[1]

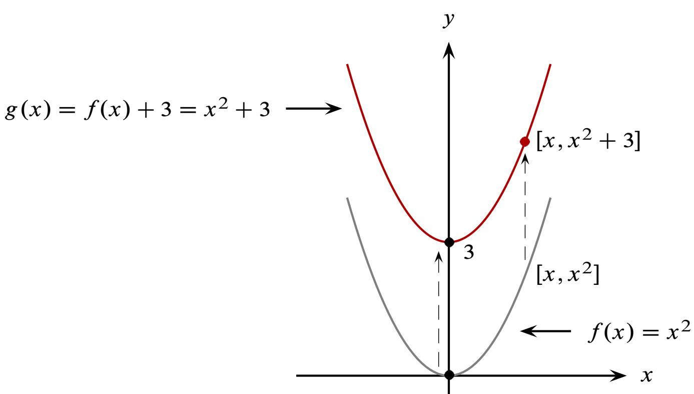
## 2.7 Transformaciones de funciones

Se pretende ahora que, a partir del conocimiento de la gráfica de una función $f$, esencialmente mediante traslaciones, contracciones y reflexiones, se obtenga un bosquejo de la gráfica de una función $g$ de la forma

$$g(x) = kf(ax - b) + c\,.$$

**Ejemplo 2.7.1** *La gráfica de:* $g(x) = x^2 + 3$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *desplazada hacia arriba* 3 *unidades.*

▼



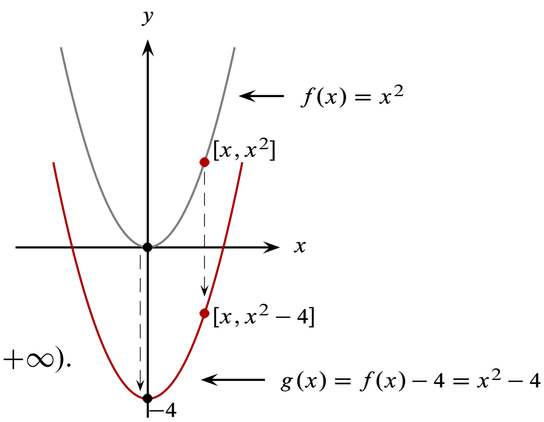

$D_g = D_f\,, R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [3, +\infty)$.

□

**Ejemplo 2.7.2** *La gráfica de:* $g(x) = x^2 - 4$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *desplazada hacia abajo* 4 *unidades.*

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

▼




$D_g = D_f R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [-4, +\infty)$.

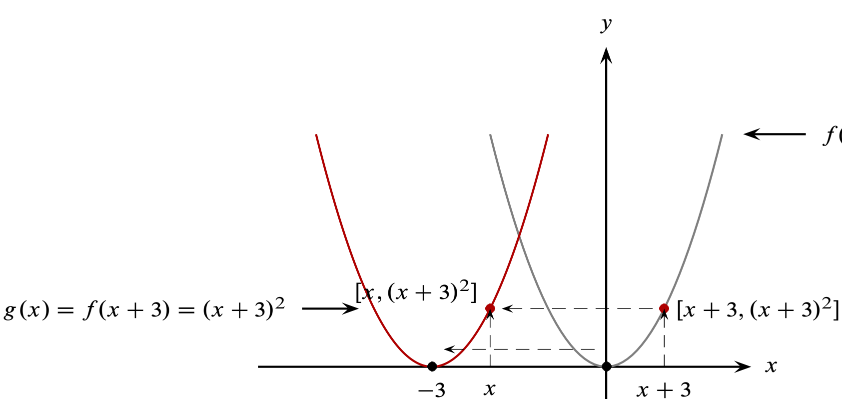
□

De los dos ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(x) + c$ es la gráfica de $f$ desplazada verticalmente $c$ unidades.
  En este caso $D_g = D_f$ & $R_g = \left\{ f(x) + c \mid f(x) \in R_f \right\}$.

**Ejemplo 2.7.3** *La gráfica de $g(x) = (x + 3)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la izquierda 3 unidades.*

▼

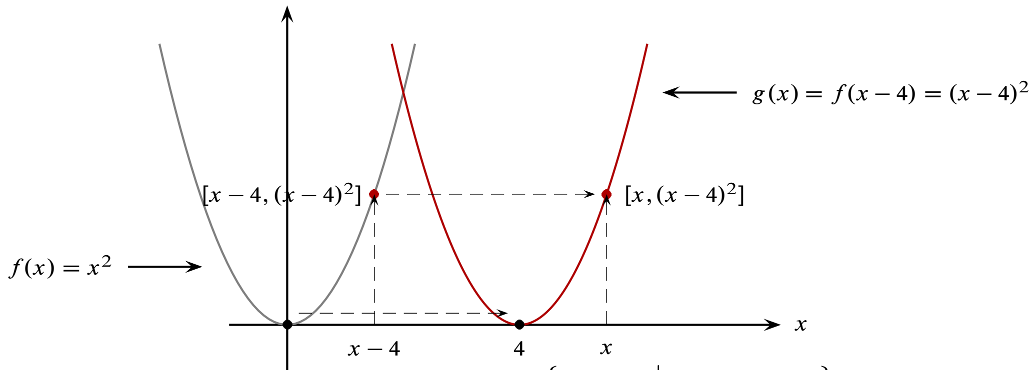



$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \in D_f \right\}$ & $R_g = R_f$.

□

**Ejemplo 2.7.4** *La gráfica de $g(x) = (x - 4)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la derecha 4 unidades.*

▼




$D_g = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - 4 \in D_f \,\right\}$ & $R_g = R_f$.

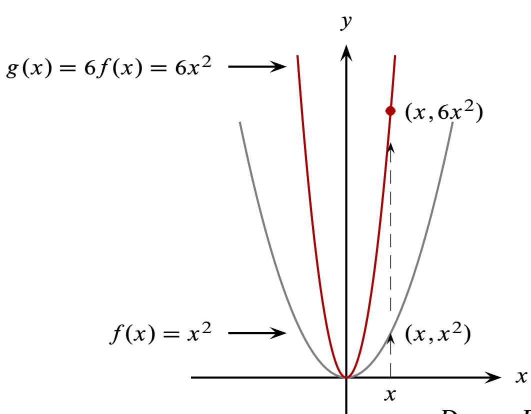
□

De los dos ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de: $g(x) = f(x - c)$ es la gráfica de $f$ desplazada horizontalmente $c$ unidades.
  En este caso $D_g = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - c \in D_f \,\right\}$ & $R_g = R_f$.

