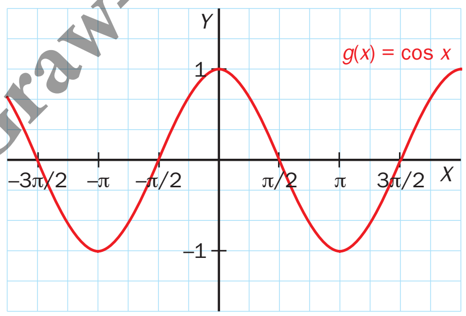
$$A = \frac{y_{máx} - y_{mín}}{2} \qquad T \mid f(x) = f(x+T)$$

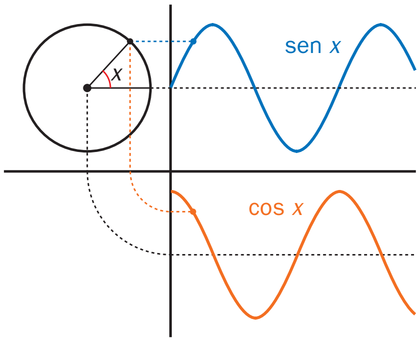
Amplitud y periodo de una función tipo seno o coseno



Si observamos cómo varían el seno y el coseno a medida que el ángulo recorre toda la circunferencia, obtenemos las gráficas de estas funciones:







- Las dos son funciones periódicas, de periodo $T = 2\pi$ radianes.
- Su dominio es $\mathbb{R}$, pero su recorrido está restringido al intervalo cerrado $[-1,+1]$; son, pues, funciones acotadas de amplitud $A = 1$.
- La función seno es impar y la función coseno, par.

Ejemplo 13. Determina la amplitud y el periodo de la función $f(x) = 1 + 5\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Dado que la función oscila entre los extremos $y_{máx} = 6$ e $y_{mín} = -4$, su amplitud es:

$$A = \frac{y_{máx} - y_{mín}}{2} = \frac{6-(-4)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Como el periodo de una función coseno es 2π, tenemos que:

$$5\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 5\cos\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = 5\cos\left[\frac{1}{2}\overbrace{(x + 4\pi)}^{x+T}\right] \Rightarrow T = 4\pi$$

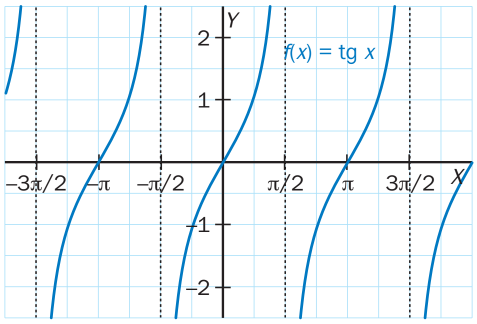
@ www Actúa

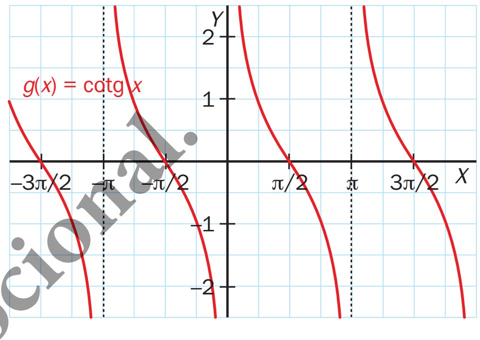
Con estas animaciones interactivas podrás experimentar por tu cuenta cómo varía cada una de las razones trigonométricas en función del ángulo. Pero ¡ten cuidado!, en ocasiones da un poco de vértigo.

Funciones tangente y cotangente

Al estudiar tales fenómenos oscilatorios, además de las funciones seno y coseno pueden aparecer las funciones correspondientes al resto de razones trigonométricas, como la tangente y la cotangente, definidas a partir de las funciones seno y coseno según los cocientes:

$$\boldsymbol{f(x) = \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}} \qquad \boldsymbol{g(x) = \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}}$$



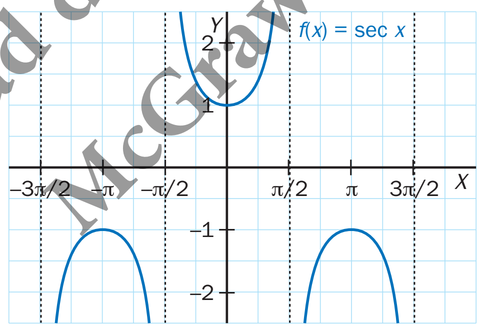


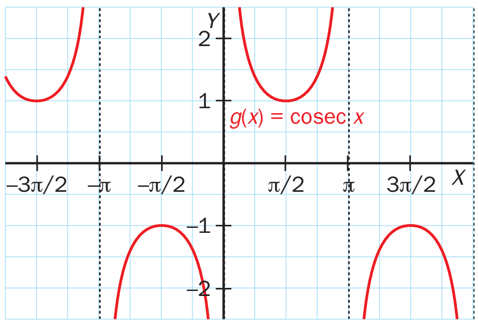
- Ambas son funciones periódicas, de periodo $T = \pi$ radianes.
- Las funciones tangente y cotangente no están definidas donde se anulan, respectivamente, las funciones coseno y seno; su recorrido, en cambio, es toda la recta real.
- Las dos son funciones impares.

Funciones secante y cosecante

Las funciones secante y cosecante se definen, respectivamente, como las razones inversas del coseno y del seno:

$$\boldsymbol{f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}} \qquad \boldsymbol{g(x) = \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}}$$





!! Ojo

El argumento de las funciones trigonométricas representa un ángulo que expresamos siempre en **radianes.**

- Ambas son funciones periódicas, de periodo $T = 2\pi$ radianes.
- Las funciones secante y cosecante no están definidas donde se anulan el coseno y el seno, respectivamente; el recorrido de ambas es $(-\infty, -1] \cup [+1, \infty)$.
- La función secante es par y la función cosecante, impar.

Actividades

21. Representa estas funciones trigonométricas y halla su amplitud y periodo:

a) $f(x) = -2\,\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right) + 5$ *b)* $f(x) = 3 - 4\cos(2x)$

22. Representa las siguientes funciones trigonométricas y compáralas con las gráficas de las funciones sen x y cos x. ¿A qué conclusión llegas?

a) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *b)* $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

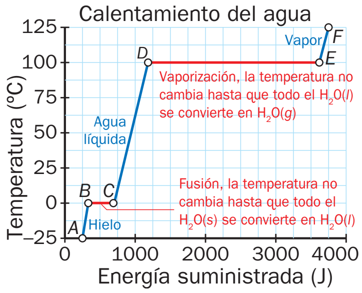
13 Funciones definidas a trozos

A veces, las funciones tienen un aspecto algo peculiar, muy distinto del que presentan las estudiadas hasta este momento. He aquí algunos ejemplos:

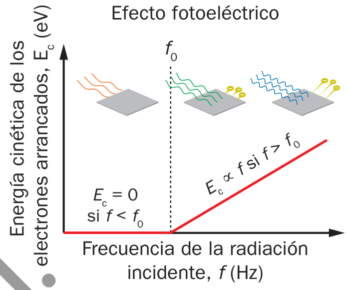
Posología pediátrica de un medicamento

Masa corporal	Dosis diaria total
Menos de 4,5 kg	40 mg/kg
De 4,5 a 7 kg	200 mg
De 7 a 11,5 kg	400 mg
De 11,5 a 23 kg	800 mg
De 23 a 45 kg	1 g
Más de 45 kg	1,6 g

La administración de fármacos en pediatría suele ser diferente en función del intervalo de masa corporal en que se encuentre el niño.



La temperatura aumenta con la energía suministrada mientras no se produce un cambio de fase; en cambio, cuando este tiene lugar, la temperatura permanece constante.



Por debajo de una frecuencia umbral, f_0, la luz que incide en un metal no arranca sus electrones; por encima, estos salen con una energía cinética, E_c, proporcional a la frecuencia, f, de la radiación incidente.

Este tipo de funciones se denominan **funciones definidas a trozos;** es decir, aquellas en las que el valor de la función se obtiene de distinta manera según el intervalo de la variable independiente que se esté considerando.

Una **función definida a trozos** posee diferentes fórmulas o expresiones algebraicas para distintos intervalos de la variable independiente.

Para obtener la gráfica de una función definida a trozos deben representarse todos sus tramos de acuerdo con la función presente en cada uno de ellos; asimismo, hay que prestar especial atención al valor que adopta la función en los extremos de cada intervalo.

5 *Piensa*

Observa la gráfica para la administración pediátrica de un fármaco, escribe la expresión de la dosis diaria de medicamento, *D* (en gramos), en función de la masa corporal del niño, *m* (en kilogramos) y realiza su representación gráfica.

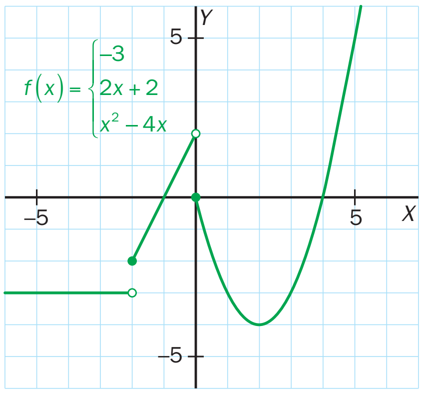
Ejemplo 14. Representa esta función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x<-2\\ 2x+2 & \text{si } -2\le x<0\\ x^2-4x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

El primer trozo, definido para $x < -2$, es la función constante $y = -3$, es decir, una recta horizontal de altura –3.

El segundo trozo, definido para $-2 \le x < 0$, consiste en la recta $y = 2x + 2$, de pendiente $m = 2$, cuyos puntos de corte con los ejes son (0,2) y (–1,0).

El tercer trozo, definido para $x \ge 0$, es una parábola abierta hacia arriba, con (0,0) y (4,0) como puntos de corte con los ejes y vértice situado en (2,–4).



