

RELACIÓN DE EJERCICIOS RESUELTOS
Sucesiones y Progresiones

Ejercicio nº 1

a) Escribe los tres primeros términos de las sucesiones:

a.1) $a_n = 2n^2 - 1$

a.2) $b_n = \frac{3n-2}{n+1}$

b) Calcula el término general de las sucesiones:

b.1) $-1, 2, 5, 8, 11, \dots$

b.2) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$

b.3) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

Solución:

a)

a.1) $a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 17$

a.2) $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{4}{3}, b_3 = \frac{7}{4}$

b)

b.1) Es una progresión aritmética con $a_1 = -1$ y $d = 3$. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -1 + (n-1) \cdot 3 = -1 + 3n - 3 = 3n - 4 \rightarrow a_n = 3n - 4$$

b.2) Es una progresión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{2}$. Por tanto:

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b.3) $a_n = n^2$

Ejercicio nº 2

a) Escribe los tres primeros términos de las sucesiones:

a.1) $a_n = 5 - 2n$

a.2) $b_n = 2^{n+1}$

b) Halla el término general de cada una de estas sucesiones:

b.1) 3, 1, -1, -3, -5...

b.2) 2, -6, 18, -54,...

b.3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

Solución:

a)

a.1) $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = -1$

a.2) $b_1 = 4, b_2 = 8, b_3 = 16$

b)

b.1) Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -2$. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 3 - 2n + 2 = 5 - 2n \rightarrow a_n = 5 - 2n$$

b.2) Es una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = -3$. Por tanto:

$$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

b.3) $a_n = \frac{1}{n^2}$

Ejercicio nº 3

a) Obtén los tres primeros términos de cada una de estas sucesiones:

a.1) $a_n = n^2 - 1$

a.2) $b_n = \frac{n-3}{2n+1}$

b) Escribe el término general de las sucesiones:

b.1) 5; 5,5; 6; 6,5; 7...

b.2) -1, -4, -16, -64...

b.3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Solución:

a)

a.1) $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 8$

a.2) $b_1 = -\frac{2}{3}, b_2 = -\frac{1}{5}, b_3 = 0$

b)

b.1) Es una progresión aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 0,5$. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot 0,5 = 5 + 0,5n - 0,5 = 0,5n + 4,5 \rightarrow a_n = 0,5n + 4,5$$

b.2) Es una progresión geométrica con $a_1 = -1$ y $r = 4$. Por tanto:

$$a_n = (-1) \cdot 4^{n-1}$$

b.3) $a_n = \frac{1}{n}$

Ejercicio nº 4

En una progresión aritmética sabemos que $a_2 = 1$ y $a_5 = 7$. Halla el término general y calcula la suma de los 15 primeros términos.

Solución:

$$a_5 = a_2 + 3d \rightarrow 7 = 1 + 3d \rightarrow 6 = 3d \rightarrow d = 2$$

$$a_1 = a_2 - d = 1 - 2 = -1$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -1 + (n-1) \cdot 2 = -1 + 2n - 2 = 2n - 3 \rightarrow a_n = 2n - 3$$

$$a_{15} = 2 \cdot 15 - 3 = 30 - 3 = 27$$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(-1 + 27) \cdot 15}{2} = 195$$

Ejercicio nº 5

El quinto término de una progresión aritmética vale -7 , y la diferencia es -3 . Calcula el primer término y la suma de los 12 primeros términos.

Solución:

$$a_5 = a_1 + 4d \rightarrow -7 = a_1 + 4 \cdot (-3) \rightarrow -7 = a_1 - 12 \rightarrow a_1 = 12 - 7 = 5 \rightarrow a_1 = 5$$

$$a_{12} = a_1 + 11d = 5 + 11 \cdot (-3) = 5 - 33 = -28$$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(5 - 28) \cdot 12}{2} = -138$$

Ejercicio nº 6

Halla la suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_4 = 7$ y $a_7 = 16$.

Solución:

$$a_7 = a_4 + 3d \rightarrow 16 = 7 + 3d \rightarrow 9 = 3d \rightarrow d = 3$$

$$a_1 = a_4 - 3d = 7 - 9 = -2$$

$$a_{16} = a_1 + 15d = -2 + 45 = 43$$

$$S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2} = \frac{(-2 + 43) \cdot 16}{2} = 328$$

Ejercicio nº 7

En una progresión aritmética, el sexto término vale $10,5$; y la diferencia es $1,5$. Calcula el primer término y la suma de los 9 primeros términos.

Solución:

$$a_6 = a_1 + 5d = 10,5 - 5 \cdot 1,5 = 10,5 - 7,5 = 3 \rightarrow a_1 = 3$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3 + 12 = 15$$

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} = \frac{(3 + 15) \cdot 9}{2} = 81$$

Ejercicio nº 8

Calcula la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_3 = 1$ y $a_7 = -7$.

