PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES

Ejercicio 1: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a: $f(x)=9-4x^2$	b: $g(x)=\dfrac{x}{9-x^2}$	c: $h(x)=\dfrac{x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$
d: $y=1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x-1}$	e: $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x}{49-x^2}}$	f: $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$
g: $y=\sqrt{x^2-5x+6}$	h: $y=\dfrac{-2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$	i: $y=\dfrac{-2}{\sqrt[7]{x^2-5x+6}}$
j: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{3x-5}}$	k: $g(x)=\sqrt[4]{x^2+5x+8}$	l: $l(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$
m: $f(x)=\ln(2x+3)$	n: $k(x)=\ln(2x+3)+\dfrac{1}{x}$	ñ: $y=e^{1/x}+2^{-1/x-7}$

a) $f(x)=9-x^2$

$\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

b) $g(x)=\dfrac{x}{9-x^2}$

$\mathrm{Dom}(g)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 9-x^2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

$9-x^2=0$

$9=x^2$

$x=\pm 3$

c) $h(x)=\dfrac{x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$

$\mathrm{Dom}(h)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^3-2x^2-5x+6\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2,1,3\}$

$x^3-2x^2-5x+6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
1 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

d) $y = 1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1) + (x-1) - x^2}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x + x - 1 - x^2}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$

$\text{Dom } y = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

e) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x}{49 - x^2}}$

$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 49 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-7, 7\}$

f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \wedge \sqrt{x} \neq 0\} = (0, +\infty)$

g) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

$\text{Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$-$	$+$

$\text{Dom}(y) = (-\infty, +2] \cup [3, +\infty)$

h) $y = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

$\text{Dom } y = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 5x + 6 > 0\} = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff \begin{matrix} x = 3 \\ x = 2 \end{matrix}$

i) $y = \frac{-2}{\sqrt[7]{x^2 - 5x + 6}}$

$\text{Dom}(y) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 5x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3x-5}}$

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{x+2}{3x-5} \geq 0 \ \wedge \ 3x-5 \neq 0\} = (-\infty, -2] \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$3x-5=0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\frac{5}{3})$	$(\frac{5}{3},+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$3x-5$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+2}{3x-5}$	$+$	$-$	$+$

k) $g(x) = \sqrt[4]{x^2+5x+8}$

$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2+5x+8 \geq 0\}$

$x^2+5x+8=0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{2}$ No tiene solución

$x^2+5x+8 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Dom(g) = \mathbb{R}$

e) $\ell(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$

$Dom(\ell) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 3+2x-x^2 \geq 0\}$

$3+2x-x^2=0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 3(-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$3+2x-x^2$	$-$	$+$	$-$

$Dom(\ell) = [-1, 3]$

m) $f(x) = \ln(2x+3)$

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x+3>0\} = (-\frac{3}{2}, +\infty)$