Función valor absoluto

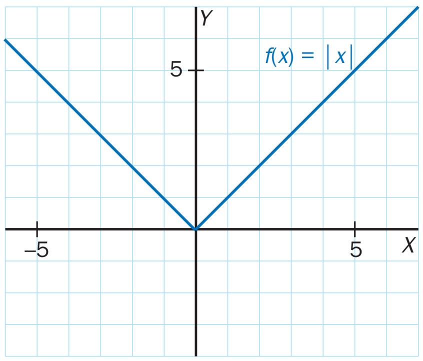
El **valor absoluto** de un número real, $|a|$, coincide con dicho número si este es positivo o nulo, o bien con su opuesto, $-a$, si es negativo; así pues, consiste en realizar la operación:

$$|a|=\begin{cases}-a & \text{si } x<0\\ a & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

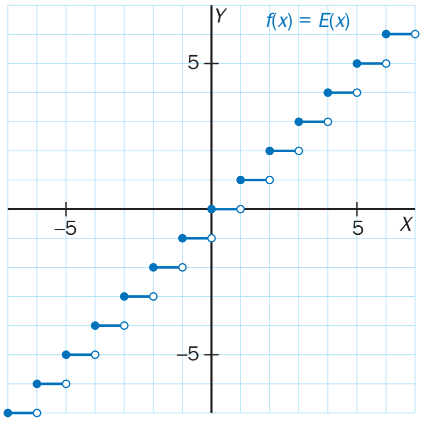
Por tanto, tomar el valor absoluto de un número real cualquiera x puede considerarse como una función definida a trozos, ya que dicha operación exige cambiar el signo de su argumento solo cuando este es negativo:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

Su gráfica consiste en un par de rectas que pasan por el origen de coordenadas: una de pendiente negativa, $y = -x$, antes de $x = 0$, y otra de pendiente positiva, $y = x$, después.



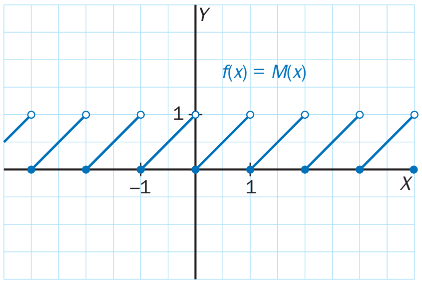
Función parte entera



La **parte entera** de un número real, $\boldsymbol{E(a)}$, es el mayor **número entero** menor o igual que aquel; por ejemplo, $E(4{,}8) = 4$, $E(2) = 2$ y $E(-3{,}6) = -4$. Así pues, podemos definir una función definida a trozos que asigne a cada número real x su parte entera:

$$f(x) = E(x) = \begin{cases} & \dots \\ -2 & \text{si} \quad -2 \le x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ & \dots \end{cases} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = E(x) = n} \ \textbf{si } \boldsymbol{x \in [n, n+1)}, \ \textbf{con } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$$

Función parte decimal



Cualquier número real puede ser expresado como la suma de una parte entera, dada por el entero inmediatamente menor a él, y una parte fraccionaria; por ejemplo, $2{,}25 = 2 + 0{,}25$ y $-2{,}75 = -3 + 0{,}25$.

Definimos así la función **parte decimal** o **mantisa, M** $\boldsymbol{(x)}$, como aquella que asocia cada número real con su correspondiente parte fraccionaria, según la expresión:

$$\boldsymbol{f(x) = M(x) = x - E(x)}$$

Dado que la hemos construido a partir de la función parte entera, la función parte decimal es, como aquella, una función definida a trozos. Además, como se puede comprobar en su gráfica, se trata de una función periódica con periodo $T = 1$, pues la parte decimal se repite para cada unidad entera.

Actividad resuelta 3

Representa las funciones:

a) $f(x) = |x - 1|$

b) $g(x) = |x + 1|$

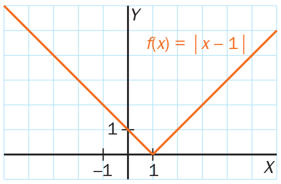
a) $f(x) = |x - 1|$ puede considerarse la siguiente función a trozos:

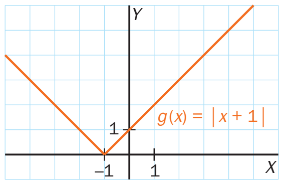
$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cuya gráfica está compuesta por la recta $y = -x + 1$, cuando $x < 1$, y por la recta $y = x - 1$, cuando $x \ge 1$.

b) De forma análoga, $g(x) = |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \ge -1 \end{cases}$

cuya gráfica consiste en la recta $y = -x - 1$, cuando $x < -1$, y por la recta $y = x + 1$, cuando $x \ge -1$.





Actividades

23. Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 5 - x & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si} \quad -1 < x \le 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

24. Representa la función $f(x) = |2x - 6|$, teniendo en cuenta que esta es, en realidad, la función definida a trozos:

$$f(x) = |2x - 6| = \begin{cases} -(2x - 6) = -2x + 6 & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x - 6 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

25. El estacionamiento regulado de vehículos dentro del casco histórico de cierta población tiene una tarifa de 50 céntimos por la primera media hora más 25 céntimos por cada media hora extra o fracción de la misma. Expresa como una función definida a trozos el coste del estacionamiento según tiempo transcurrido y realiza su representación gráfica.

14 Operaciones con funciones

Con las funciones también es posible realizar determinadas operaciones y obtener así nuevas funciones con las que describir otros muchos fenómenos.

Suma, diferencia, producto y cociente

A partir de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, con dominios $D(f)$ y $D(g)$, podemos definir las funciones:

- **Suma o diferencia:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ con $x \in D(f) \cap D(g)$
- **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ con $x \in D(f) \cap D(g)$
- **Cociente:** $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ con $x \in D(f) \cap D(g) - \{x | g(x) = 0\}$

Ejemplo 15. A partir de las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = x^2 - 1$, cuyos dominios son $D(f) = [-2, \infty)$ y $D(g) = \mathbb{R}$, define las funciones suma, diferencia, producto y cociente:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + x^2 - 1$ **2.** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+2} \cdot (x^2 - 1)$

3. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - x^2 + 1$ **4.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$

Las tres primeras tienen como dominio $D(f) \cap D(g) = [-2, \infty) \cap \mathbb{R} = [-2, \infty)$; para la función cociente, excluimos los valores que anulan su denominador, luego su dominio resulta ser $[-2, \infty) - \{\pm 1\}$.

Composición de funciones

Cuando hablamos de la composición de funciones nos referimos a introducir una función como variable «independiente» de otra función; o lo que es igual, hacer que una función f actúe primero sobre una variable x, para dar como resultado $f(x)$, y que después otra función g opere sobre dicho valor a través de $g[f(x)]$:

La función **f compuesta con g** es aquella función $g \circ f$ que transforma x en $g[f(x)]$, según la expresión $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$, donde $x \in D(f)$ y $f(x) \in D(g)$.

Ejemplo 16. Con las funciones del Ejemplo 15, realiza las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (\sqrt{x+2})^2 - 1 = x + 1$; $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{(x^2-1)+2} = \sqrt{x^2+1}$

El dominio de $g \circ f$ está formado por los valores del dominio de $f(x)$ que hacen que el valor de $f(x)$ caiga dentro del dominio de $g(x)$:

$$D(f) = [-2, \infty) \text{ y } R(f) = [0, \infty); \text{ como } D(g) = \mathbb{R} \Rightarrow D(g \circ f) = [-2, \infty)$$

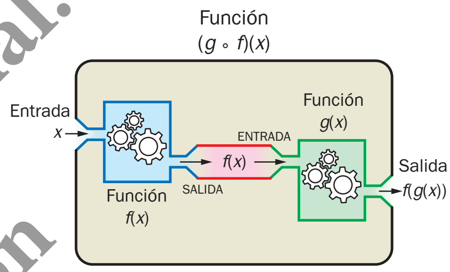
El dominio de $f \circ g$ está formado por los valores del dominio de $g(x)$ que hacen que el valor de $g(x)$ caiga dentro del dominio de $f(x)$:

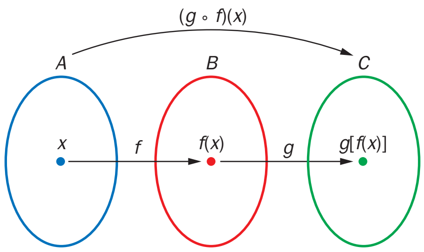
$$D(g) = \mathbb{R} \text{ y } R(g) = [-1, \infty); \text{ como } D(f) = [-2, \infty) \Rightarrow D(f \circ g) = \mathbb{R}$$

Ojo

El dominio de las funciones suma, diferencia y producto, $f \pm g$ y $f \cdot g$, está formado por el conjunto de valores que pertenecen a la **intersección de los dominios de f y g.**

Para el dominio de la **función cociente,** f/g, de la intersección de los dominios de f y g quedan **excluidos los valores que anulan el denominador.**



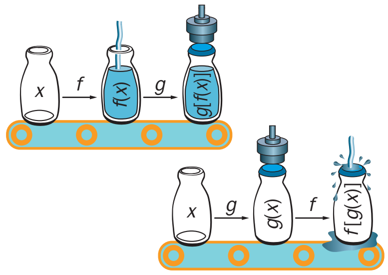


Ojo

La composición de funciones no es, en general, una operación conmutativa:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Así que ten mucho cuidado con el orden en que la realizas...



Actividades

26. Con las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$ realiza las siguientes operaciones y halla los dominios de las funciones que obtengas como resultado:

a) $f+g$ *b)* $f-g$ *c)* $f \cdot g$ *d)* $\dfrac{f}{g}$

e) $\dfrac{g}{f}$ *f)* g^2 *g)* $f \circ g$ *h)* $g \circ f$

27. ¿Cómo y con qué operaciones expresarías estas funciones?

a) El beneficio, *B*, a partir del coste, *C*, y los ingresos, *I*, en la fabricación y venta de *x* unidades de un producto.

b) La velocidad de conexión a una red, *v*, en función del tiempo, *t*, a partir de la velocidad en función del número de equipos conectados, *n*, y de este en función del tiempo.

15 Transformación de funciones

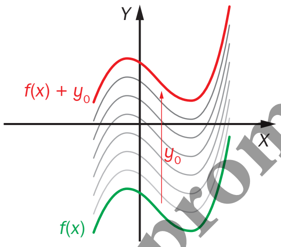
A partir de las funciones elementales que se han visto hasta ahora, podemos construir muchas otras sin más que someterlas a sencillas transformaciones, como trasladar, reflejar o deformar la gráfica de la función. Estas transformaciones permiten obtener otra función relacionada con la primera que puede ayudar a resolver problemas similares.

Traslaciones

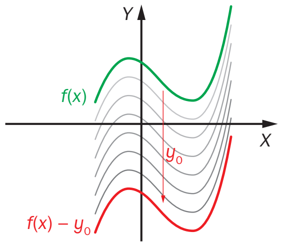
La **traslación vertical** de $f(x)$ en y_0 unidades hacia arriba (si $y_0 > 0$) o hacia abajo (si $y_0 < 0$) consiste en añadir la cantidad y_0 al valor de la función para que este aumente o disminuya, respectivamente, en dicha cantidad, obteniéndose así la nueva función $f(x) + y_0$.

