

Modelo 1 test

PREGUNTAS TIPO TEST _modelo 1

1. Sea el polinomio $p(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces

a) $p(a) = 0$ para algún valor $a > 0$.

b) El grado de $p(x)$ es menor que 4.

c) Ninguna de las otras dos.

2. Sea la matriz $B = A^4$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b_{3,1}$ el número de la tercera fila y la primera columna de B . Entonces:

a) $b_{3,1}$ es un número par.

b) $b_{3,1} > 10$.

c) Ninguna de las otras dos.

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$S \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 3 \end{cases}$$

Entonces la solución cumple:

a) $x < z$

b) $y > x + z$

c) Ninguna de las otras dos.

4. Sea el rombo ABCD de vértices $A = (3,2,1)$, $B = (4,5,2)$, $C = (3,8,3)$ y $D = (a,b,c)$. Entonces:

a) $a > c$

b) $b > c$

c) Ninguna de las otras dos.

5. Sea s la recta que pasa por los puntos $A = (0,1,1)$ y $B = (1,0,2)$ y d la distancia del punto $Q = (0,3,0)$ a la recta s . Entonces

a) $d < 1$

b) $d > 2$

c) Ninguna de las otras dos.

6. Sea el plano π determinado por los puntos $A = (0,1,1)$, $B = (1,0,2)$ y $C = (1,3,1)$. Entonces

a) el plano $2x + y + z - 2 = 0$ es perpendicular a π .

b) el plano $3x + y + 7z = 10$ es perpendicular a π .

c) Ninguna de las otras dos.

7. Sea la recta r determinada por los puntos $A = (0,1,1)$ y $B = (1,0,2)$, y la recta s determinada por los puntos $C = (1,0,1)$ y $D = (1,-2,0)$. Entonces

a) r y s se cruzan.

b) r y s se cortan en un punto.

c) Ninguna de las otras dos.

8. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt[3]{x^6 + 3}}$ (raíz cúbica). Entonces

a) La recta $y - 2 = 0$ es una recta asíntota de la gráfica de f .

b) La recta $2y + 1 = 0$ es una recta asíntota de la gráfica de f .

c) Ninguna de las otras dos.

9. Sea la función $f(x) = \cos \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Entonces

a) $f'(0) = 0$ y $f''(0) < 0$.

b) $f'(0) > 0$ y $f''(0) < 1$.

c) Ninguna de las otras dos.

10. Sea $K = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} dx$. Entonces

a) $k > \ln 2$. (logaritmo neperiano)

b) $k < 1/2 \ln 2$.

c) Ninguna de las otras dos.

11. Sea la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1}$ D su dominio o campo de existencia y $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Entonces

a) $k = 1$

b) $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

c) Ninguna de las otras dos.

12. De una urna con 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas rojas, se extraen dos bolas una tras otra sin introducir la primera. Sea p la probabilidad de extraer dos bolas blancas, q la probabilidad de extraer dos bolas negras y r la probabilidad de extraer dos bolas rojas. Entonces

a) $q = 3/38$ y $r = 3/95$.

b) $p = 28/153$ y $r = 5/51$.

c) Ninguna de las otras dos.

13. Se considera que la probabilidad de que al nacer un perro, este sea macho, es 0,40. Sea p la probabilidad de que haya al menos un macho entre los 5 cachorros de una camada. Entonces

a) $p < 0,8$.

b) $p > 0,9$.

c) Ninguna de las otras dos.

14. De una baraja de 40 cartas se saca una carta y se deja descubierta, y se sacan otras dos

tapadas. Sea p la probabilidad de que se tenga un trío (tres cartas de igual numeración o tres figuras), sabiendo que en la primera carta que se obtuvo es un caballo. Entonces

a) $p < 1/250$

b) $p > 1/200$

c) Ninguna de las otras dos.

15. Se sabe que la probabilidad de que una semilla de sandía germine es 0,4. Se plantan 10 semillas de sandía. Sea p la probabilidad de que germinen sólo 6 de las 10 semillas plantadas. Entonces

a) $p < 0,1$.

b) $p > 0,3$.

c) Ninguna de las otras dos.