$2x+3=0$

$2x=-3$

$x=-\frac{3}{2}$

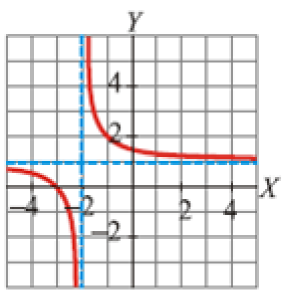
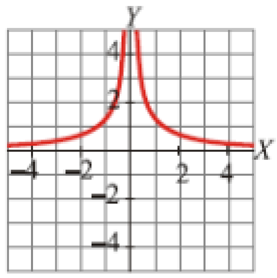
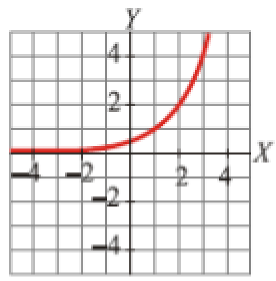
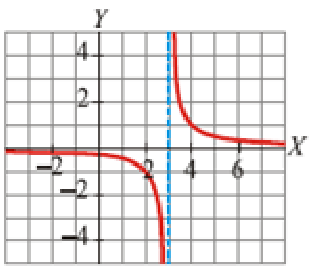
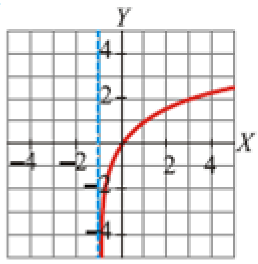
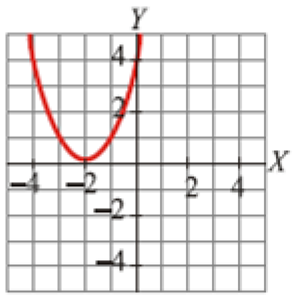
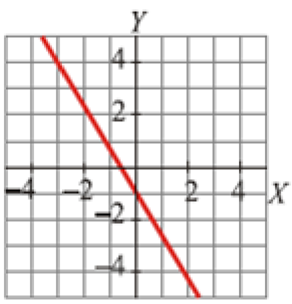
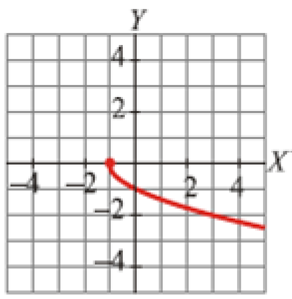
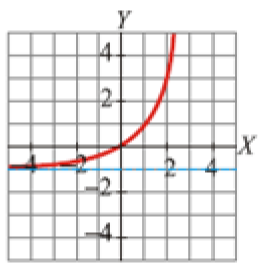
	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, +\infty)$
$2x+3$	$-$	$+$

n) $K(x) = \ln(2x+3) + \frac{1}{x}$

$Dom(K) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x+3>0 \wedge x \neq 0\} = (-\frac{3}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$

ñ) $y = e^{1/x} + 2^{-1/x-7}$ $\quad Dom(y) = \mathbb{R} \setminus \{0, 7\}$

Ejercicio 2: Calcula el dominio y la imagen de las siguientes funciones dadas por sus representaciones gráficas:

a: 	b: 	c: 
d: 	e: 	f: 
g: 	h: 	i: 

a) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$Im = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$Im = (0, +\infty)$

c) $Dom = \mathbb{R}$
$Im = (0, +\infty)$

d) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$Im = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $Dom = (-1, +\infty)$
$Im = \mathbb{R}$

f) ~~Dom = [0, +∞)~~
$Dom = \mathbb{R}$
$Im = [0, +\infty)$

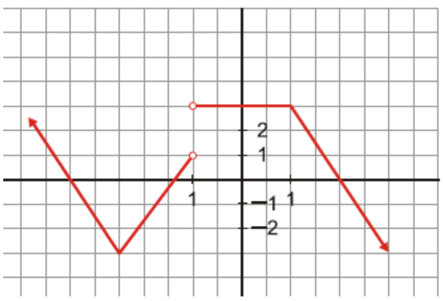
g) $Dom = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

h) $Dom = [-1, +\infty)$
$Im = (-\infty, 0]$

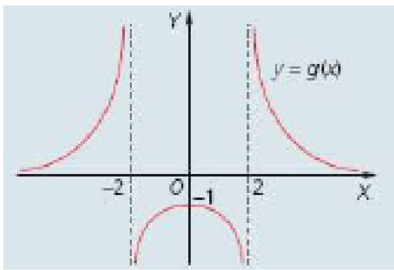
i) $Dom = \mathbb{R}$
$Im = (-1, +\infty)$

Ejercicio 3: Analiza y estudia el dominio, recorrido, simetría, monotonía y extremos relativos de las siguientes funciones:

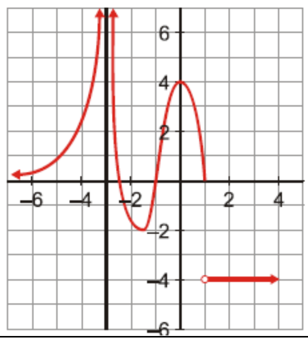
a:



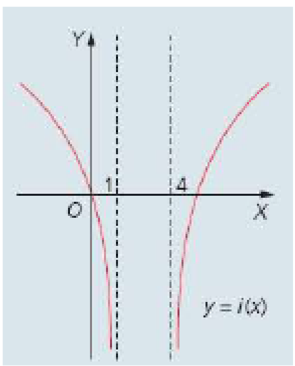
b:



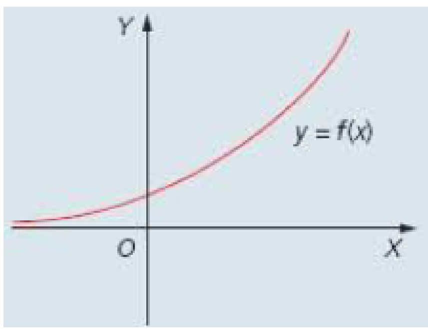
c:



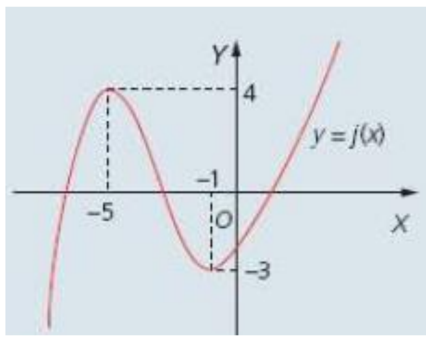
d:



e:



f:



a) $Dom = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$Im = \mathbb{R}$
No es simétrica

Decrece $(-\infty,-5)\cup(2,+\infty)$

Crece $(-5,-2)$

mínimo relativo $(-5,-3)$

b) $Dom = \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

$Im = (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

Simétrica par

Decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

Crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

máximo relativo $(0,-1)$

c) $Dom = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$Im = \{-4\}\cup[-2,+\infty)$

No simétrica

Crece $(-\infty,-3)\cup(-2,0)$

decrece $(-3,-2)\cup(0,1)$

mínimo rel $(-2,-2)$

max rel $(0,4)$

d) $Dom = (-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

$Im = \mathbb{R}$

No simétrica

decrece en $(-\infty,1)$

Crece en $(4,+\infty)$

No tiene extremos

e) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(0, +\infty)$

No simétrica

Crece siempre

No extremos

f) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $\mathbb{R}$

No simétrica

Crece en $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

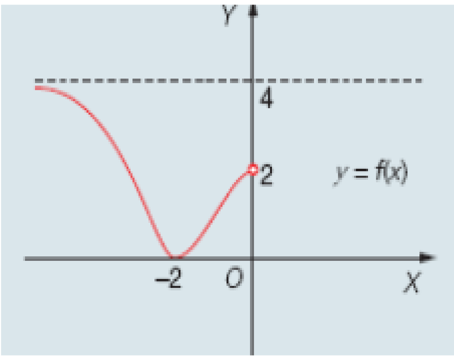
decrece en $(-5, -1)$

máx rel $(-5, 4)$

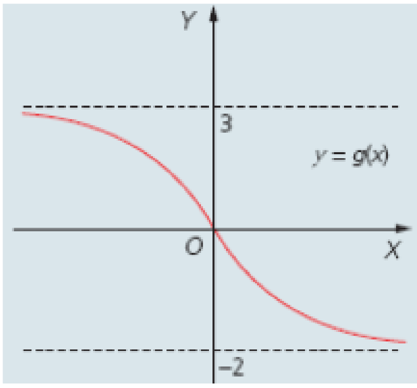
mín rel $(-1, -3)$

Ejercicio 4: Estudia la acotación, simetría, tendencias y la posible existencia de supremo, ínfimo y extremos absolutos en cada una de las siguientes funciones:

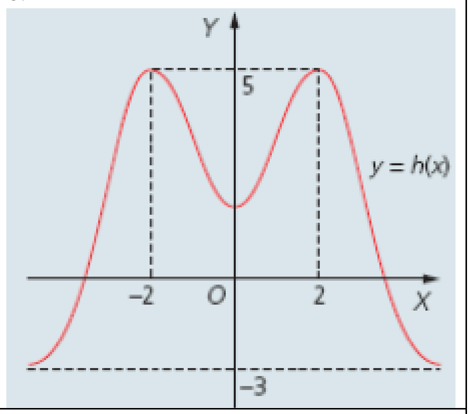
a:



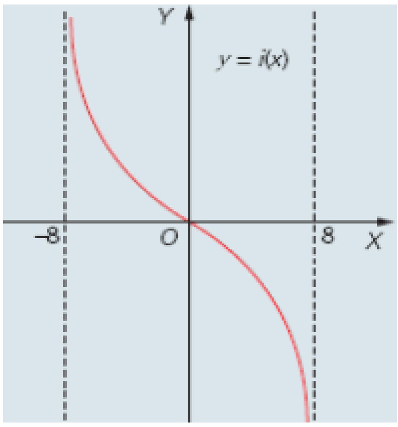
b:



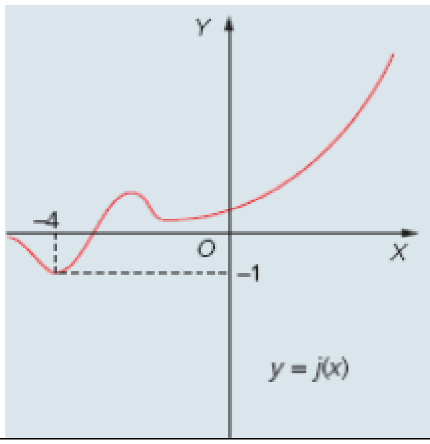
c:



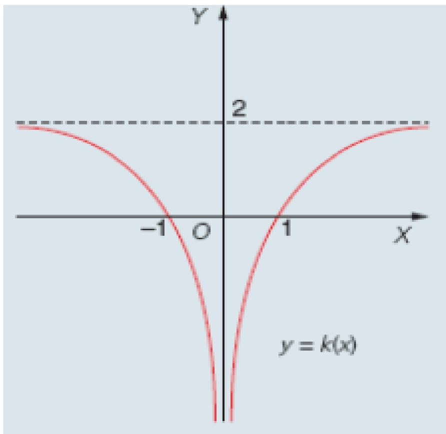
d:



e:



f:



a) acotada superiomente por 4. supremo 4
acotada inferiormente por 0. Infimo 4. Mínimo Absoluto (-2,0)
No simétrica

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$

b) Acotada sup. por 3. Supremo 3. No extremos abs.
Acotada Inf por -2. Infimo -2
No simétrica

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

c) Acotada sup por 5. Supremo 5. max abs $(-2,5)$ y $(2,5)$
Acotada inf por -3. Infimo -3. No mínim abs
Simétrica par

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$

d) No acotada
Simétrica par

$\lim_{x \to -8^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 8^-} f(x) = -\infty$

e) No acotada sup
Acotada infer. por -1. -1 Infimo. Min Absoluto $(-4,-1)$
No simétrica.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f) Acotada sup por 2. Supremo 2. No extremos absolutos
No acotada inf.