**Ejemplo 2.7.5** *La gráfica de $g(x) = 6x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada 6 veces en la dirección vertical.*

▼

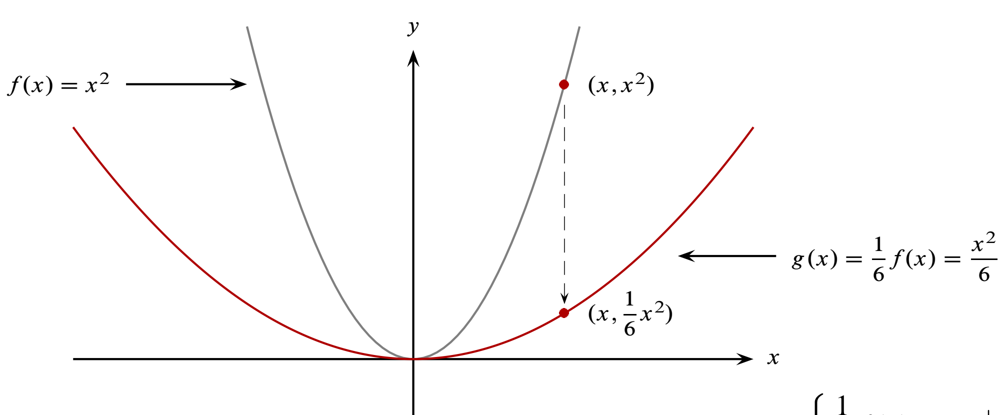



$D_g = D_f$ & $R_g = \left\{\, 6f(x) \,\middle|\, f(x) \in R_f \,\right\}$.

□

**Ejemplo 2.7.6** *La gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{6}x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida 6 veces en la dirección vertical.*

▼

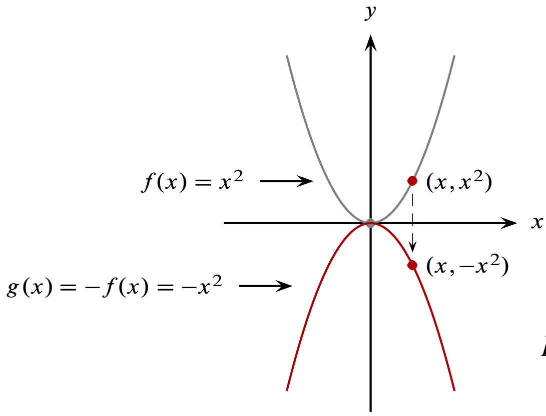



$D_g = D_f$ & $R_g = \left\{\, \dfrac{1}{6}f(x) \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \in R_f \,\right\}$.

$\square$

**Ejemplo 2.7.7** *La gráfica de $g(x) = -x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ reflejada respecto al eje $x$.*

▼




$D_g = D_f$ & $R_g = \{ -f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \in R_f \}$.

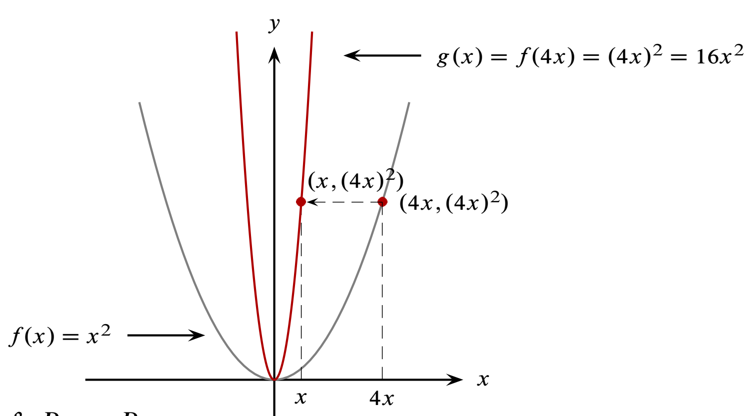
$\square$

De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = kf(x)$ es la gráfica de $f$:
  1. Alargada verticalmente si $k > 1$.
  2. Comprimida verticalmente si $0 < k < 1$.
  3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $|k|f(x) = -kf(x)$ y la reflejamos con respecto al eje de las $x$.
     $D_f = D_g$, $R_g = \{ kf(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \}$.

**Ejemplo 2.7.8** *La gráfica de $g(x) = (4x)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida horizontalmente 4 veces.*

▼

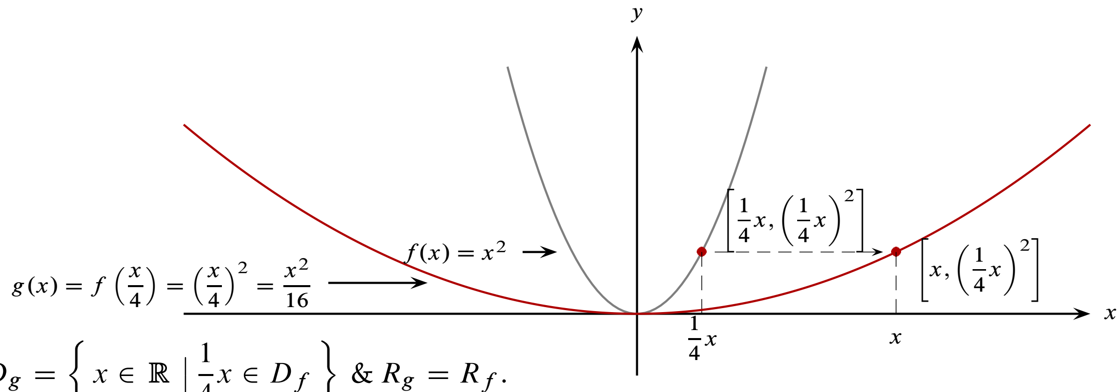



$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4x \in D_f \}$ & $R_g = R_f$.

$\square$

**Ejemplo 2.7.9** *La gráfica de* $g(x) = \left(\dfrac{1}{4}x\right)^2$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *alargada horizontalmente* 4 *veces.*

▼

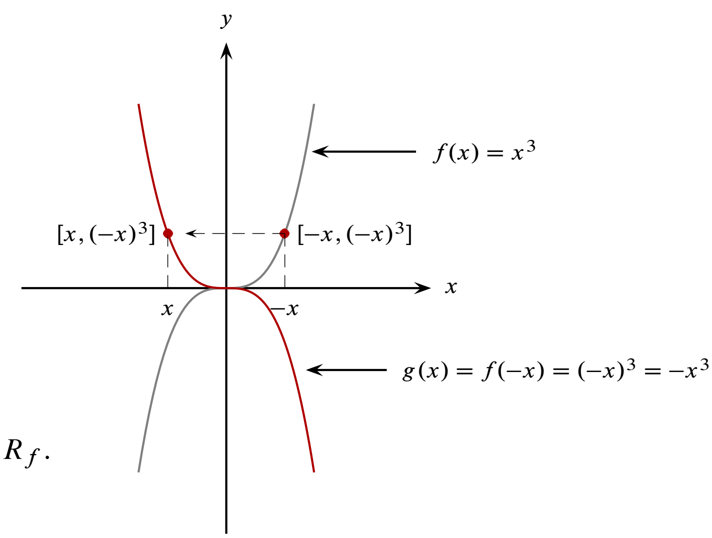



$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{4}x \in D_f \right\}$ & $R_g = R_f$.

□

**Ejemplo 2.7.10** *La gráfica de* $g(x) = (-x)^3$ *es la gráfica de* $f(x) = x^3$ *reflejada respecto al eje* $y$.

▼




$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_f \right\}$ & $R_g = R_f$.