Problemas Modelo 1

PROBLEMA 1.

Sea la matriz $C = A^2 - 4A - 6B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudie el **rango de C** en función del valor del número real a .

$$C = A^2 - 4A - 6B$$

$$\bullet 4A = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}$$

$$\bullet 6B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A^2 - 4A &= \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix} \\ (A^2 - 4A) - 6B &= \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{pmatrix} = C \end{aligned} \right\}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6) - [9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6)] = 0$$

(no existen valores de a)

$$\bullet \text{rg} = 3 \rightarrow |C|_{3 \times 3} \neq 0 \rightarrow \text{para todas las valores de } a, \neq \text{rg} = 3$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}_{2 \times 2} \neq 0 \rightarrow \text{rg} = 2 \rightarrow (2a^2-4a-6)(-9) = 0 \rightarrow -18a^2 + 36a + 54 = 0 \rightarrow a = 3 \text{ o } a = -1$$

$$\rightarrow \text{cuando } a \neq 3 \text{ o } a \neq -1 \rightarrow \text{rg}(C) = 2$$

$$\rightarrow \text{cuando } a = 3 \text{ o } a = -1 \rightarrow \text{rg}(C) = 1$$

$$\rightarrow \text{para ningún valor } \exists \text{rg}(C) = 3.$$

PROBLEMA 2.

Sean la recta r determinada por los planos $x-2y-2z-1=0$ y $x+5y-z=0$

Estudie los valores que deben tener m y n para que la recta y el plano sean

Y el plano π definido por $2x+y+mz=n$

b) Paralelos.

a) Secantes.

$$r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases} \quad \pi \equiv 2x+y+mz=n$$

• Sacamos A y A^* para estudiar posición relativa:

$$A^* = \begin{pmatrix} \pi \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{si } \operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(A^*) \rightarrow \text{SCD} \rightarrow \text{SE CORTAN} & 1 \text{ sol} \\ \text{si } \operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A^*) \rightarrow \text{SI} \rightarrow \text{PARALELOS} & 0 \text{ sol} \\ \text{si } \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) \neq 3 \text{ incógn.} \rightarrow \text{SCI} \rightarrow \text{CONTEN.} & \infty \text{ sol} \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m & n \\ 2 & 1 & m & n \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m & n \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4-2+5m-(-1-20-2m)=0 \\ &= 4-2+5m+1+20+2m=0 \\ &= 7m=-23 \rightarrow m = -\frac{23}{7} \\ |A^*| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & n \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & n \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1+5n-10+2n=0 \\ &7n=9 \rightarrow n = \frac{9}{7} \end{aligned}$$

→ Para que sean secantes $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} A^* \rightarrow$ por tanto: $m \neq -\frac{23}{7}$ y $n \neq \frac{9}{7}$ para que $|A| \neq 0$ y $|A^*| \neq 0$ (rangos 3)

→ Para que sean paralelos $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} A^* \rightarrow$ por tanto: $m = -\frac{23}{7}$ y $n \neq \frac{9}{7}$ para que $|A| = 0$ y $|A^*| \neq 0$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\operatorname{rg} A = 2$ $\operatorname{rg} A^* = 3$

PROBLEMA 3.

Estudia y representa la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

• Dom $f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Anulan el denominador}$$

• Ptos corte:

$$\rightarrow \exists x \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow PC(0, 0)$$

$$\rightarrow \exists y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{0}{-4} = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow PC(0, 0)$$

• Simetría:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2 - 4} \\ f(-x) &= \frac{-x}{x^2 - 4} \\ -f(x) &= \frac{-x}{x^2 - 4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(x) &\neq f(-x) \rightarrow \text{S. PAR} \\ f(-x) &= f(x) \rightarrow \text{S. IMPAR} \end{aligned}$$

• Asíntotas

$$\underline{\text{A.V}} \rightarrow \exists \text{ A.V en } x = 2 \text{ y } x = -2$$