Simétrica par

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Ejercicio 5: Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a: $f(x)=9-4x^2$	b: $g(x)=x-2$	c: $h(x)=\dfrac{4}{x}$
d: $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	e: $f(x)=x\cdot e^{x^2}$	f: $f(x)=\left(x-x^3\right)x$

a) $f(x)=9-x^2$

$f(-x)=9-(-x)^2=9-x^2=f(x) \Rightarrow f$ simétrica par

b) $g(x)=x-2$

$g(-x)=-x-2 \begin{array}{l}\neq g(x)\\ \neq -g(x)\end{array}$ No simétrica

c) $h(x)=\dfrac{4}{x}$

$h(-x)=\dfrac{4}{-x}=-\dfrac{4}{x}=-h(x) \Rightarrow h$ simetr. impar

d) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x) \Rightarrow$ Sim. impar

e) $f(x)=xe^{x^2}$

$f(-x)=-xe^{(-x)^2}=-xe^{x^2}=-f(x) \Rightarrow f$ sim. impar

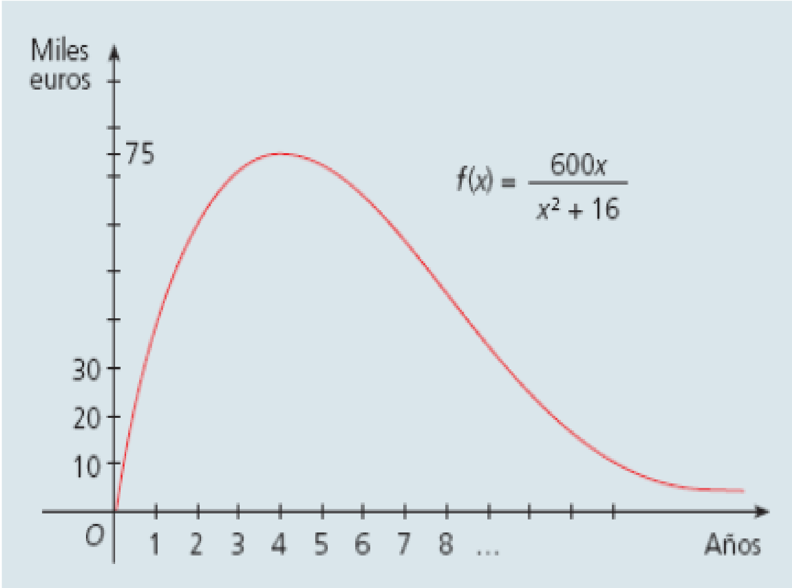
f) $f(x)=(x-x^3)x$

$f(-x)=(-x-(-x)^3)\cdot(-x)=(-x+x^3).(-x)=(x-x^3)x=f(x)$

$\Rightarrow f$ sim. par

Ejercicio 6: La gráfica siguiente muestra los beneficios en miles de euros de una empresa desde el momento en que se fundó. Contesta razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué variables se relacionan?
b) ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función? ¿Qué sentido tienen en el contexto del problema?
c) ¿Al cabo de cuántos años tiene la empresa beneficios máximos? ¿A cuánto ascienden éstos?
d) ¿Cómo varían los beneficios en los primeros años? ¿Y después?
e) ¿Crees que habrá un punto en el que no existan ni beneficios ni pérdidas?



a) miles de euros de beneficios por años

b) $Dom(f) = [0, +\infty)$ Años ~~del~~ desde que la empresa se fundó

$Im(f) = [0, 75]$ miles de euros de beneficios

c) Al cabo de 4 años 75 mil euros de beneficios

d) Los beneficios aumentan en los primeros 4 años. A partir del 4° empiezan a descender los beneficios

e)

Ejercicio 7: Dadas las funciones $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ y $g(x) = x-3$, calcula:

a: $f+g$; $f-g$ y sus dominios	b: $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$ y sus dominios	c: $\frac{1}{g}$ y su dominio

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{x^2-4} + x - 3 = \frac{x + (x-3)(x^2-4)}{x^2-4} =$

$= \frac{x + x^3 - 4x - 3x^2 + 12}{x^2-4} = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 12}{x^2-4}$