□

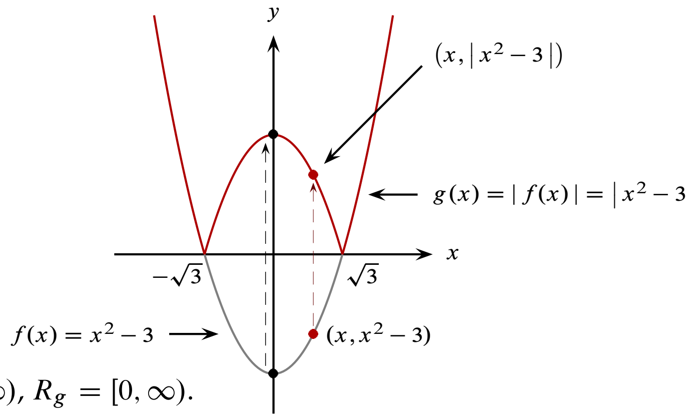
De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(kx)$ es la gráfica de $f$:
  1. Comprimida horizontalmente si $k > 1$.
  2. Alargada horizontalmente si $0 < k < 1$.
  3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $f(|k|x) = f(-kx)$ y la reflejamos con respecto al eje de las $y$.
     $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid kx \in D_f \right\}$, $R_g = R_f$.

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado:

**Ejemplo 2.7.11**

*Si $g(x) = \left| x^2 - 3 \right|$, la gráfica de $g$ es la gráfica de $f(x) = x^2 - 3$ cuando $x^2 - 3 \geq 0$ y la simétrica de $f$ con respecto al eje de las $x$ cuando $x^2 - 3 < 0$.*

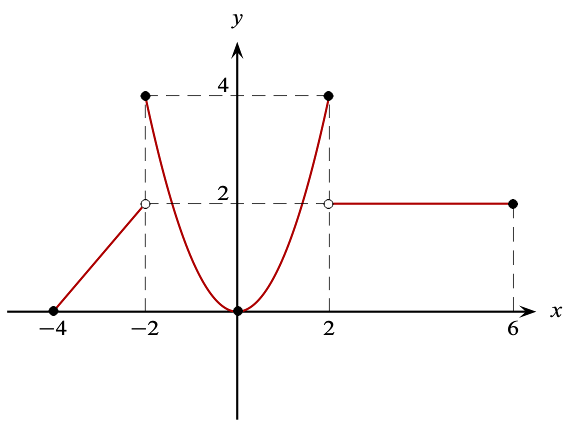



$D_g = D_f$, $R_f = [-3, \infty)$, $R_g = [0, \infty)$.

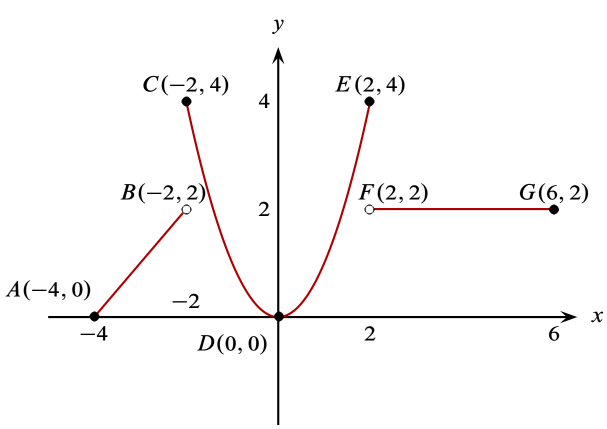
- Si $g(x) = |f(x)|$, la gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f$ cuando $f(x) \geq 0$ y es la simétrica de $f$ con respecto al eje de las $x$ cuando $f(x) < 0$.

  $D_g = D_f$, $R_g = \left\{ |f(x)| \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \right\}$.

**Ejemplo 2.7.12** *Considerando que la siguiente curva es la gráfica de la función $f$, bosquejar la gráfica de la función $g(x) = f(2x) - 3$.*




▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de $f$ cuyas imágenes determinarán la de $g$:



1. Primero se obtiene la curva $y = f(2x)$ comprimiendo horizontalmente la curva $y = f(x)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

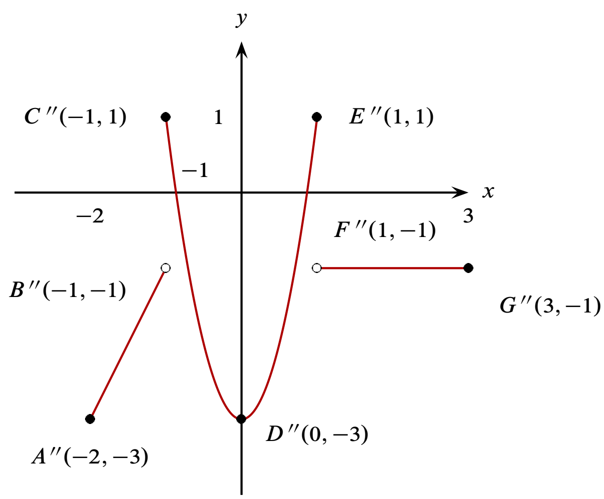
$$A(-4,0),\ B(-2,2),\ C(-2,4),\ D(0,0),\ E(2,4),\ F(2,2)\ \&\ G(6,2)\,;$$
$$A'(-2,0),\ B'(-1,2),\ C'(-1,4),\ D'(0,0),\ E'(1,4),\ F'(1,2)\ \&\ G'(3,2)\,.$$

2. Luego se obtiene la curva $y = f(2x) - 3$ desplazando verticalmente 3 unidades hacia abajo a la curva $y = f(2x)$.

   La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'(-2,0),\ B'(-1,2),\ C'(-1,4),\ D'(0,0),\ E'(1,4),\ F'(1,2)\ \&\ G'(3,2)\,;$$
$$A''(-2,-3),\ B''(-1,-1),\ C''(-1,1),\ D''(0,-3),\ E''(1,1),\ F''(1,-1)\ \&\ G''(3,-1)\,.$$

3. La gráfica de $g(x) = f(2x) - 3$ es así:




También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-4, 6]$ y que por tanto el $D_g = [-2, 3]$. Usando los puntos elegidos anterioremente tenemos:

$A\,(-4,0)$: $g(-4) = f(-4) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow A''\,(-2,-3) \in G_g\,;$

$B\,(-2,2)$: $g(-1^-) = f(-2^-) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow B''\,(-1,-1) \notin G_g\,;$

$C\,(-2,4)$: $g(-1) = f(-2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow C''\,(-1,1) \in G_g\,;$

$D\,(0,0)$: $g(0) = f(0) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow D''\,(0,-3) \in G_g\,;$

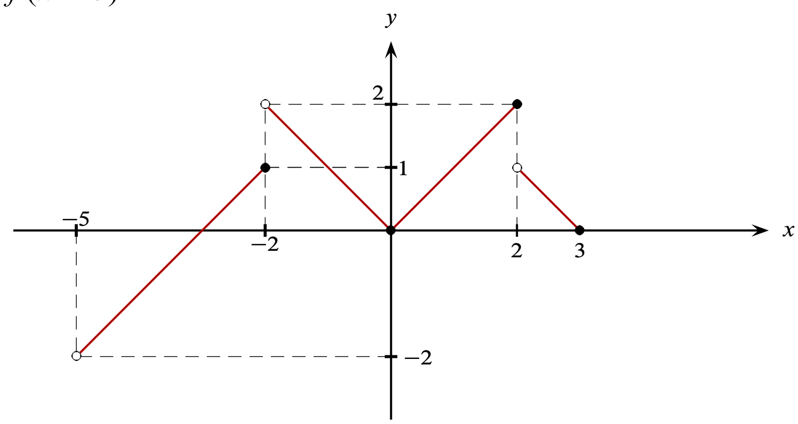
$E\,(2,4)$: $g(1) = f(2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow E''\,(1,1) \in G_g\,;$