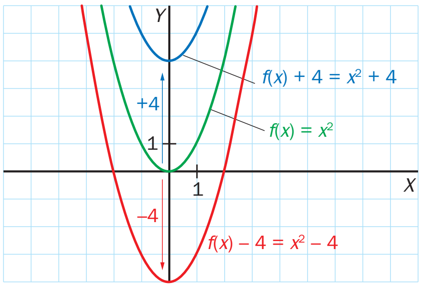
La gráfica de la función $f(x) + y$, es la de $f(x)$ **trasladada verticalmente** y_0 unidades:

Hacia **arriba,** si y_0 es **positivo:**



Hacia **abajo,** si y_0 es **negativo:**





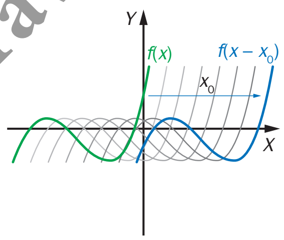
Ejemplo 17. Traslada la gráfica de la función $f(x) = x^2$ cuatro unidades hacia arriba o hacia abajo.

Transformamos dicha función en $f(x)+4 = x^2+4$ o $f(x)-4 = x^2-4$, respectivamente.

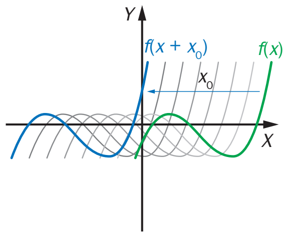
La **traslación horizontal** de $f(x)$ en x_0 unidades hacia la derecha (si $x_0 > 0$) o hacia la izquierda (si $x_0 < 0$) equivale a desplazar la variable independiente x la misma cantidad, pero en sentido contrario; esto es, a trasladarla $-x_0$ unidades. Construimos así la nueva función $f(x - x_0)$.

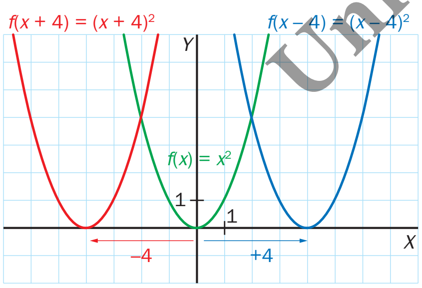
La gráfica de la función $f(x - x_0)$ es la de $f(x)$ **trasladada horizontalmente** x_0 unidades:

Hacia la **derecha,** si x_0 es **positivo:**



Hacia la **izquierda,** si x_0 es **negativo:**





Ejemplo 18. Traslada la gráfica de la función $f(x) = x^2$ cuatro unidades hacia la derecha o hacia la izquierda.

Hacemos, respectivamente:

$$f(x-4) = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 \qquad \text{o} \qquad f(x+4) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

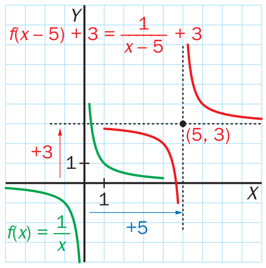
Actividad resuelta 4

Obtén la gráfica correspondiente al desplazar cinco unidades hacia la derecha y tres hacia arriba la hipérbola equilátera de la función de proporcionalidad inversa: $f(x) = 1/x$.

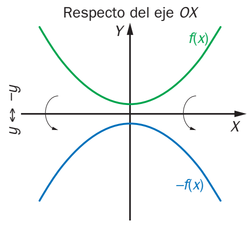
Obtenemos la gráfica de la función:

$$f(x-5) + 3 = \frac{1}{x-5} + 3 = \frac{3x-14}{x-5}$$

Comprobamos que se trata de otra hipérbola equilátera con sus ejes centrados en el punto $(5,3)$.

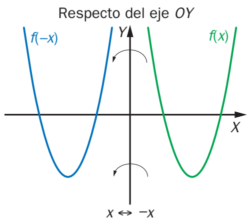


Simetrías



Reflejar la gráfica de la función $f(x)$ con respecto al eje OX consiste en voltearla verticalmente cambiando el signo de la variable dependiente; así, cuando y pasa a ser $-y$, transformamos la función $f(x)$ en $-f(x)$.

> La gráfica de la función $-\boldsymbol{f(x)}$ es la gráfica **simétrica** de $f(x)$ respecto del eje ***OX***.



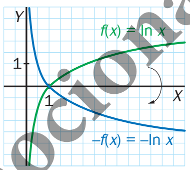
Reflejar la gráfica de la función $f(x)$ con respecto al eje OY consiste en voltearla horizontalmente cambiando el signo de la variable independiente; así, cuando x pasa a ser $-x$, transformamos la función $f(x)$ en $f(-x)$.

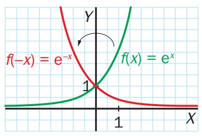
> La gráfica de la función $\boldsymbol{f(-x)}$ es la gráfica **simétrica** de $f(x)$ respecto del eje ***OY***.

Ejemplo 19. Determina la gráfica simétrica de $f(x) = \log x$ con respecto al eje *OX* y la gráfica simétrica de $f(x) = e^x$ con respecto al eje *OY*.

La gráfica simétrica de $f(x) = \log x$ con respecto al eje OX es $-f(x) = -\log x$.

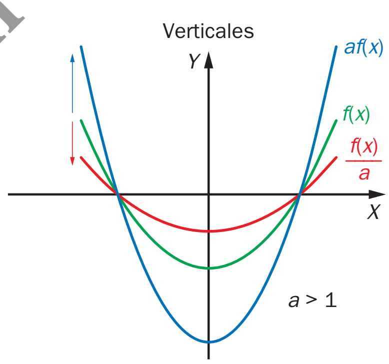
La gráfica simétrica de $f(x) = e^x$ con respecto al eje OY es $f(-x) = e^{-x}$.





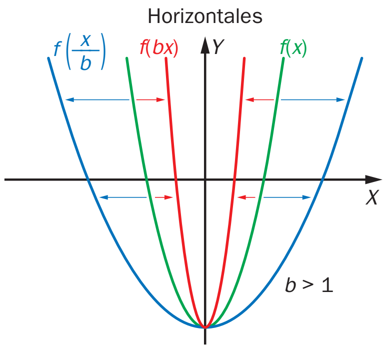
Dilataciones y contracciones

Multiplicar una función $f(x)$ por un factor $a > 1$ incrementa en un factor a su valor, lo cual equivale a dilatar o estirar su gráfica verticalmente en dicho factor. Por el contrario, dividirla entre ese mismo número reduce su valor entre a, es decir, la contrae verticalmente.



> - La gráfica de $\boldsymbol{a \cdot f(x)}$ se obtiene al **dilatar** en un factor a en **dirección vertical** la gráfica de $f(x)$.
> - La gráfica de $\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{a}}$ se obtiene al **contraer** en un factor a en **dirección vertical** la gráfica de $f(x)$.

Multiplicar la variable independiente por un número $b > 1$ estira la escala del eje OX en dicho factor; como resultado, la gráfica de la función $f(x)$ queda encogida con respecto al eje horizontal. En cambio, si dividimos la variable x entre ese número, la escala del eje OX se contrae, y ahora la gráfica de la función queda estirada con respecto al eje horizontal.

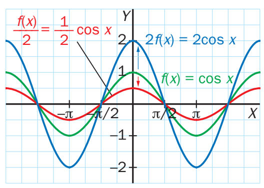


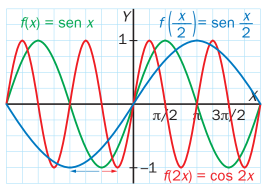
> - La gráfica de $\boldsymbol{f(bx)}$ se obtiene al **contraer** en un factor b en **dirección horizontal** la gráfica de $f(x)$.
> - La gráfica de $\boldsymbol{f\left(\frac{x}{b}\right)}$ se obtiene al **dilatar** en un factor b en **dirección horizontal** la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo 20. Dilata o contrae verticalmente en un factor 2 la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ y horizontalmente en un factor 2 la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Dilatar o contraer verticalmente en un factor 2 la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ nos da como resultado las gráficas de las funciones $2f(x) = 2\cos x$ y $\frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}\cos x$.

Contraer o dilatar horizontalmente en un factor 2 la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ nos da como resultado las gráficas de las funciones $f(2x) = \operatorname{sen} 2x$ y $f\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$.





Actividades

28. Realiza estas traslaciones y representa las gráficas:

a) $f(x) = 2x - 5$ dos unidades hacia arriba y tres a la derecha.

b) $f(x) = e^x$ media unidad hacia abajo y una a la izquierda.

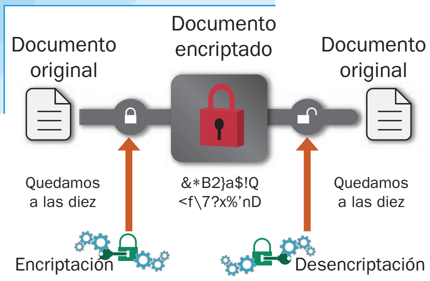
c) $f(x) = \log x$ una unidad hacia abajo y dos a la derecha.

29. Realiza estas transformaciones y representa las gráficas:

a) La simétrica de $f(x) = \sqrt{x+1}$ con respecto al eje OX.

b) La simétrica de $f(x) = x^2 + x - 2$ con respecto al eje OY.

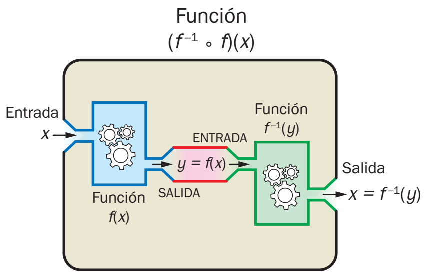
c) $f(x) = 3x + 5$ dilatada horizontalmente en un factor dos.



16 La función inversa

Al mandar un correo electrónico, su contenido queda cifrado, por seguridad, mediante un algoritmo de encriptación; cuando la información llega a su destinatario, otro algoritmo decodifica el mensaje para devolverlo a su estado legible inicial. Este segundo algoritmo efectúa el proceso inverso del realizado por el primero, deshaciendo lo que aquel hizo, de forma que la actuación consecutiva de ambos deja invariable el documento original.