Solución:

$$a_7 = a_3 + 4d \rightarrow -7 = 1 + 4d \rightarrow -8 = 4d \rightarrow d = -2$$

$$a_1 = a_3 - 2d = 1 + 4 = 5$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 5 - 28 = -23$$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(5 - 23) \cdot 15}{2} = -135$$

Ejercicio nº 9

En una progresión geométrica, $a_1 = 3$ y $a_4 = 24$. Calcula la razón y la suma de los ocho primeros términos.

Solución:

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 24 = 3 \cdot r^3 \rightarrow 8 = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow r = 2$$

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384$$

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765$$

Ejercicio nº 10

El tercer término de una progresión geométrica vale 80, y la razón es 4. Calcula la suma de los cinco primeros términos.

Solución:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow 80 = a_1 \cdot 16 \rightarrow a_1 = 5$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 5 \cdot 4^4 = 5 \cdot 256 = 1280$$

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{1280 \cdot 4 - 5}{4 - 1} = \frac{5115}{3} = 1705$$

Ejercicio nº 11

Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de razón positiva en la que $a_2 = 10$ y $a_4 = 250$.

Solución:

$$a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow 250 = 10 \cdot r^2 \rightarrow 25 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{25} = 5 \rightarrow r = 5 \text{ (nos dicen que la razón es positiva)}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{10}{5} = 2$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 2 \cdot 5^5 = 2 \cdot 3125 = 6250$$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{6250 \cdot 5 - 2}{5 - 1} = \frac{31248}{4} = 7812$$

Ejercicio nº 12

En una progresión geométrica sabemos que $a_1 = 2$ y $a_4 = 54$. Halla la razón y la suma de los seis primeros términos.

Solución:

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 54 = 2 \cdot r^3 \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = \sqrt[3]{27} = 3 \rightarrow r = 3$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{486 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = \frac{1456}{2} = 728$$

Ejercicio nº 13

La razón de una progresión geométrica es 3, y el tercer término vale 45. Halla la suma de los ocho primeros términos.

Solución:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow 45 = a_1 \cdot 9 \rightarrow a_1 = 5$$

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 = 5 \cdot 3^7 = 5 \cdot 2187 = 10935$$

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{10935 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{32800}{2} = 16400$$

Ejercicio nº 14

Halla la suma de todos los términos de la sucesión:

15; 3; 0,6; 0,12; 0,024...

Solución:

Es una progresión geométrica con $a_1 = 15$ y razón:

$$r = \frac{3}{15} = 0,2.$$

Por tanto:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{15}{1-0,2} = \frac{15}{0,8} = 18,75$$

Ejercicio nº 15

En una progresión geométrica $a_2 = 6$ y $r = 0,5$, calcula la suma de todos sus términos.

Solución:

$$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 6 = a_1 \cdot 0,5 \rightarrow a_1 = \frac{6}{0,5} = 12$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{12}{1-0,5} = \frac{12}{0,5} = 24$$

Ejercicio nº 16

La razón de una progresión geométrica es $\frac{3}{4}$, y el segundo término vale 2. Halla la suma de los infinitos términos de la sucesión.

Solución:

$$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 2 = a_1 \cdot \frac{3}{4} \rightarrow 8 = a_1 \cdot 3 \rightarrow a_1 = \frac{8}{3}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{32}{3}$$

Ejercicio nº 17

Calcula la suma de todos los términos de la sucesión:

20; 2; 0,2; 0,02; 0,002...

Solución:

Es una progresión geométrica con $a_1 = 20$ y razón:

$$r = \frac{2}{20} = 0,1$$

Por tanto:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{20}{1-0,1} = \frac{20}{0,9} = 22,2\hat{2}$$

Ejercicio nº 18

En una progresión geométrica de razón positiva, $a_1 = 4$ y $a_3 = \frac{1}{4}$. Halla la suma de sus infinitos términos.

Solución:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow \frac{1}{4} = 4 \cdot r^2 \rightarrow \frac{1}{16} = r^2 \rightarrow r = \frac{1}{4}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$$

Ejercicio nº 19

En una urbanización realizaron la instalación del gas natural en el año 1999. Consideramos que en ese momento se hizo la primera revisión. Sabiendo que las revisiones sucesivas se realizan cada 3 años, responde:

- a) ¿En qué año se realizará la décima revisión?
- b) ¿Cuál es el número de revisión que se realizará en el año 2035?

Solución:

Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = 1999$ y $d = 3$.

a) $a_{10} = a_1 + 9d = 1999 + 27 = 2026$

En el año 2026

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$2035 = 1999 + (n - 1) \cdot 3$$

$$36 = (n - 1) \cdot 3$$

$$12 = n - 1 \rightarrow n = 13 \rightarrow \text{La número 13}$$

Ejercicio nº 20

Un estudiante de 3º de ESO se propone el día 1 de septiembre repasar matemáticas durante una quincena, haciendo cada día 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:

- a) ¿Cuántos ejercicios le tocará hacer el día 15 de septiembre?
- b) ¿Cuántos ejercicios hará en total?

Solución:

Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 2$.

a) $a_{15} = a_1 + 14d = 1 + 28 = 29$ ejercicios

b) $S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(1 + 29) \cdot 15}{2} = 225$ ejercicios

Ejercicio nº 21

El alquiler de una bicicleta cuesta 5 € la primera hora y 2 € más cada nueva hora.