$F\,(2,2)$: $g(1^+) = f(2^+) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow F''\,(1,-1) \notin G_g\,;$

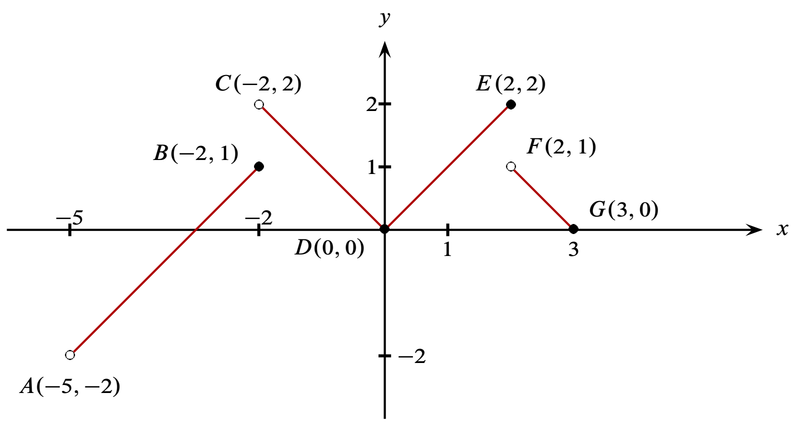
$G\,(6,2)$: $g(3) = f(6) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow G''\,(3,-1) \in G_g\,.$

□

**Ejemplo 2.7.13** *Considerando que la siguiente figura es la gráfica de una función $f$, bosquejar la gráfica de la función $g(x) = 1 - 2f(x-3)$.*




▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de $f$ cuyas imágenes determinarán la de $g$:




1. Primero se obtiene la curva $y = f(x-3)$ desplazando horizontalmente 3 unidades hacia la derecha a la curva $y = f(x)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$\begin{array}{lllllll} A(-5,-2), & B(-2,1), & C(-2,2), & D(0,0), & E(2,2), & F(2,1) & \& \, G(3,0)\,; \\ A'(-2,-2), & B'(1,1), & C'(1,2), & D'(3,0), & E'(5,2), & F'(5,1) & \& \, G'(6,0)\,. \end{array}$$

2. Luego se obtiene la curva $y = 2f(x-3)$ alargando verticalmente a la curva $y = f(x-3)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

$$\begin{array}{lllllll} A'(-2,-2), & B'(1,1), & C'(1,2), & D'(3,0), & E'(5,2), & F'(5,1) & \& \, G'(6,0)\,; \\ A''(-2,-4), & B''(1,2), & C''(1,4), & D''(3,0), & E''(5,4), & F''(5,2) & \& \, G''(6,0)\,. \end{array}$$

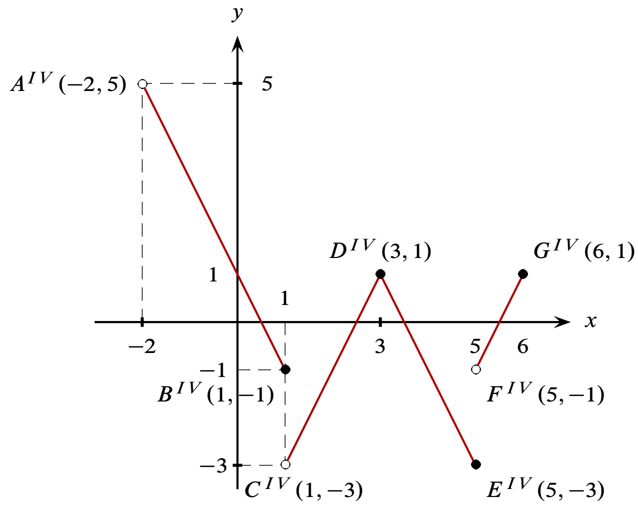
3. Después se obtiene la curva $y = -2f(x-3)$ poniendo un espejo en el eje $x$ para reflejar a la curva $y = 2f(x-3)$. Esto se consigue multiplicando a las ordenadas por $-1$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$\begin{array}{lllllll} A''(-2,-4), & B''(1,2), & C''(1,4), & D''(3,0), & E''(5,4), & F''(5,2) & \& \, G''(6,0)\,; \\ A'''(-2,4), & B'''(1,-2), & C'''(1,-4), & D'''(3,0), & E'''(5,-4), & F'''(5,-2) & \& \, G'''(6,0)\,. \end{array}$$

4. Finalmente se obtiene la curva $y = -2f(x-3)+1$ desplazando hacia arriba una unidad a la curva $y = -2f(x-3)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'''(-2,4),\ \ B'''(1,-2),\ \ C'''(1,-4),\ \ D'''(3,0),\ \ E'''(5,-4),\ \ F'''(5,-2)\ \ \&\ G'''(6,0)\,;$$
$$A^{IV}(-2,5),\ B^{IV}(1,-1),\ C^{IV}(1,-3),\ D^{IV}(3,1),\ E^{IV}(5,-3),\ F^{IV}(5,-1)\ \&\ G^{IV}(6,1)\,.$$

5. Por lo tanto, la gráfica de $g(x) = 1-2f(x-3)$ es




También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-5,3]$ y que por tanto el $D_g = [-2,6]$. Usando los puntos elegidos anterioremente tenemos:

$A\,(-5,-2)$: $g(-2) = 1-2f(-5) = 1-2(-2) = 1+4 = 5 \Rightarrow A^{iv}\,(-2,-5) \notin G_g$;

$B\,(-2,-1)$: $g(1) = 1-2f(-2) = 1-2(1) = 1-2 = -1 \Rightarrow B^{iv}\,(1,-1) \in G_g$;

$C\,(-2,2)$: $g(1^+) = 1-2f(-2^+) = 1-2(2) = 1-2 = -3 \Rightarrow C^{iv}\,(1,-3) \notin G_g$;

$D\,(0,0)$: $g(3) = 1-2f(0) = 1-2(0) = 1-0 = 0 \Rightarrow D^{iv}\,(3,1) \in G_g$;

$E\,(2,2)$: $g(5) = 1-2f(2) = 1-2(2) = 1-4 = -3 \Rightarrow E^{iv}\,(5,-3) \in G_g$;

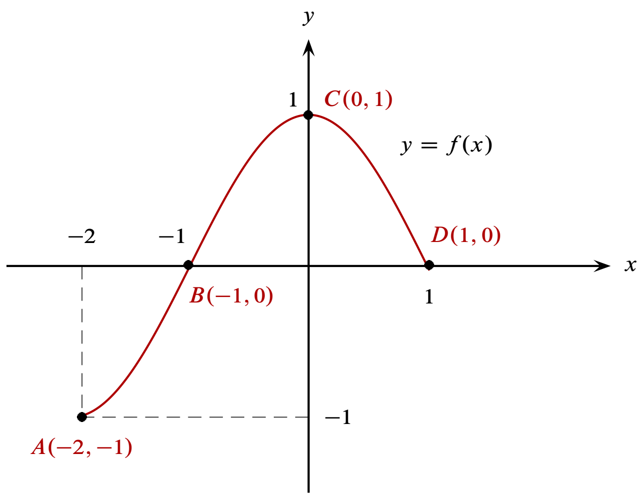
$F\,(2,1)$: $g(5^+) = 1-2f(2^+) = 1-2(1) = 1-2 = -1 \Rightarrow F^{iv}\,(5,-1) \notin G_g$;

$G\,(3,0)$: $g(6) = 1-2f(3) = 1-2(0) = 1-0 = 1 \Rightarrow G^{iv}\,(6,1) \in G_g$.