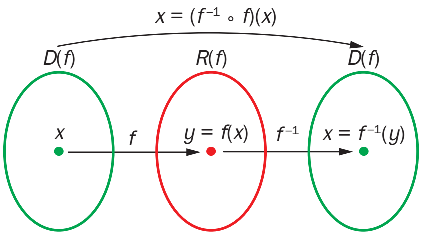
Eso es, precisamente, lo que hace la función inversa f^{-1} de una función f: operar sobre los valores $y = f(x)$ de su imagen para regresar a los valores originales del dominio de f mediante $x = f^{-1}(y)$. El dominio de la función inversa es, por tanto, el recorrido de la función original; por consiguiente, para poder definir la función inversa, a cada valor del recorrido de f le ha de corresponder un único valor en su dominio.



La **función inversa, f^{-1}**, de una función f es aquella para la cual se cumple que: si $y = f(x)$ para cada valor x de su dominio, entonces $x = f^{-1}(y)$.

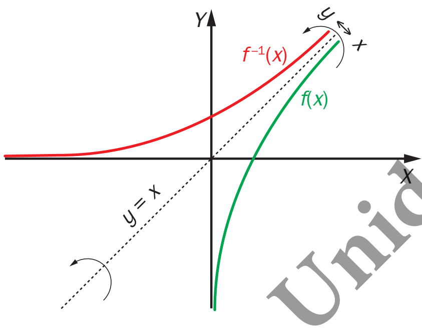
Esto implica que la acción conjunta de ambas funciones sobre la variable x deja inalterado el valor de esta; es decir, su composición es la función identidad, $I(x) = x$:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = x, \text{ o bien } \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = x$$



En la función inversa f^{-1}, las variables x e y han intercambiado sus papeles, lo cual equivale a voltear la gráfica de f con respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Así pues, las gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Para obtener la función inversa de manera analítica, despejamos de la expresión $y = f(x)$ la variable x, expresándola en función de la variable y según $x = f^{-1}(y)$; después, renombramos las variables para escribirlo de la forma habitual, $y = f^{-1}(x)$.



Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 21. **Halla analítica y gráficamente las inversas de algunas funciones sencillas, comprobando, en cada caso, que mediante la composición, en cualquier orden, de una función con su inversa resulta siempre la función identidad:**

a) $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$ ***b)*** $\boldsymbol{f(x) = x^2\ (x \geq 0)}$ ***c)*** $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ ***d)*** $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

a) $f(x) = 2x + 1 \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x \leftrightarrow y:\ y = \frac{x-1}{2}]{\text{1.º Despejamos } x:\ y = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}} f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = \frac{(2x+1)-1}{2} = x,$$

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x$$

b) $\underset{(\text{con } x \geq 0)}{f(x) = x^2} \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x \leftrightarrow y:\ y = \sqrt{x}]{\text{1.º Despejamos } x:\ y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}} f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = \sqrt{(x^2)} = x, \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

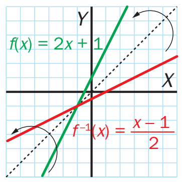
c) $f(x) = x^3 \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x \leftrightarrow y:\ y = \sqrt[3]{x}]{\text{1.º Despejamos } x:\ y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = \sqrt[3]{(x)^3} = x, \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

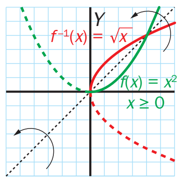
d) $f(x) = e^x \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x \leftrightarrow y:\ y = \log x]{\text{1.º Despejamos } x:\ y = e^x \Rightarrow x = \log y} f^{-1}(x) = \log x$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = \log\left(e^x\right) = x, \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = e^{(\log x)} = x$$

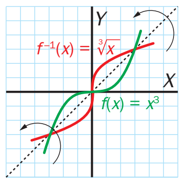
a)



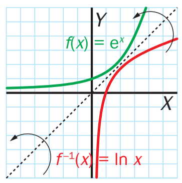
b)



c)



d)



!! Ojo

No confundas la **función inversa** de una función, que expresamos como:

$$f^{-1}(x)$$

con el **valor inverso** de una función, que denotamos por:

$$\left[f(x)\right]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

Con la notación f^{-1} siempre nos referimos a la función inversa, nunca a su valor inverso.

Funciones trigonométricas inversas

En las funciones trigonométricas vistas hasta este momento se introdujo como variable independiente x un ángulo o arco cualquiera, en radianes, y se obtuvo como resultado el valor de una razón trigonométrica. Por ejemplo, si $x = \pi/6$ radianes, la función seno nos da como resultado $f(x = \pi/6) = \text{sen}(\pi/6) = 1/2$; es decir, «el seno de $\pi/6$ radianes es $1/2$».

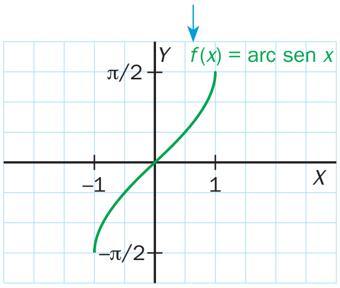
Suponiendo ahora que el valor $1/2$ corresponde al seno de cierto ángulo desconocido, ¿cómo es posible saber de qué arco se trata? La inversa de la función seno, llamada *arco seno*, nos dará la respuesta: $f^{-1}(x = 1/2) = \text{arcsen}(1/2) = \pi/6$; o sea, «el ángulo o arco cuyo seno es $1/2$ tiene un valor de $\pi/6$ radianes».

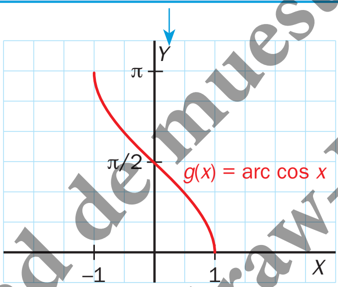
Solo hay un problema: el seno de $1/2$ no se corresponde con un solo ángulo, sino, en realidad, con infinitos $(\pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6...)$. Por tanto, para definir con propiedad la función arco seno es preciso restringir el dominio del seno a un tramo cualquiera en el que cada valor de la imagen se corresponda con un único valor del dominio; suele tomarse, en este caso, el tramo comprendido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, que es donde el seno admite la función inversa.

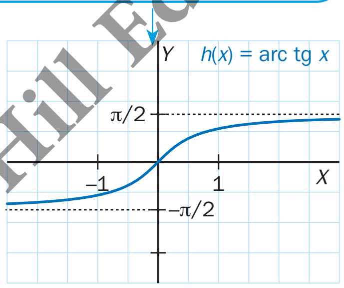
Procediendo de manera semejante, podemos definir otras funciones arco:

Las **funciones trigonométricas inversas,** o **funciones arco,** toman el valor de una razón trigonométrica y proporcionan el ángulo o arco al que corresponde dicha razón:

arco seno	arco coseno	arco tangente
$\boldsymbol{f(x) = \text{arcsen}\, x}$	$\boldsymbol{g(x) = \text{arccos}\, x}$	$\boldsymbol{h(x) = \text{arctg}\, x}$
$D(f) = [-1, 1]$	$D(f) = [-1, 1]$	$D(f) = \mathbb{R}$
$R(f) = [-\pi/2, \pi/2]$	$R(f) = [0, \pi]$	$R(f) = [-\pi/2, \pi/2]$







Ejemplo 22. Obtén las inversas de estas funciones trigonométricas sencillas:

a) $\boldsymbol{f(x) = 2\,\text{sen}\, x}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \cos(2x)}$ **c)** $\boldsymbol{f(x) = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$

a) $f(x) = 2\,\text{sen}\, x \xrightarrow[\text{2.° Renombramos } x \leftrightarrow y:\ y = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)]{\text{1.° Despejamos } x:\ y = 2\,\text{sen}\, x \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \text{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right)} f^{-1}(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x) = \cos(2x) \xrightarrow[\text{2.° Renombramos } x \leftrightarrow y:\ y = \frac{1}{2}\arccos x]{\text{1.° Despejamos } x:\ y = \cos(2x) \Rightarrow 2x = \arccos y \Rightarrow x = \frac{1}{2}\arccos y} f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arccos x$

c) $f(x) = \text{tg}\,\frac{x}{2} \xrightarrow[\text{2.° Renombramos } x \leftrightarrow y:\ y = 2\,\text{arctg}\, x]{\text{1.° Despejamos } x:\ y = \text{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \text{arctg}\, y \Rightarrow x = 2\,\text{arctg}\, y} f^{-1}(x) = 2\,\text{arctg}\, x$

Actividades

30. Para cada una de estas funciones, halla su inversa y comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$:

a) $f(x) = 5 - 3x$ *b)* $f(x) = \sqrt{2x+1}$ *c)* $f(x) = \dfrac{2}{3x}$

d) $f(x) = e^{5-x}$ *e)* $f(x) = \text{sen}(1-x)$ *f)* $f(x)\text{arctg}\, 5x$

31. Obtén la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1\,(x \geq 0)$ *b)* $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

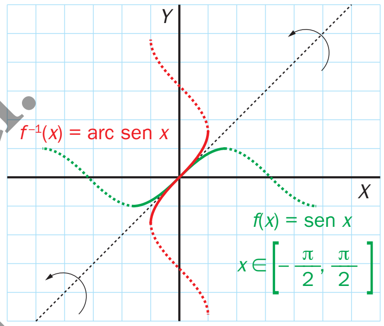
c) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)}$ *d)* $f(x) = \log(3x+4)$

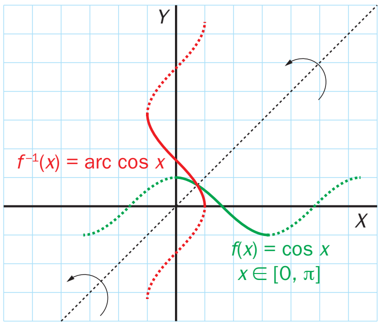
e) $f(x) = \cos(2x-6)$ *f)* $f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

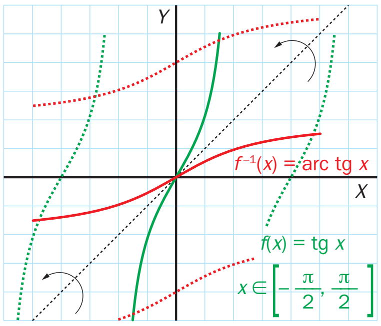
Ojo

En la circunferencia unidad, la longitud del arco subtendido por un ángulo es igual a este, por lo que ángulo y arco son términos equivalentes:

$$\text{arco} = \text{ángulo} \times \underbrace{\text{radio}}_{=1} = \text{ángulo}$$







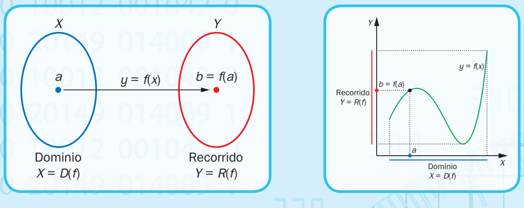
www Actúa

Manipula funciones a tu gusto con este interactivo: transfórmalas como quieras, opera con ellas, haz su composición e inviértelas.