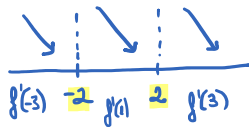
$$\underline{\text{A.H}} \rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1}{x^2 - 4} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{\text{ind}} \xrightarrow{D^+ > N^0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} &= 0 \end{aligned} \right\} \exists \text{ A.H en } \underline{\underline{y = 0}}$$

$$\underline{\text{A.O}} \rightarrow \nexists$$

• Monotonía $\rightarrow f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow -x^2 = 4 \rightarrow x^2 = -4 \nexists \text{ Ptos relativos}$$

No hay máx ni mín. Estudiamos crecimiento con pto NO DOM.

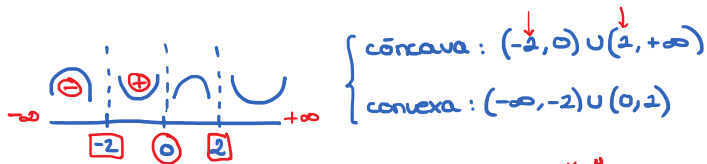


Decreciente en todos sus $\mathbb{D}$ de dominio
 $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

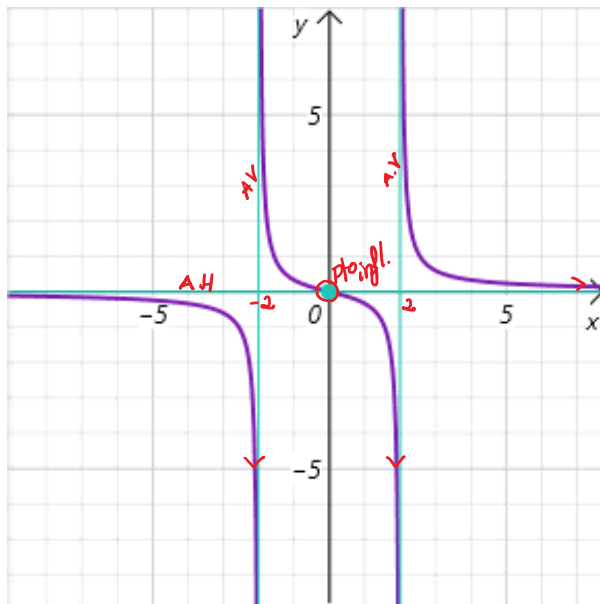
• **Curvatura** $\rightarrow f''(x)=0$ Ptos inflexión

$$f'(x) = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{-2x(x^2-4) - (-x^2-4) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-2x^3+8x - (-4x^3-16x)}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$$\frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = 0 \rightarrow 2x^3+24x=0 \rightarrow 2x(x^2+12)=0 \rightarrow \boxed{x=0} \text{ pto inflexión}$$



$\rightarrow$ Pto inflexión en $(0,0)$
 $\hookrightarrow f(0) = \frac{0}{0^2-4} = 0$



$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

x	-5	-1	1	5
y				

PROBLEMA 4.

Se elige un número entero al azar entre el 0 y el 9999 (ambos inclusive)
¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor de 4444 y múltiplo de 5?

• método 1

→ múltiplo de 5 desde el 4444 al 10000 :

$$\rightarrow \frac{4444}{5} < K < \frac{10000}{5}$$

$$\rightarrow 888'8 < K < 2000$$

el + peque
múltiplo de 5

el + grande
múltiplo de 5

$$\rightarrow 2000 - 890 = 1110 \text{ múltiplos de 5}$$

$$\bullet P = \frac{\text{Fav.}}{\text{Tot}} = \frac{1110}{10000} = 0'1111$$

• método 2

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow P(\text{mayor que } 4444) = \frac{5555}{10000} \\ \rightarrow P(\text{múltiplo de } 5) = \frac{2}{10} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(4444 \cap \text{múltiplo de } 5) \\ P = \frac{5555}{10000} \cdot \frac{2}{10} = 0'1111 \end{array}$$

↳ de cada 10 números
tenemos 2 múltiplos de 5