□

**Ejercicios 2.7.1** *Soluciones en la página 15*

1. Considerando la siguiente figura como la gráfica de cierta función $f$,

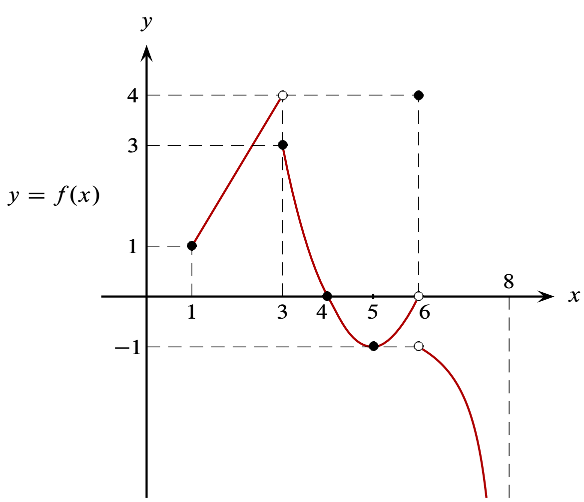



realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$g(x) = -2f(x-1) + 3.$$

Especificar la nueva posición de los puntos $A(-2,-1)$; $B(-1,0)$; $C(0,1)$ & $D(1,0)$.

2. Considerando que la figura siguiente es un bosquejo de la gráfica de cierta función $f$, obtenga el dominio, el rango, las raíces así como un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3f(x+5)+2$.




3. Considerando la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

a. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $f$.

b. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = f(x-3) - 2$.

c. Obtener dominio, rango y raíces de la función $g$.

4. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq -1\,; \\ 2x - 3 & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$$

Obtenga la gráfica de $h(x) = f(x - 3) - 1$.

5. Dada la función

$$g(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{si } -3 \leq t < 1\,; \\ 3t & \text{si } 1 < t < 2\,. \end{cases}$$

   a. Bosquejar su gráfica y determinar dominio, rango y raíces.
   b. Obtener los intervalos en los que $g(t) \geq 0$ así como aquellos en donde $g(t) < 0$.
   c. A partir de la gráfica obtenida, bosquejar la gráfica de $f(t) = 2g(t + 2) - 3$.

6. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } -8 \leq x < 0\,; \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 6\,. \end{cases}$$

   a. Determinar dominio, raíces o puntos en donde la función vale cero, gráfica y rango de $f$.
   b. A partir de la gráfica de $f$, construir la gráfica de $h(x) = 1 - 2f(x + 3)$.

7. Considere la función $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

   a. Grafique la función $f$.
   b. Usando la gráfica de $f$, construir la gráfica de la función $h(x) = 3 - 2f(2x + 1)$ y obtener una expresión o fórmula para $h(x)$.

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \leq x < -4\,; \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } -4 \leq x \leq 0\,; \\ 2x - 3 & \text{si } \quad 0 < x < 4\,, \end{cases}$$

   determine:

   a. Un esbozo gráfico de la función.
   b. Dominio, rango, raíces, paridad, intervalos de monotonía e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.
   c. Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -f(x - 1) + 2$.

9. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } -4 < x \leq -1\,; \\ -1 & \text{si } -1 < x < 3\,; \\ (x - 4)^2 & \text{si } x \geq 3\,. \end{cases}$$

a. Obtenga dominio, raíces y un bosquejo de la gráfica de $g$, así como su rango.

b. Grafique la función $h(x) = g(x+3) - 2$, a partir de la gráfica de $g$.

10. Sea $f$ la función dada por $f(t) = t^2$ con $0 \le t \le 1$.

Sea $g$ la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -1 \le t \le 0\,; \\ f(t) & \text{si } 0 \le t \le 1\,. \end{cases}$$

a. Hallar el dominio y hacer un bosquejo de la gráfica de $g$ indicando su rango o imagen.

b. Si $h(t) = 2g(t-1) + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica de esta nueva función e indicar su dominio y rango.

11. Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \le -1; \\ |\,3x-4\,| & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

$$g(x) = 3f(x+1) - 4,$$

determinar las gráficas de ambas funciones, el dominio y el rango de la función $g$.

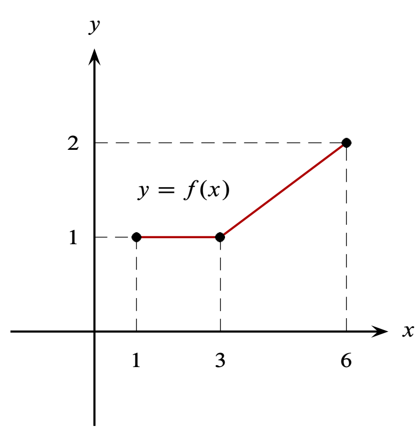
12. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } -3 < x \le -1\,; \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \le 2\,; \\ -1 & \text{si } 2 < x \le 4\,. \end{cases}$$

a. Obtener la gráfica, el rango y las raíces de $f$.

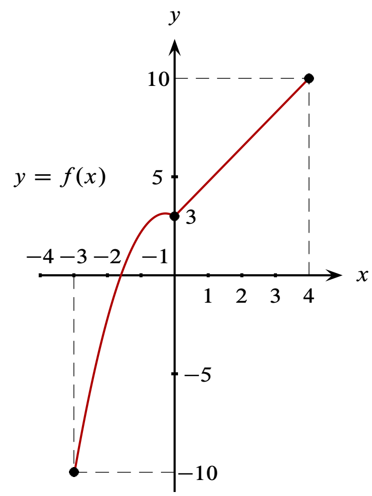
b. A partir de la gráfica de $f$ hacer un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = 2 - f(x-1)$.

13. a. Encuentre la regla de correspondencia para la función $f$ representada por la siguiente gráfica:



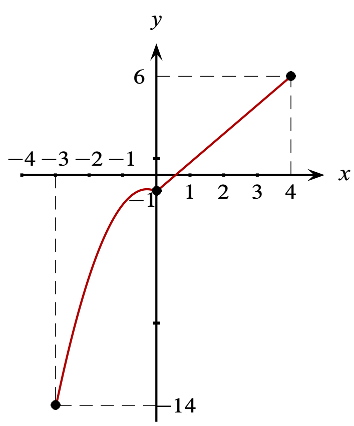

b. Elabore la gráfica de la función dada por: $g(x) = 3f(2x-2) + 2$.