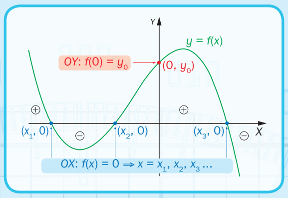
¡A vista de pájaro!

La función y sus características

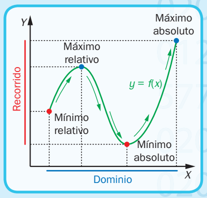
Concepto de función, dominio y recorrido



Puntos de corte con los ejes

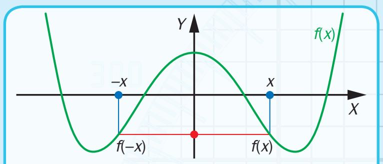


Extremos, crecimiento y curvatura



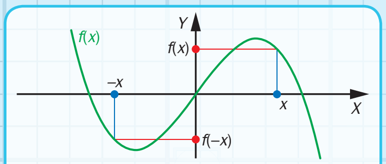
Simetría

Respecto del eje OY



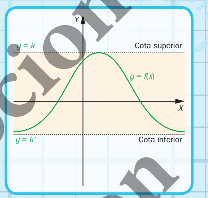
Función par: $f(x) = f(-x)$

Respecto del origen

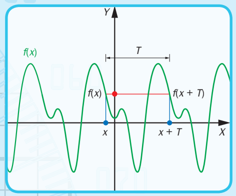


Función impar: $f(x) = -f(-x)$

Acotación

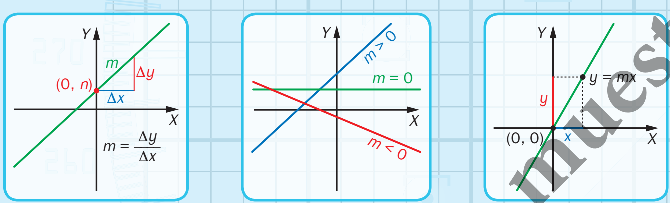


Periodicidad

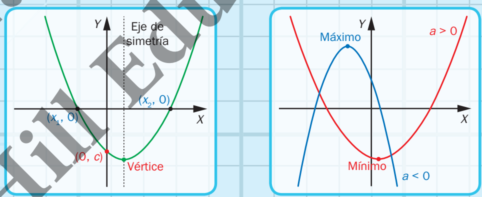


Funciones elementales

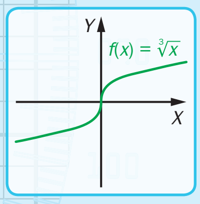
Polinómicas de primer grado: rectas



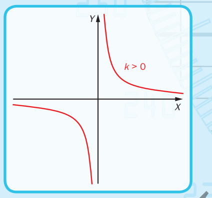
Polinómicas de segundo grado: parábolas



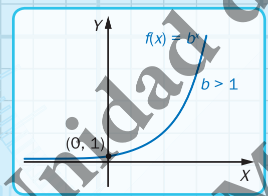
Con radicales



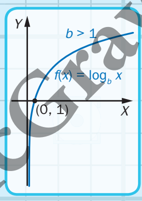
Racionales



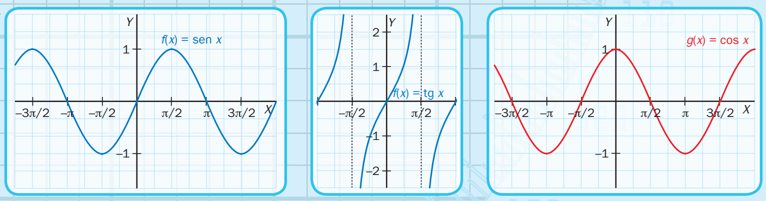
Exponenciales



Logarítmicas



Trigonométricas



Operaciones y transformaciones

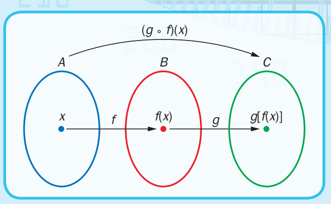
Operaciones algebraicas

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

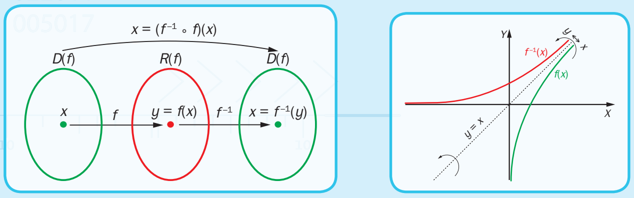
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

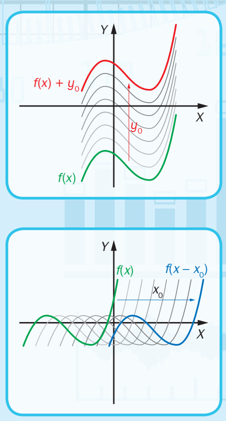
Composición de funciones



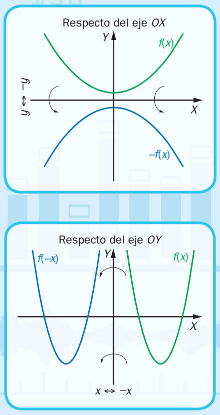
Función inversa



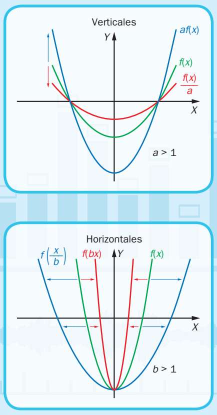
Traslaciones



Simetrías



Dilataciones y contracciones



ACTIVIDADES RESUELTAS

Actividad resuelta 5

Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes y la simetría de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}}$

b) $f(x)=\left(x^3-2x\right)e^{-x^2}$

a) La raíz cuadrada solo está definida para radicandos nulos o positivos:

$$4-x^2\geq 0\Rightarrow x\in[-2,2]$$

Por otro lado, como están excluidos los valores que anulan el denominador, es decir, $x=\pm 2$, tenemos que: $D(f)=(-2,2)$.

Sus puntos de corte con los ejes de coordenadas son:

$$OX: f(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow(-1,0)\text{ y }(+1,0)$$

$$OY: f(0)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\left(0,-\frac{1}{2}\right)$$

Para ver si posee alguna simetría, inspeccionamos el valor de $f(-x)$ y lo comparamos con el de $f(x)$:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{\sqrt{4-(-x)^2}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}}=f(x)\Rightarrow \text{función par}$$

b) Como producto y composición de funciones que no presentan problemas de dominio, esta función está definida para cualquier valor de x, así que $D(f)=\mathbb{R}$. Sus puntos de corte con los ejes de coordenadas son:

$$OX: f(x)=0\Rightarrow\left(x^3-2x\right)e^{-x^2}=0\Rightarrow x^3-2x=0,\text{ pues } e^{-x^2}\neq 0\ \forall\, x$$

$$x\left(x^2-2\right)=0\Rightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{2}\Rightarrow(0,0),\left(\pm\sqrt{2},0\right)$$

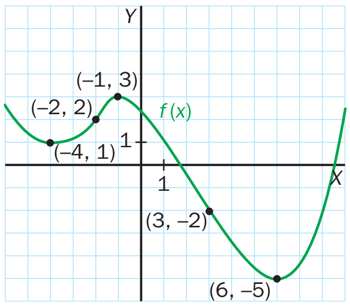
$$OY: f(0)=0\Rightarrow(0,0)$$

En cuanto a la simetría, comprobamos que:

$$f(-x)=\left[(-x)^3-2(-x)\right]e^{-(-x)^2}=\left(-x^3+2x\right)e^{-x^2}=-\left(x^3-2x\right)e^{-x^2}=-f(x)\Rightarrow\text{función impar}$$

Actividad resuelta 6

Analiza el crecimiento y la curvatura de una función $f(x)$ a partir de la información contenida en su gráfica y de los puntos en ella localizados. ¿Se trata de una función acotada?



La función $f(x)$ posee un mínimo relativo en $x=-4$, un máximo relativo en $x=-1$ y un mínimo absoluto en $x=6$.

Es una función decreciente en $(-\infty,-4)\cup(-1,6)$ y creciente en $(-4,-1)\cup(6,\infty)$.

Sus puntos de inflexión se encuentran en $x=-2$ y $x=3$.

La función es abierta hacia arriba en $(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$ y abierta hacia abajo en el intervalo $(-2,3)$.

Está acotada inferiormente por el valor $k=-5$, pero no superiormente, luego no es una función acotada.

Actividad resuelta 7

Halla la expresión analítica de cada una de estas funciones polinómicas de primer y segundo grado y realiza su representación gráfica:

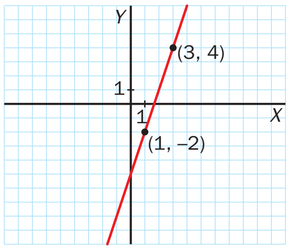
a) La recta que pasa por los puntos $(1,-2)$ y $(3,4)$.

b) La parábola que pasa por los puntos $(-1,5)$, $(0,7)$ y $(1,11)$.

a) Resolvemos el sistema que resulta al sustituir los puntos por los que pasa la recta en la ecuación $y=mx+n$:

$$\left.\begin{cases}(1,-2)\Rightarrow -2=-m+n\\(3,4)\Rightarrow 4=3m+n\end{cases}\right\}\Rightarrow m=3, n=-5$$

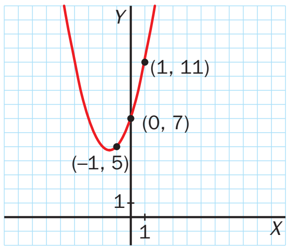
Así pues, la expresión analítica de esta función es $f(x)=3x-5$.



b) Resolvemos el sistema obtenido al sustituir los puntos por los que pasa la parábola en la ecuación $y=ax^2+bx+c$:

$$\left.\begin{cases}(-1,5)\Rightarrow 5=a-b+c\\(0,7)\Rightarrow 7=c\\(1,11)\Rightarrow 11=a+b+c\end{cases}\right\}\Rightarrow a=1, b=3, c=7$$

Por tanto, se trata de la función $f(x)=x^2+3x+7$.