$Dom(f+g) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x^2-4} - (x-3) = \frac{x-(x-3)(x^2-4)}{x^2-4} =$$

$$= \frac{x - x^3 + 4x + 3x^2 - 12}{x^2-4} = \frac{-x^3+3x^2+5x-12}{x^2-4}$$

$\mathrm{Dom}(f-g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x}{x^2-4} \cdot (x-3) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$

$\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x^2-4}}{x-3} = \frac{x}{(x^2-4)(x-3)} = \frac{x}{x^3-3x^2-4x+12}$$

$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$

c) $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{x-3}$ $\quad \mathrm{Dom}\left(\frac{1}{g}\right) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ejercicio 8: Dadas las funciones $f(x) = \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = x+1$, calcula:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $g \circ g \circ f$

Ejercicio 8:

$f(x) = \frac{x^2}{3}$ $\quad g(x) = x+1$

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \frac{(x+1)^2}{3}$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2}{3}\right) = \frac{x^2}{3} + 1$

c) $g \circ g \circ f = g(g(f(x))) = g\left(g\left(\frac{x^2}{3}\right)\right) = g\left(\frac{x^2}{3}+1\right) = \frac{x^2}{3}+1+1 = \frac{x^2}{3}+2$

Ejercicio 9: Dadas las funciones $f(x)=2\cdot x^2-1$ y $g(x)=\sqrt{x}$, calcula:

a) $f\circ g$ b) $g\circ f$ c) $f\circ g\circ f$

Ejercicio 9: $f(x)=2x^2-1$ $g(x)=\sqrt{x}$

a) $f\circ g(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=2(\sqrt{x})^2-1=2x-1$

b) $g\circ f(x)=g(f(x))=g(2x^2-1)=\sqrt{2x^2-1}$

c) $f\circ g\circ f(x)=f(g(f(x)))=f(\sqrt{2x^2-1})=2(\sqrt{2x^2-1})^2-1=$
$=2(2x^2-1)-1=4x^2-2-1=4x^2-3$

Ejercicio 10: Dadas las funciones $f(x)=1+3\cdot x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$ y $h(x)=\frac{3}{x^2+1}$, calcula:

a) $f\circ g$ b) $f\circ h$ c) $(g\circ f)(-1)$

d) $h\circ g$ e) $(f\circ f)(1)$ f) $(h\circ h)(0)$

Ejercicio 10: $f(x)=1+3x^2$ $g(x)=\sqrt{x}$ $h(x)=\frac{3}{x^2+1}$

a) $f\circ g(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\cancel{f}\ 2(\sqrt{x})^2-1=2x-1$

b) $f\circ h(x)=f(h(x))=f\left(\frac{3}{x^2+1}\right)=1+3.\left(\frac{3}{x^2+1}\right)^2=1+\frac{27}{(x^2+1)^2}$

c) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(1+3(-1)^2)=g(1+3)=g(4)=\sqrt{4}=2$

d) $(h\circ g)x=h(g(x))=h(\sqrt{x})=\frac{3}{(\sqrt{x})^2+1}=\frac{3}{x+1}$

e) $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(1+3.1^2)=f(4)=1+3.4^2=49$

f) $(h\circ h)(0)=h(h(0))=h\left(\frac{3}{0+1}\right)=h(3)=\frac{3}{3^2+1}=\frac{3}{10}$

Ejercicio 11

Ejercicio 11: Determina las funciones inversas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x}$ b) $f(x)=(x-1)^2$ c) $g(x)=3x+2$

d) $h(x)=\dfrac{2x}{3x-5}$ e) $f(x)=\dfrac{x}{5}-7$ f) $h(x)=x^3-2$

a) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad y=\sqrt{x}$ $\quad x=\sqrt{y}$ $\quad x^2=y$ $\quad \boxed{f^{-1}(x)=x^2}$