14. Dada la gráfica de una función $f$:

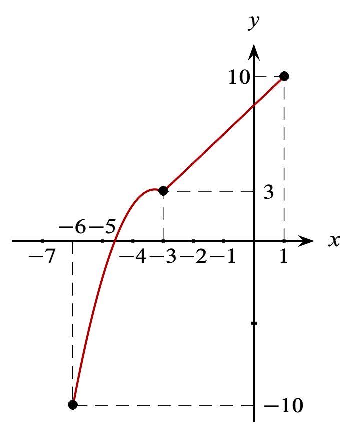



asocie cada una de las siguientes funciones $f(x+3)$, $-2f(x)$ & $f(x)-4$ con su gráfica correspondiente.

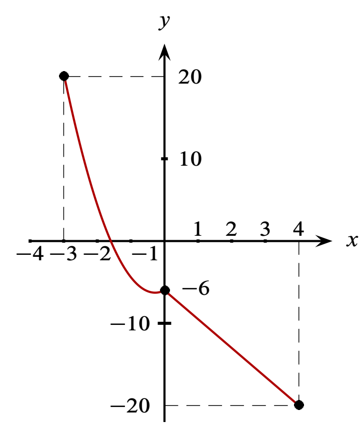
a.




b.




c.




15. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x < -1\,; \\ 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1\,; \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Grafique:

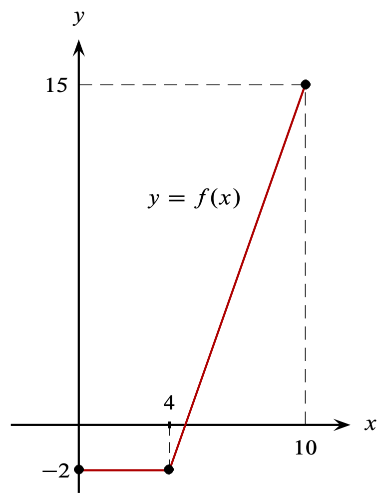
a. $f(x)$.
b. $g(x) = f(x-2) + 5$.
c. $h(x) = |\,f(x)\,|$.

16. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1\,; \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3\,. \end{cases}$$

a. Determinar dominio, raíces, gráfica e imagen o rango de $f$.
b. A partir de su gráfica, construir la gráfica de $g(x) = |\,f(x)\,|$.
c. Graficar la función $h(x) = -f(x-1) + 1$.

17. La siguiente es la gráfica de una función $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$.




a. Determine su regla de correspondencia.

b. Considere la función $g$ definida por

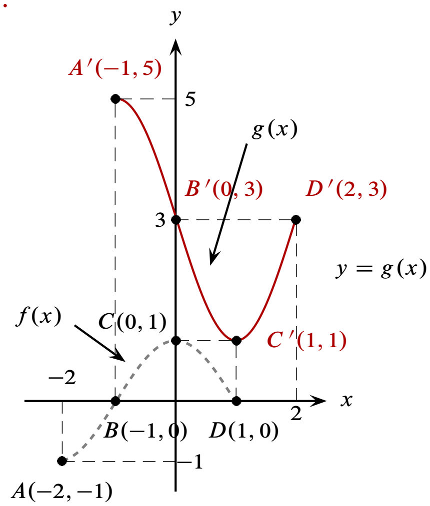
$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -10 \leq x < 0\,; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 10\,. \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de $g$. Determine su dominio, rango y raíces.

c. Sea $h(x) = g(x+1) - 2$; a partir de la gráfica de $g$ obtenga la de $h$.

**Ejercicios 2.7.1** *Transformaciones de funciones, página 9*

1.



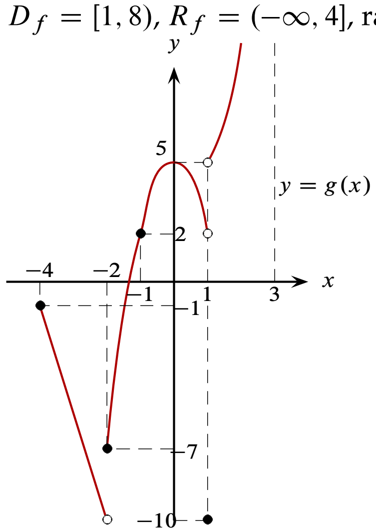

$A(-2,-1) \to A'(-1,5)$;

$B(-1,0) \to B'(0,3)$;

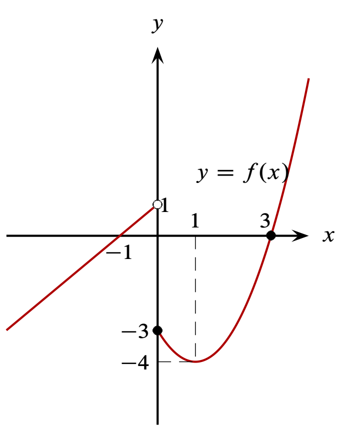
$C(0,1) \to C'(1,1)$;

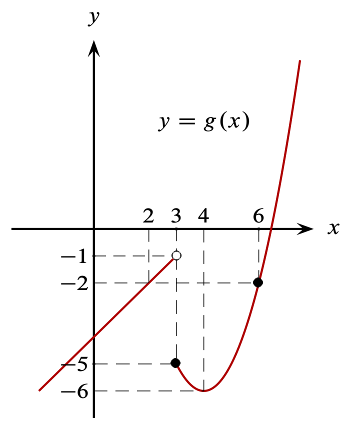
$D(1,0) \to D'(2,3)$.

2. $D_f = [1,8)$, $R_f = (-\infty, 4]$, raíz $x = 4$;




3.



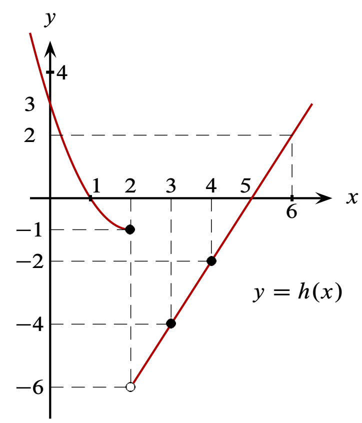




Dominio: $(-\infty, 3)$ y $[3, \infty)$;

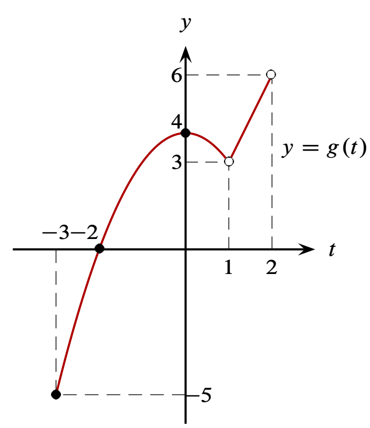
rango: $\mathbb{R}$;

raíces: $4 + \sqrt{6}$.

4.




5. a.