ACTIVIDADES RESUELTAS

Actividad resuelta 8

Esboza la gráfica de esta función:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

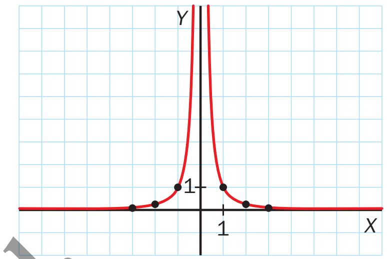
Hallamos los puntos de corte con los ejes y evaluamos algunos puntos dentro de su dominio:

$$D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$OX: f(x)\neq 0\ \forall\, x \Rightarrow \text{No corta al eje } OX$$

$$OY: \nexists\, f(0) \Rightarrow \text{No corta al eje } OY$$

x	–3	–2	–1	–1/2	1/2	1	2	3
y	1/9	1/4	1	4	4	1	1/4	1/9



Actividad resuelta 9

Con las funciones $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=e^{1/x}$ y $h(x)=\operatorname{sen} x$, realiza las siguientes operaciones y halla los dominios de las funciones resultantes:

a) $g\cdot h$ *b)* g/f *c)* g^{-1}

Inspeccionamos primero los dominios de las funciones originales:

$$D(f)=[-1,1],\ D(g)=\mathbb{R}-\{0\} \text{ y } D(h)=\mathbb{R}$$

a) $(g\cdot h)(x)=e^{1/x}\cdot \operatorname{sen} x,\quad D(g\cdot h)=D(g)\cap D(h)=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $(g/f)(x)=\dfrac{e^{1/x}}{\sqrt{1-x^2}},\quad D(g/f)=D(g)\cap D(f)-\{\pm 1\}=(-1,1)-\{0\}$

c) $g(x)=e^{1/x}\xrightarrow[2.^{\circ}:\ y=\frac{1}{\log x}]{1.^{\circ}:\ y=e^{1/x}\Rightarrow\frac{1}{x}=\log y\Rightarrow x=\frac{1}{\log y}} g^{-1}(x)=\dfrac{1}{\log x}$

$$D(g^{-1})=D(\log x)-\{1\}=(0,\infty)-\{1\}$$

Actividad resuelta 10

Una función homográfica es una función racional de la forma:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

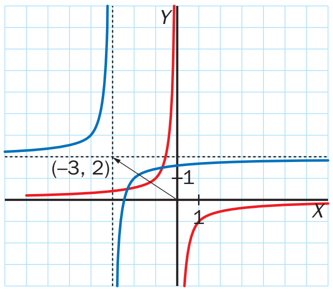
Demuestra que esta función se obtiene al desplazar una función de proporcionalidad inversa del tipo k/x.

Teniendo esto en cuenta, representa la función:

$$g(x)=\frac{2x+5}{x+3}$$

En efecto, si desplazamos la función de proporcionalidad inversa x_0 unidades en dirección horizontal e y_0 unidades en dirección vertical, tenemos que:

$$f(x)=\frac{k}{x-x_0}+y_0=\frac{k+y_0(x-x_0)}{x-x_0}=\frac{\overbrace{y_0}^{a}\,x+\overbrace{(k-x_0y_0)}^{b}}{\underbrace{x}_{c=1}\underbrace{-x_0}_{d}}=\frac{ax+b}{cx+d}$$



Así pues, la gráfica de la función $g(x)$ será una hipérbola equilátera con los ejes centrados en un punto distinto del origen. Esto lo vemos al dividir el numerador entre el denominador:

$$g(x)=\frac{2x+5}{x+3}=\frac{-1}{x+3}+2$$

Luego la gráfica de $g(x)$ es la de la hipérbola equilátera $y=-1/x$ desplazada horizontalmente tres unidades hacia la izquierda y verticalmente dos unidades hacia arriba; es decir, con sus ejes centrados en el punto $(-3,\ 2)$.

Actividad resuelta 11

Determina mediante qué funciones y por medio de qué transformaciones se obtiene esta función:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$$

Extrayendo, en primer lugar, el factor común: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=\overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{compresión vertical en un factor 2}}\cdot(x^2-2x-3)$, vemos que esta función resulta de una compresión vertical de la parábola $y=x^2-2x-3$ en un factor 2. Si en esta expresión completamos ahora el cuadrado del binomio, tenemos:

$x^2-2x-3=\overbrace{(x^2-2x+1)-1}^{\text{completamos el cuadrado}}-3=\overbrace{(x-1)^2-4}^{\text{traslación al punto }(1,-4)}$, por lo que la parábola $y=x^2-2x-3$ es el resultado de trasladar la parábola $y=x^2$ hacia el punto $(1,-4)$. Así pues, la función dada se obtiene de $y=x^2$ mediante las siguientes transformaciones:

$$x^2\xrightarrow{\text{traslación al punto }(1,-4)}x^2-2x-3\xrightarrow{\text{compresión vertical en un factor 2}}\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$$

Evalúate

1 **Considerar la función de variable real x siguiente: $f(x) = x(\ln x)^2$.**

a) **Determinar el dominio de la función $f(x)$.**

b) **Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función.**

c) **Determinar, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.**

Aragón, junio de 2017

PROCEDIMIENTO:
Ten en cuenta que se trata del producto de dos funciones.

2 **Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$:**

a) **Estudiar su dominio de definición y calcula sus asíntotas.**

b) **Estudiar sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.**

c) **Calcular una primitiva de la función $f(x)$.**

Asturias, junio de 2018

PROCEDIMIENTO:
Ojo antes de resolverla, observa que se trata de una función racional.

3 **Según las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$:**

a) **Hacer un esbozo de las gráficas de las parábolas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encontrar los puntos que cortan los vértices y los puntos en común entre las dos gráficas.**

b) **Calcular el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.**

Cataluña, julio de 2018

PROCEDIMIENTO:
La representación gráfica de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos parábolas. Para dibujarlas ten en cuenta que primero debes calcular su vértice, después los cortes con los ejes y después dar puntos teniendo en cuenta lo que ya hemos calculado. Los puntos en los que se cortan, o puntos en común, pueden encontrarse gráficamente o analíticamente, la resolución gráfica es más visual y la analítica más «exacta».

4 **Se quiere construir un cilindro de volumen 250 π metros cúbicos y área mínima.**

a) **Expresar la altura, h, del cilindro en función del radio, r, de la base.**

b) **Calcular la función $A(r)$ que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.**

c) **Calcular el valor del radio y la altura que hacen al área mínima.**

Cantabria, junio 2018

PROCEDIMIENTO:

a) Debes basarte en los datos finales y despejar h del volumen del cilindro.

b) Utiliza la información del apartado *a)* y expresa el área solo en función de la variable r.

Datos: volumen del cilindro: $V = \pi r2h$

Área del cilindro: $A = 2\pi r2 + 2\pi rh$

5 **Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$ que depende de los parámetros a, b y c. Obtener, razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizados:**

a) **La relación entre los coeficientes a, b y c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$.**

b) **La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$.**

c) $\displaystyle\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$

Valencia, julio de 2018

PROCEDIMIENTO:
Para resolver el apartado *a* de la actividad solo debes hallar el valor de $f(1)$ e igualarlo a 22.

1 **SOLUCIÓN:** *a)* Efectivamente se trata del producto de dos funciones. La primera, x, es una función polinómica que está definida en todo $\mathbb{R}$. Y, la segunda, $(\ln x)^2$, es la función logaritmo neperiano que solo está definida cuando $x > 0$. Por tanto, el dominio de $f(x)$ es la intersección de los dos dominios anteriores, es decir:

$$D(f) = (0, \infty)$$

2 **SOLUCIÓN:** *a)* La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ es racional y está definida en todos los números reales, exceptuados los que anulan el denominador, puesto que no existe la división por 0.

Resolvemos la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por tanto, habrá que excluir de $\mathbb{R}$ esos dos valores. Así:

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 2\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$$

4 **SOLUCIÓN:** *a)* Para expresar h en función de r utilizamos el volumen V del cilindro. Así:

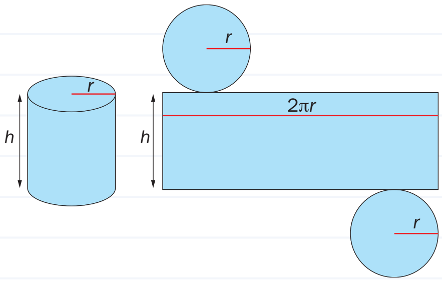
$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 250\pi = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

b) El área total del cilindro A viene expresada en función de dos variables, h y r.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Como $h = \dfrac{250}{r^2}$, entonces:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$$



3 **SOLUCIÓN:** *a)* $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$ son funciones polinómicas de segundo grado y sus representaciones gráficas son parábolas.

- $f(x) = x^2 - 1$

  La abscisa del vértice es: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0$

  El vértice es el punto $(0, f(0)) = (0, -1)$

  Puntos de corte con el eje OX: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Por tanto, son los puntos: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

  Punto de corte con el eje OY: $f(0) = -1$. Luego, el punto es $(0, -1)$

- $g(x) = 3 - x^2$

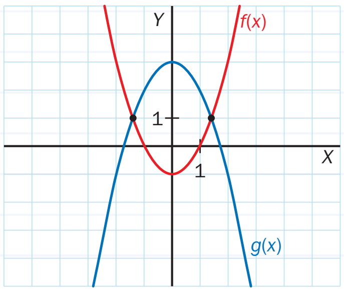
  La abscisa del vértice es: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0$

  El vértice es el punto $(0, f(0)) = (0, 3)$

  Puntos de corte con el eje OX: $3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Por lo tanto, son los puntos: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$

  El punto de corte con el eje OY: $f(0) = 3$. Por lo tanto, el punto es $(0, 3)$

  Con estos elementos podemos hacer un esbozo de sus gráficas.



Observa que las funciones se cortan en dos puntos, pero no es posible averiguar con precisión sus coordenadas. Por tanto, vamos a obtenerlas resolviendo la ecuación: $f(x) = g(x)$.

Así: $x^2 - 1 = 3 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Los puntos de corte son: $(\sqrt{2}, 1)$ y $(-\sqrt{2}, 1)$.