b) $f(x)=(x-1)^2$ $\quad y=(x-1)^2$ $\quad x=(y-1)^2$ $\quad \sqrt{x}=y-1$

$\Rightarrow y=\sqrt{x}+1$ $\quad \boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1}$

c) $g(x)=3x+2$

$y=3x+2$

$x=3y+2$ $\quad \dfrac{x-2}{3}=y$ $\quad f^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$

d) $h(x)=\dfrac{2x}{3x-5}$

$y=\dfrac{2x}{3x-5}$

$x=\dfrac{2y}{3y-5}$ $\quad x(3y-5)=2y$ $\quad 3xy-5x=2y$

$3xy-2y=5x$ $\quad (3x-2)y=5x$ $\quad y=\dfrac{5x}{3x-2}$

$$\boxed{h^{-1}(x)=\dfrac{5x}{3x-2}}$$

e) $f(x) = \frac{x}{5} - 7$

$y = \frac{x}{5} - 7$

$x = \frac{y}{5} - 7 \qquad (x+7)\cdot 5 = y \qquad f^{-1}(x) = 5(x+7)$

f) $h(x) = x^3 - 2$

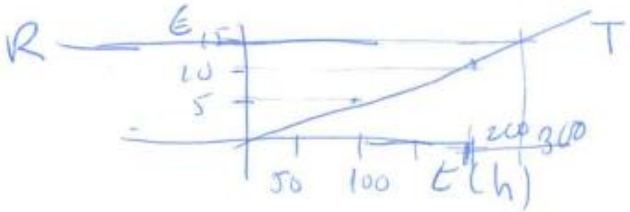
$y = x^3 - 2$

$x = y^3 - 2 \qquad x + 2 = y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{x+2} \qquad h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

Ejercicio 12: Una empresa, Rapidazztel, ofrece una tarifa de utilización de internet de 15 € mensuales. La empresa TrucoPhone ofrece una tarifa de 0,05 € por hora. Discute que tarifa te parece más conveniente a la hora de elegir.

Ejercicio 12: R ⇒ 15€/mes

T ⇒ 0,05€/h $\qquad f(t) = 0{,}05t \qquad$ t = nº horas



Si vas a usar más de 300 h/ms conviene la tarifa de Rapidazztel

Si no, conviene más Trucophone

Ejercicio 13: Calcula la expresión de la función área, A, de los rectángulos de 20 m de perímetro en función de su base *x*

Ejercicio 13: Área rectángulo de p = 20 cm en fun de base x

$P = 2x + 2y = 20 \qquad x + y = 10 \qquad y = 10 - x$

$A = x \cdot y = x(10 - x) = 10x - x^2$

$A(x) = 10x - x^2$

Ejercicio 14: Dadas la funciones $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$, calcula

a) $(f \circ g)^{-1}(0)$

b) $\left(\dfrac{g}{f}\right)^{-1}$

Ejercicio 14: $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x-2}{3}$

a) $(f \circ g)^{-1}(0)$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = \frac{3}{\frac{x-2}{3} - 2} = \frac{3}{\frac{x-2-6}{3}} = \frac{9}{x-8}$$

$$y = \frac{9}{x-8} \qquad x = \frac{9}{y-8} \qquad y-8 = \frac{9}{x} \qquad y = \frac{9}{x} + 8$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{9}{x} + 8$$

$$(f \circ g)^{-1}(0) = \frac{9}{0} + 8$$ No está definido

b) $\left(\dfrac{g}{f}\right)^{-1}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x-2}{3}}{\frac{3}{x-2}} = \frac{(x-2)^2}{9} \qquad y = \frac{(x-2)^2}{9}$$

$$\cancel{9y = (x-2)} \quad x = \frac{(y-2)^2}{9} \qquad 9x = (y-2)^2$$

$$\sqrt{9x} = y-2 \Rightarrow 3\sqrt{x} = y-2 \Rightarrow y = 3\sqrt{x} + 2$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{-1}(x) = 3\sqrt{x} + 2$$