$D_g = [-3, 2) - \{1\} = [-3, 1) \bigcup (1, 2)$;

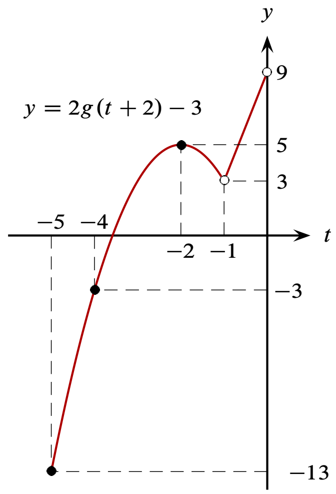
$R_g = [-5, 6)$;

raíces: $\{-2\}$;

b. $g(t) \geq 0$ si $t \in [-2, 2) - \{1\} = [-2, 1) \bigcup (1, 2)$;

$g(t) < 0$ si $t \in [-3, -2)$;

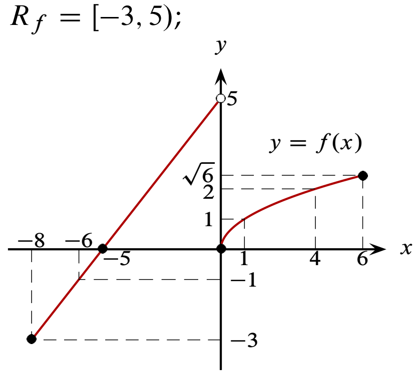
c.



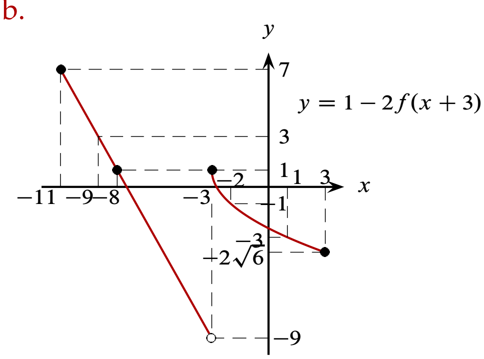

6. a. $D_f = [-8, 6]$;

raíces: $-5$ & $0$;

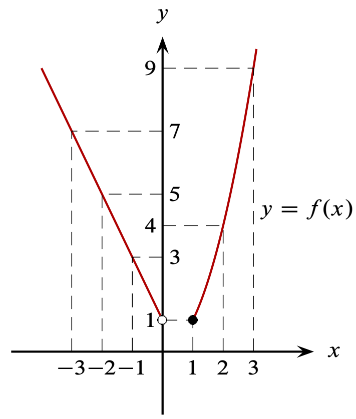
$R_f = [-3, 5)$;

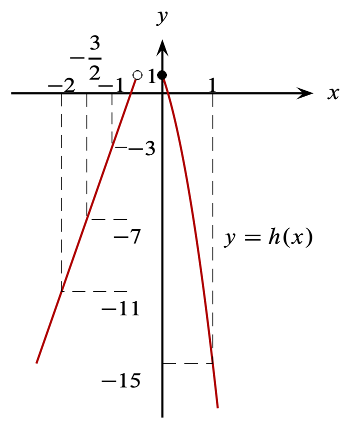



b.

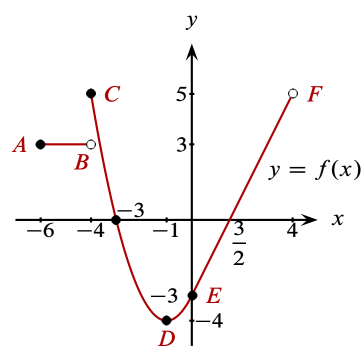



7.




8.




Dominio: $D_f = [-6, 4)$;

rango: $R_f = [-4, 5]$;

raíces: $x = -3$, $x = 1.5$;

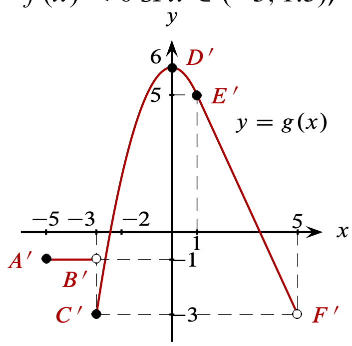
no es par ni impar;

$f(x)$ decrece si $x \in [-4, -1]$;

$f(x)$ crece si $x \in [-1, 4)$;

$f(x) > 0$ si $x \in (-6, -3) \bigcup (1.5, 4)$;

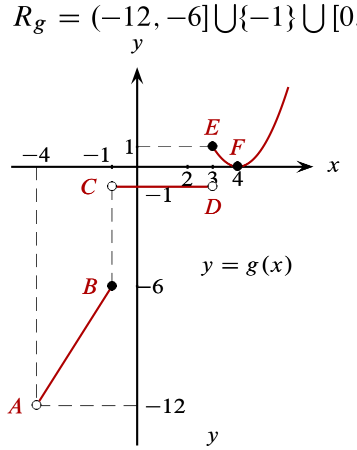
$f(x) < 0$ si $x \in (-3, 1.5)$;

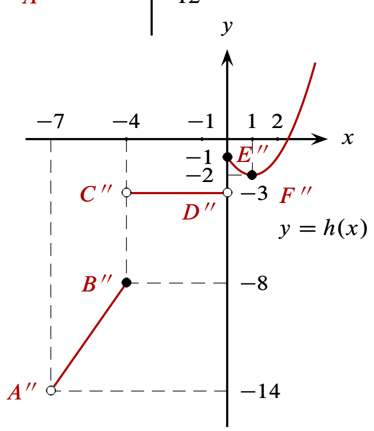



9.

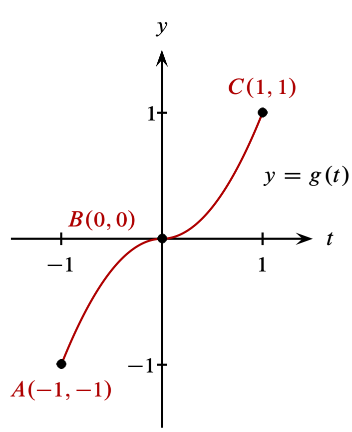
$D_g = (-4, +\infty)$;

$R_g = (-12, -6] \bigcup \{-1\} \bigcup [0, +\infty)$;

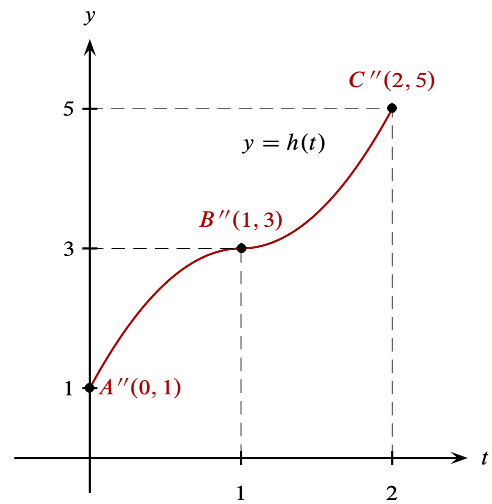



10.

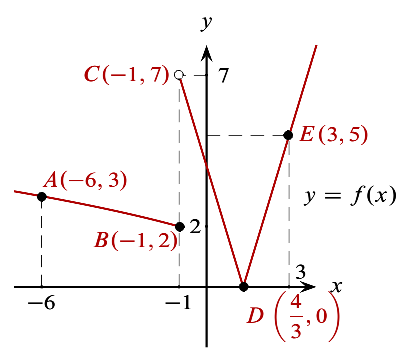


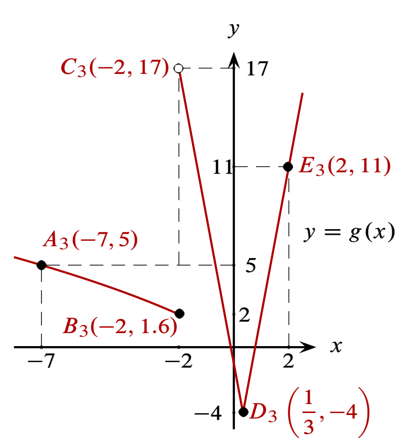

$R_g = [-1, 1]$;




$D_h = [0, 2]$, $R_h = [1, 5]$.