5 **SOLUCIÓN:** *a)* Para obtener la relación entre los coeficientes a, b y c basta tener en cuenta que $f(1) = 22$. Por tanto,

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 \cdot \cos(\pi) \Rightarrow f(1) = a + b \cdot + c \cdot (-1) =$$

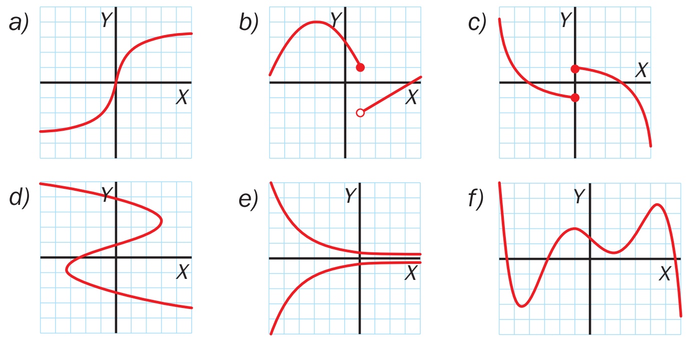
$$= a + b - c$$

Luego, la relación que deben cumplir a, b y c es: $a + b - c = 22$

ACTIVIDADES

La función y sus características

32. Justifica cuáles de estas gráficas pertenecen a una función:



33. Escribe una expresión analítica para estas funciones:

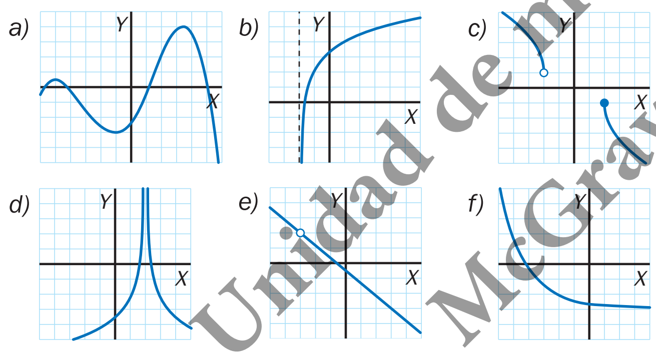
a) El volumen ocupado por un gas es directamente proporcional a su temperatura.

b) La resistencia aerodinámica total que sufre un avión en vuelo aumenta con el cuadrado de su velocidad.

c) La cantidad demandada de un producto es inversamente proporcional al precio del mismo.

d) La sensación provocada por la percepción de un estímulo físico depende de la raíz cúbica de su intensidad.

34. ¿Qué dominio y qué recorrido tienen estas funciones?



35. Obtén el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}$ *b)* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$ *d)* $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}$

e) $f(x)=\sqrt{2x+6}+\sqrt{6-2x}$ *f)* $f(x)=\sqrt{(2-3x)(4x-5)}$

g) $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$ *h)* $f(x)=\sqrt[3]{2x-5}$

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+15}}{x^2-4}$ *j)* $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$

k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ *l)* $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{(x-3)(2-x)}}$

m) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-4}}$ *n)* $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{-x^2+5x-6}}$

36. Halla el dominio de estas funciones:

a) $f(x)=xe^{-x^2}$ *b)* $f(x)=\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ *d)* $f(x)=\log\dfrac{2x+6}{5-x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\log(3x+4)}$ *f)* $f(x)=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x)=\operatorname{cosec}(2x)$ *h)* $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

37. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ *b)* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<1\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ *d)* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\leq -1\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x>-1\end{cases}$

38. Halla los puntos de corte con los ejes de cada una de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{5-4x}{2}$ *b)* $f(x)=x^2+4x+3$

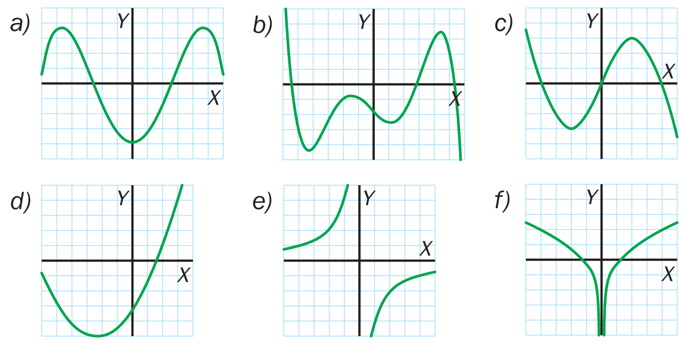
c) $f(x)=-x^3-2x^2+x+2$ *d)* $f(x)=\dfrac{3x-2}{5-x}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}+1$ *f)* $f(x)=\sqrt{4x^2-3}$

g) $f(x)=1-3^{2-x}$ *h)* $f(x)=\log_2\dfrac{2x-1}{x-8}$

i) $f(x)=3\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ *j)* $f(x)=-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

39. Observa las siguientes gráficas y determina si las funciones que representan poseen o no alguna simetría:



40. Determina la simetría de estas funciones.

a) $\sqrt[3]{f(x)=x^{1/3}}$ *b)* $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *c)* $f(x)=e^{-x2}$

ACTIVIDADES

41. Comprueba si estas funciones poseen alguna simetría:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6$ *b)* $f(x) = 3x - 2x^3$

c) $f(x) = -x^2 + 7x - 3$ *d)* $f(x) = \dfrac{-x}{x^3 - 5x}$

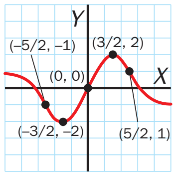
e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x}$ *f)* $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

g) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *h)* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

i) $f(x) = xe^{-x^2}$ *j)* $f(x) = \log(x^2 + 1)$

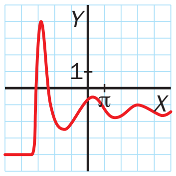
k) $f(x) = e^{-x^2}\operatorname{sen} x$ *l)* $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

42. Analiza el crecimiento, la curvatura y la acotación de la función $f(x)$ a partir de su representación gráfica. ¿Aprecias en ella alguna simetría?

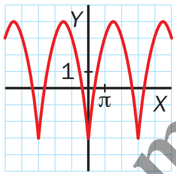


43. ¿Son periódicas las siguientes funciones? En caso afirmativo, ¿cuál es su periodo?

a)



b)



44. Representa la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y estudia su simetría y periodicidad. Compara las conclusiones que obtengas con la simetría y periodicidad de la función seno y justifica la diferencia que halles entre ambas funciones a este respecto.

Funciones elementales

45. Obtén la expresión analítica de estas funciones polinómicas de primer y segundo grado:

a) La recta que pasa por los puntos $(2,-3)$ y $(-4,1)$.

b) La recta de pendiente $m = -4$ que pasa por el punto $(-1,5)$.

c) La parábola cuyos puntos de corte con los ejes son $(-2,0)$, $(3,0)$ y $(0,6)$.

d) La parábola que corta al eje *OY* en $(0,-2)$ y con vértice en el punto $(1,-1)$.

46. Considerando los puntos de corte con los ejes y sus propiedades generales, esboza la gráfica de estas cuatro funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^3 - x$ *b)* $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

c) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$ *d)* $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

47. Esboza la gráfica de las siguientes funciones hallando sus puntos de corte con los ejes y evaluando algunos otros puntos de sus correspondientes dominios. ¿Poseen alguna simetría?

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ *c)* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ *e)* $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{-x}}$ *f)* $f(x) = \log x^2$

48. Representa las funciones exponenciales de cada apartado sobre unos mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo se comportan según el valor de la base?

a) $f(x) = 2^x$ $g(x) = 4^x$ $h(x) = 8^x$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ $g(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ $h(x) = \left(\dfrac{1}{8}\right)^x$

49. Representa las funciones logarítmicas de cada apartado sobre unos mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo se comportan según el valor de la base?

a) $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = \log_4 x$ $h(x) = \log_8 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ $h(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

50. ¿Cuál es el periodo de estas funciones trigonométricas?

a) $f(x) = \operatorname{sen} 5x$ *b)* $f(x) = \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{4x}{3}\right)$ *d)* $f(x) = \operatorname{cotg} 2x$

51. Halla la ordenada en el origen, la amplitud y el periodo de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x) = -2\operatorname{sen}(3x - \pi)$ *b)* $f(x) = 4\cos\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = 6\operatorname{sen}\left(\dfrac{5x + 3\pi}{4}\right) - 7$ *d)* $f(x) = 3 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2x}{5}\right)$

52. Representa estas funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 0 \\ \log x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ *f)* $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

53. Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos y representa su gráfica:

a) $f(x) = |2x + 1| - |2x - 1|$ *b)* $f(x) = |x^2 + x - 6|$

c) $f(x) = 4|x| - x^2$ *d)* $f(x) = \sqrt{|x + 2|}$

e) $f(x) = e^{|x-1|}$ *f)* $f(x) = \log|x + 3|$

54. La función signo, $f(x) = 0$ signo (x), hace corresponder cada número real x con su signo: positivo $(+1)$, negativo (-1) o nulo (0), en el caso del número cero.

a) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función signo?

b) Escribe esta función como una función definida a trozos y dibuja su gráfica. ¿Posee alguna simetría?

c) Busca una forma de expresar la función signo a partir de la función valor absoluto.

55. Las funciones parte entera asignan a cada número real x el número entero más próximo, lo cual puede realizarse de varias formas:

- La función techo, $f(x) = \lceil x \rceil$, lo hace por exceso, tomando el menor número entero mayor o igual que x.
- La función suelo, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, lo hace por defecto, tomando el mayor número entero menor o igual que x.
- La función parte entera por truncamiento, $f(x) = [x]$, elimina del número x su parte decimal.
- La función redondeo, $f(x) = \text{redond}(x)$, asigna al número x el entero más próximo que se obtiene por redondeo.

a) ¿Qué dominio y qué recorrido tienen todas estas funciones?

b) Escríbelas como funciones definidas a trozos y representa sus gráficas. ¿Cuál de estas funciones coincide con la definida en el epígrafe 13 de la unidad?

c) Observa las gráficas obtenidas para las funciones techo y suelo: ¿podrías expresar la función $f(x) = [x]$ a partir de ellas? Razona tu respuesta.

Operaciones y transformaciones

56. Considera las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad g(x) = \frac{x-1}{2x}$$

Realiza las operaciones que se piden a continuación y halla los dominios de las funciones que resultan de ellas:

a) $f+g$ *b)* $g-f$ *c)* $f\cdot g$ *d)* f/g *e)* g/f *f)* $f\circ g$ *g)* $g\circ f$

57. Dadas las funciones $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2-1$, define las funciones f/g y g/f. Obtén sus respectivos dominios y represéntalas gráficamente.

58. Dadas las funciones $f(x) = 3-2x$ y $g(x) = \sqrt{5-x}$, comprueba que $f\circ g \neq g\circ f$. ¿Cuál es el dominio de las funciones obtenidas?

59. Con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, define $f\circ g$ y $g\circ f$. ¿Qué dominio poseen las funciones resultantes?

60. A partir de las funciones $f(x) = 2x^2-3x+1$ y $g(x) = 5$, halla $f\circ g$ y $g\circ f$.

61. Dadas las funciones $f(x) = 4x+5$, $g(x) = \sqrt{2x}$ y $h(x) = e^{-x^2}$, realiza la operación $h\circ g\circ f = h\left[g\left[f(x)\right]\right]$.