- a) ¿Cuál es el precio total de alquiler de 7 horas?
- b) Halla una fórmula que nos dé el precio total de alquiler de n horas.

Solución:

Es una progresión aritmética con $a_1 = 5$ € y $d = 2$ €.

a) $a_7 = a_1 + 6d = 5 + 12 = 17$ € cuesta por 7 horas

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 5 + 2n - 2 = 2n + 3 \rightarrow a_n = 2n + 3$

Ejercicio nº 22

Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética. Sabiendo que el mayor de ellos mide 105°, ¿cuánto miden los otros dos?

Solución:

Los ángulos son a_1 , a_2 y a_3 . Sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_3 - 2d = 105^\circ - 2d \\ a_2 = a_3 - d = 105^\circ - d \\ a_3 = 105^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La suma de los tres es } 180^\circ : \\ 105^\circ - 2d + 105^\circ - d + 105^\circ = 180^\circ \rightarrow \\ \rightarrow -3d = -135 \rightarrow d = 45^\circ \end{array}$$

Por tanto:

$$a_1 = 105^\circ - 2d = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ$$

$$a_2 = 105^\circ - d = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$$

$$a_3 = 105^\circ$$

Los ángulos miden 15°, 60° y 105°, respectivamente.

Ejercicio nº 23

En un edificio, el primer piso se encuentra a 7,40 metros de altura, y la distancia entre dos pisos consecutivos, es de 3,80 metros.

- a) ¿A qué altura está el 9º piso?
- b) Obtén una fórmula que nos indique la altura a la que se encuentra el piso n .

Solución:

Es una progresión aritmética con $a_1 = 7,40$ y $d = 3,80$.

- a) $a_9 = a_1 + 8d = 7,40 + 30,40 = 37,80$ metros.
- b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 7,40 + (n - 1) \cdot 3,80 = 7,40 + 3,80n - 3,80 = 3,80n + 3,60 \rightarrow a_n = 3,80n + 3,60$

Ejercicio nº 24

Una máquina costó inicialmente 10 480 €. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad, y así sucesivamente.

- a) ¿Cuánto le costó la máquina al quinto propietario?
- b) Si el total de propietarios ha sido 7, ¿cuál es la suma total pagada por esa máquina?

Solución:

Es una progresión geométrica con $a_1 = 10 480$ y $r = \frac{1}{2}$.

- a) $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 10 480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10 480 \cdot \frac{1}{16} = \frac{10 480}{16} = 655$ euros
- b) $a_7 = a_1 \cdot r^6 = 10 480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 10 480 \cdot \frac{1}{64} = \frac{10 480}{64} = 163,75$ euros
 $S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = 20 796,25$ euros

Ejercicio nº 25

- a) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 3 años colocando 3 000 € al 6% de interés anual compuesto?
- b) ¿Y al cabo de 5 años?

Solución:

- a) $3\,000 \cdot 1,06^3 = 3\,573,048 \approx 3\,573,05 \text{ €}$
- b) $3\,000 \cdot 1,06^5 = 4\,014,6767 \approx 4\,014,68 \text{ €}$

Ejercicio nº 26

La población de un cierto país aumenta por término medio un 1% anual. Sabiendo que en la actualidad tiene 3 millones de habitantes:

- a) ¿Cuántos tendrá dentro de 10 años?
- b) ¿Y dentro de 20 años?

Solución:

- a) $3\,000\,000 \cdot 1,01^{10} = 3\,313\,866,376 \approx 3\,313\,866 \text{ habitantes}$
- b) $3\,000\,000 \cdot 1,01^{20} = 3\,660\,570,12 \approx 3\,660\,570 \text{ habitantes}$

Ejercicio nº 27

La maquinaria de una fábrica pierde cada año el 20% de su valor. En el momento de su compra valía 40 000 €.

- a) ¿Cuánto valía un año después de comprarla? ¿Y dos años después?
- b) ¿En cuánto se valorará 10 años después de haberla adquirido?

Solución:

- a) Un año después:

Si pierde el 20% de su valor, valdrá: $100\% - 20\% = 80\%$.

$$80\% \text{ de } 40\,000 = 0,8 \cdot 40\,000 = 32\,000 \text{ €}$$

Dos años después:

$$0,8 \cdot 32\,000 = 25\,600 \text{ €}$$

Observamos que es una progresión geométrica con $a_1 = 40\,000$ y $r = 0,8$.

- b) $40\,000 \cdot 0,8^{10} = 4\,294,97 \text{ €}$
Diez años después supone el término 11 de la sucesión.

Ejercicio nº 28

- a) ¿En cuánto se convertirán 2 000 € colocados al 5% de interés anual compuesto durante 4 años?
- b) ¿Y durante 6 años?

Solución:

a) $2\,000 \cdot 1,05^4 = 2\,431,01 \text{ €}$

b) $2\,000 \cdot 1,05^6 = 2\,680,19 \text{ €}$