11.

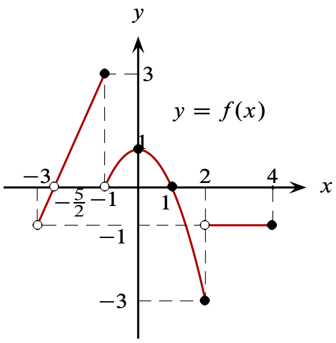



El dominio de $g$ es $\mathbb{R}$;

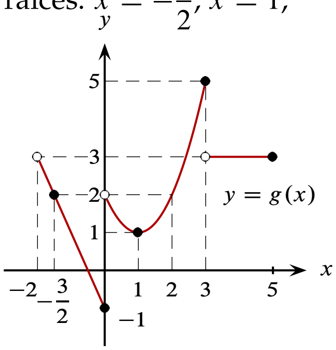
el rango de $g$ es $(-4, +\infty)$.

12.

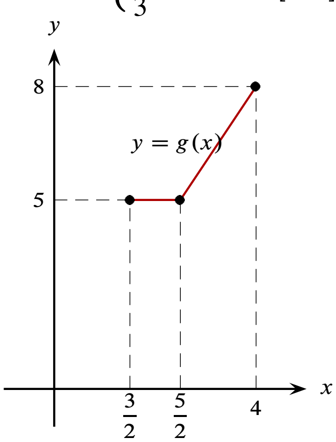



$R_f = [-3, 3]$;

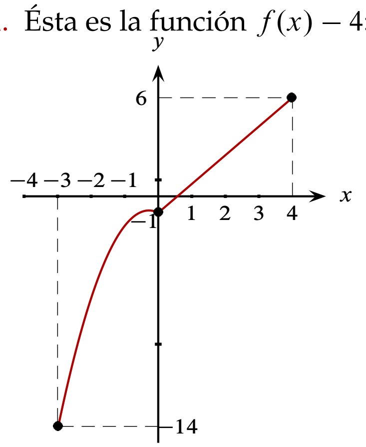
raíces: $x = -\dfrac{5}{2}$; $x = 1$;



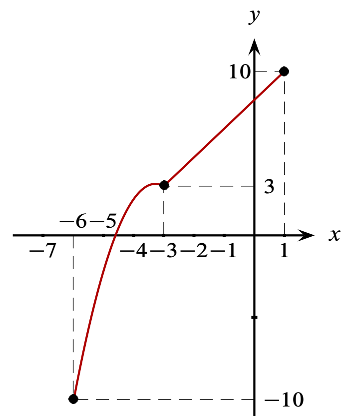

13. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 3]\,; \\ & \text{(observe que } f(3) = 1); \\ \dfrac{1}{3}x & \text{si } x \in [3, 6]\ . \end{cases}$



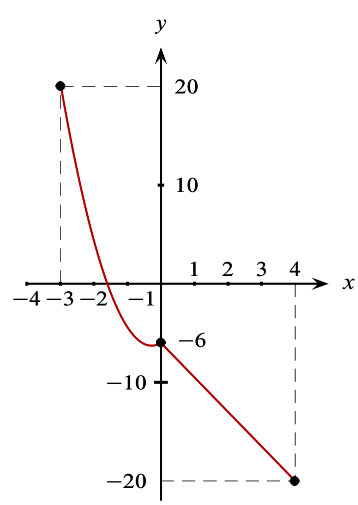

14. a. Ésta es la función $f(x) - 4$:



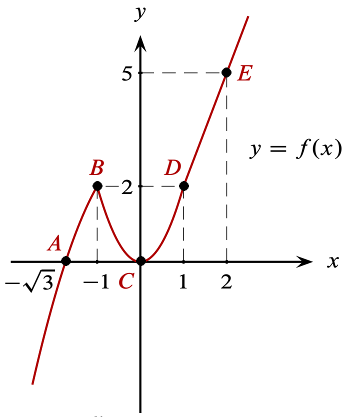

b. Ésta es la función $f(x+3)$:

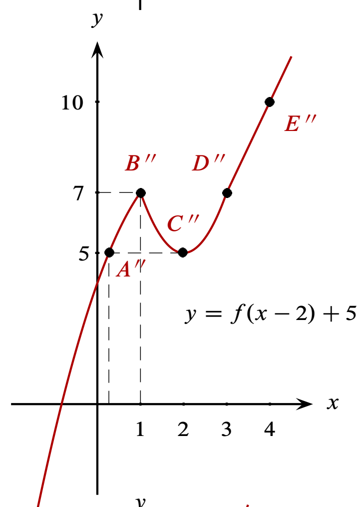


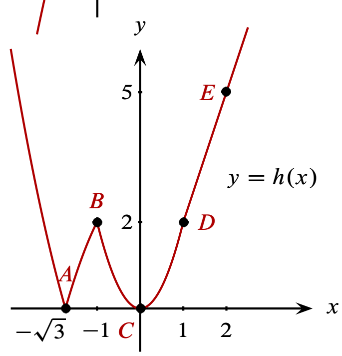

c. Ésta es la función $-2f(x)$:



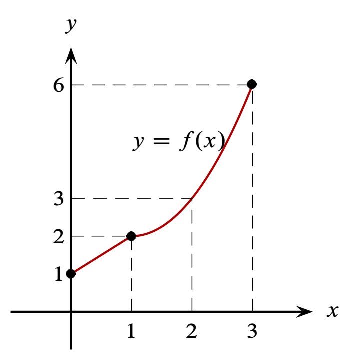
15.



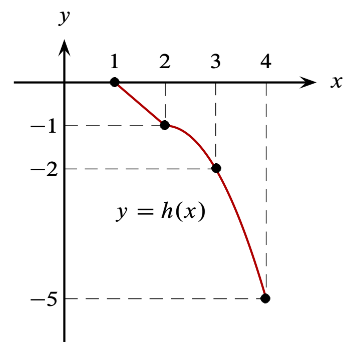




16. $D_f = [0, 3]$; raíces de $f = \varnothing$; $R_f = [1, 6]$.

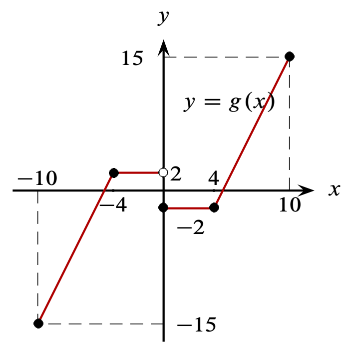



$f(x) = g(x)$;




17. a. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 \le x < 4; \\ \dfrac{17}{6}x - \dfrac{40}{3} & \text{si } 4 \le x \le 10. \end{cases}$

b.




$D_g = [-10, 10]$;

$R_g = [-15, 15]$;

raíces: $x = \pm\dfrac{80}{17}$.

c.