62. Expresa las siguientes funciones como composición de otras más sencillas:

a) $f(x) = (3x-4)^2$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ *d)* $f(x) = e^{x^2+1}$

e) $f(x) = e^{2x}-e^x+1$ *f)* $f(x) = \log(3x^2+2x-5)$

g) $f(x) = |x^2-9|$ *h)* $f(x) = \text{sen}(4x+3)$

i) $f(x) = \text{tg}\sqrt{x+1}$ *j)* $f(x) = \cos^2(1-x)$

63. A partir de las funciones:

$$f(x) = 5-x \qquad g(x) = \sqrt{x-2} \qquad h(x) = \frac{1}{x+3}$$

construye las siguientes funciones:

a) $(2h-f)\cdot g$ *b)* $f-(g^2/h)$ *c)* $g^2+f\cdot h$

d) f/g *e)* $h\cdot(f\circ g)$ *f)* $(f/h)\circ g$

64. Halla, cuando sea posible, las inversas de estas funciones y comprueba que $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = x$:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ *b)* $f(x) = -3x^2+4$

c) $f(x) = 2x^3-5$ *d)* $f(x) = \sqrt{1-2x}+3$

e) $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$ *f)* $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

g) $f(x) = 5e^{\frac{x-3}{2}}+4$ *h)* $f(x) = \dfrac{4}{3}\log(5-2x)$

i) $f(x) = -3\,\text{sen}\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$ *j)* $f(x) = \dfrac{1}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$

k) $f(x) = 1+2\,\text{tg}\left(\dfrac{5x+\pi}{4}\right)$ *l)* $f(x) = |x-2|$

65. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales a partir de la función de proporcionalidad inversa de la cual pueden obtenerse por desplazamientos:

a) $f(x) = \dfrac{-2}{x-3}-4$ *b)* $f(x) = \dfrac{3x+4}{x-1}$

c) $f(x) = 5+\dfrac{3}{x+2}$ *d)* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$

66. Mediante transformaciones, representa las funciones:

a) $f(x) = -x^2+1$ a partir de $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ a partir de $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = e^{-x}-1$ a partir de $g(x) = e^x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log(x-1)$ a partir de $g(x) = \log x$

e) $f(x) = 2\cos(x+\pi)$ a partir de $g(x) = \cos x$

67. Determina las funciones a partir de las cuales pueden obtenerse estas otras, así como las transformaciones necesarias para ello en cada caso:

a) $f(x) = -4x^2-16x-28$ *b)* $f(x) = 6\sqrt{4-2x}-7$

c) $f(x) = 1+\dfrac{e^{6-2x}}{10}$ *d)* $f(x) = -5\log(3x-2)$

e) $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)+4$ *f)* $f(x) = 2\left|\dfrac{x}{4}+1\right|$

Un paso más

1. Un modelo de mercado determina que la cantidad, en miles de unidades, ofertada, *O*, y demandada, *D*, de cierto producto dependen del precio de venta, *p*, en euros, según:

$$O(p) = 3p + 100 \qquad D(p) = 200 - 2p$$

a) Representa estas funciones y halla el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda; es decir, el precio de venta para el cual ambas cantidades se igualan.

b) Estudia si habrá escasez o exceso de producto para un precio de venta de 15 €. ¿Y para 25 €?

2. El beneficio, *B*, en euros, obtenido por cierta empresa a través de la venta de uno de sus productos es:

$$B(q) = -20q^2 + 10\,000q - 50\,000$$

donde q es la cantidad vendida, en miles de unidades.

a) Representa $B(q)$ para una demanda comprendida entre 0 y 500 000 unidades. ¿En qué intervalo de ventas la empresa acusa pérdidas?

b) Halla la cantidad para la que se obtiene el máximo beneficio y a cuánto asciende este; determina asimismo sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

3. Para la recuperación de una especie en peligro de extinción se introducen en una reserva natural cinco parejas de la misma. Estudios previos indican que su población, *P*, evolucionará con el tiempo, *t*, medido en años, según la función:

$$P(t) = \frac{400t^2}{2t^2 + 100} + 10$$

a) Representa gráficamente la evolución de la población durante los primeros veinte años.

b) ¿Cuánto tiempo será necesario para que la especie alcance, al menos, 100 ejemplares?

4. En las primeras fases de la aparición de cierto virus informático, el número de ordenadores afectados, que ascendía inicialmente a una docena, se duplica cada milisegundo.

a) Expresa el número de equipos infectados, *N*, en función del tiempo transcurrido, *t*, medido en segundos, mediante una ley exponencial creciente.

b) ¿Cuánto tardará en infectar a un millón de equipos?

5. El ser humano necesita mantener su temperatura corporal a 37 °C. Expuesto a una temperatura de –20 °C y sin el equipo adecuado, el cuerpo puede ver cómo su temperatura desciende hasta un grado en tan solo cuatro minutos. Supongamos que la temperatura, *T*, en grados Celsius, cae con el tiempo transcurrido, *t*, en minutos, según la ley del enfriamiento:

$$T(t) = T_{a+}(T_0 - T_A)e^{-kt}$$

donde T_0 es la temperatura inicial del cuerpo, T_a es la temperatura ambiente y *k*, una constante positiva.

a) Determina la constante *k* de esta función exponencial.

b) Si la temperatura corporal desciende hasta 32 °C, el cuerpo sufre una hipotermia severa, con el consiguiente riesgo de muerte por congelación. ¿Qué tiempo transcurre hasta que llega ese momento?

6. En muchas ocasiones verás en los medios de comunicación representaciones gráficas que pueden inducirnos a una interpretación errónea por estar mal elaboradas o por haber sido manipuladas de manera tendenciosa. Pero incluso cuando están bien realizadas, la forma de representar la gráfica de una función puede provocar entre la población lecturas muy distintas a partir de unos mismos datos. Busca en la red ejemplos reales acerca de los errores más frecuentes cometidos en las representaciones gráficas de funciones, así como los «trucos» que suelen emplearse para presentar una gráfica favoreciendo una determinada interpretación de los datos.

Concursos y olimpiadas matemáticas

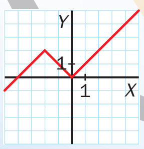
1. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene su gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas?

a) $y = x^2 + x$ *b)* b) $y = x^2 \operatorname{sen} x$ *c)* $y = x\cos x$

d) $y = x\operatorname{sen} x$ *e)* $y = x^3$

2. Si $f(x) = ax + b$ y $f^{-1}(x) = bx + a$, ¿cuál es el valor de $a + b$?

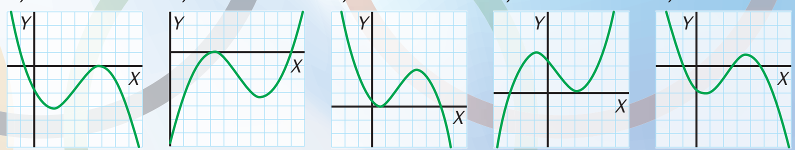
3. La función *f* corresponde a la gráfica, compuesta por tres trozos rectilíneos. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f\left[f\left(f(x)\right)\right] = 0$?



4. Si *f* es una función periódica de periodo $T = 5$ y en el intervalo $[3,8)$ verifica que $f(x) = x^2 - 10x + 25$, ¿cuál es el valor de $f(2017)$?

5. Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x) = (a - x)(b - x)^2$?

a) b) c) d) e)



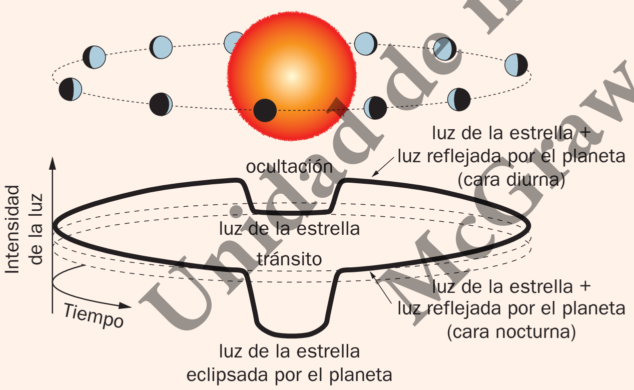
Resuelve el enigma

En busca de otros mundos

Desde que el primer planeta extrasolar o *exoplaneta* fue descubierto, hace ya tres décadas, hasta hoy, ha sido confirmada la existencia de casi cuatro mil planetas orbitando alrededor de otras estrellas. De hecho, la mayoría de estas estrellas tienen no uno, sino varios planetas como compañía, algunos de los cuales, por mostrar unas características similares a las de nuestra Tierra, parecen potencialmente habitables.

Gran parte de estos exoplanetas se han hallado en los últimos años gracias a los datos recabados por el telescopio espacial Kepler. Pero ¿cómo es posible detectarlos? Naturalmente, la observación directa de planetas extrasolares es, en la inmensa mayoría de los casos, imposible, pues se encuentran demasiado lejos como para captar de manera individual la diminuta fracción de luz que reflejan de su estrella. Y es aquí donde las funciones entran en escena.

El principal medio para la detección de exoplanetas es el llamado *método del tránsito,* con el cual se estudia, en función del tiempo, la variación experimentada por la intensidad de la luz que nos llega de una estrella cuando orbita a su alrededor un planeta y este pasa, con respecto a nuestra visual, por delante (eclipse primario o tránsito) o por detrás de ella (eclipse secundario u ocultación):



Se obtiene así lo que se denomina *curva de luz* de la estrella, que puedes observar en la gráfica de abajo. En esta peculiar variación periódica del brillo en función del tiempo se reúnen la luz propia de la estrella, la luz reflejada por el planeta, y el efecto que producen los eclipses que tienen lugar entre ambos cuerpos. Como puedes comprobar, en la gráfica de esta función periódica se aprecian intervalos de crecimiento y decrecimiento del brillo, además de ciertos máximos y mínimos, tanto relativos como absolutos.

Del estudio de la función que modela este fenómeno se obtiene información muy valiosa: el periodo orbital del planeta, su tamaño (mayor cuanto más acusada es la profundidad del tránsito, pues bloquea más luz de la estrella al pasar por delante de ella), el tamaño de la estrella (más grande cuanto mayor sea la duración del tránsito, ya que el planeta tarda más tiempo en pasar por delante o detrás de ella), y otras muchas características de ambos cuerpos. Apasionante, ¿verdad? Y todo ello gracias a las funciones…

Curva de luz de una estrella con un planeta orbitando en torno a ella