

Responda un máximo de 10 de las siguientes preguntas tipo test porque solo se corregirán las diez primeras respuestas

1- El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y & = 1 \\ x - y + 2z & = -2 \\ 5x + y + 2z & = 4 \end{cases}$$

- a) tiene una única solución
- b) no tiene solución
- c) tiene infinitas soluciones

2- El rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es:

- a) uno
- b) dos
- c) tres

3- La matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  no es invertible cuando:

- a)  $m = \pm 1$
- b)  $m = 0$
- c)  $m = \pm 3$

4- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz  $A - BC$  es:

- a)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

5- Si  $A$  es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación matricial  $A^2 - aI = O$ , siendo  $I$  y  $O$  las matrices identidad y nula de orden  $2 \times 2$  respectivamente, se verifica:

- a) para todo valor de  $a$
- b) solo si  $a = 2$  ó  $a = 1/2$
- c) solo si  $a = 1$  ó  $a = 2/3$

6- El conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ x - y + 2z & = -3 \end{cases}$$

es:

- a)  $\{(\lambda, 1 - \lambda, -1 - \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- b)  $\{(1 - \lambda, \lambda, -1 - 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- c)  $\{(-1 - 2\lambda, 1 - 3\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

7- Sea  $A$  una matriz cuadrada de tamaño  $3 \times 3$ . Si el determinante de  $A$  es  $\det A = 3$  entonces el determinante de la matriz inversa  $A^{-1}$  es:

- a)  $\det(A^{-1}) = -3$
- b)  $\det(A^{-1}) = 1/3$
- c)  $\det(A^{-1}) = 3$

8- Los vectores  $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$  y  $\vec{v}_3 = (3, 1, 1)$  son:

- a) base de  $\mathbb{R}^3$
- b) linealmente independientes
- c) linealmente dependientes

9- Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos independientes de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son:  $P(A) = 0,6$  y  $P(B) = 0,2$ . Entonces la probabilidad de  $\overline{A} \cup \overline{B}$ , siendo  $\overline{A}$  y  $\overline{B}$  los sucesos contrarios de  $A$  y  $B$  respectivamente, es:

- a)  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,88$
- b)  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1,2$
- c)  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,6$

10- En una bolsa hay 200 bolas con los números del 1 al 200. Se saca una bola al azar. La probabilidad de que su número sea múltiplo de 5 es:

- a)  $\frac{2}{5}$
- b)  $\frac{1}{5}$
- c)  $\frac{6}{5}$

11 - En una empresa de pinturas disponen de cinco colores básicos y forman con ellos más colores combinándolos a partes iguales de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y los cinco juntos. ¿Cuántos colores distintos, contando los cinco primeros, tendrá la fábrica en total?

- a) 20
- b) 16
- c) 31

12- Si el 58% de la población española mayor de 18 años es de sexo femenino y entre la población de esa edad se sabe que el 24% son mujeres que fuman, ¿cuál es la probabilidad de que escogida una mujer al azar mayor de 18 años sea fumadora?

- a) 0,24
- b) 0,41
- c) 0,29

13- Se lanza una moneda no trucada cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras?

- a)  $\frac{11}{16}$
- b)  $\frac{5}{8}$
- c)  $\frac{1}{4}$

14- Se lanzan tres dados iguales de seis caras, que tienen dibujados en cada cara un número del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 17 puntos o más?

- a)  $\frac{1}{108}$
- b)  $\frac{1}{216}$
- c)  $\frac{1}{54}$

15- Con los dígitos 2, 4, 6 y 8, ¿cuántos números distintos de tres cifras se pueden formar si no pueden tener dígitos repetidos?

- a) 24
- b) 12
- c) 20

①

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* \rightarrow \underline{\text{SCD}} \\ \text{única sol.}$$

②

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow |A|_{3 \times 3} \neq 0 \rightarrow \text{rg } A = 3$$

③

$$\exists A^{-1} \leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & m & 0 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3 - m^2 + 6 = 0 \rightarrow m = \pm \sqrt{9} \begin{cases} m=3 \\ m=-3 \end{cases}$$

④

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

⑤

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - aI = 0 \rightarrow A \cdot A - a \cdot I = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}} - a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor de  $a$  será nula.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad & \rightarrow \boxed{x = \lambda} \\
 & \rightarrow \lambda + y = 1 \rightarrow \boxed{y = 1 - \lambda} \\
 & \rightarrow \lambda - (1 - \lambda) + 2z = -3 \\
 & \quad z = \frac{-3 + 1 - 2\lambda}{2} \\
 & \quad z = \frac{-2 - 2\lambda}{2} = \boxed{-1 - \lambda}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} \quad & |A| = 3 \\
 & A^{-1} = \frac{1}{A} \iff |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \boxed{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg} A = 2 \\
 & \text{rango} \rightarrow \text{N}^\circ \text{ filas lin. indep.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{9} \quad & \text{Ley de Morgan} \\
 & P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) \\
 & P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\
 & \quad = 0.6 \cdot 0.2 = \underline{\underline{0.12}} \\
 & = 1 - 0.12 = \boxed{0.88}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{10} \quad \frac{40 \text{ m\u00faltiplos de } 5}{200} = \boxed{\frac{1}{5}} = 0.2$$

$$\textcircled{11} \quad \text{N}^\circ \text{ combinatorios} \\
 \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} + \binom{5}{1} = \underline{\underline{31}}$$

$$\text{calculadora } \boxed{5} \boxed{ncr} \boxed{2} = 10$$

12

	Mujeres	>18 años
Fuman	0'24	P(x)
No Fuman		
tot	0'58	

$$0'58x = 0'24 \rightarrow x = \frac{0'24}{0'58} = \boxed{0'41}$$

13

$$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

éxito ↓      muestra →      prob. éxito ↓      q = fracaso ↓

$$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 0'6875 = \boxed{\frac{11}{16}}$$

$$\left. \begin{array}{l} n=4 \\ p=0'5 \\ q=0'5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(x=2) = \binom{4}{2} \cdot 0'5^2 \cdot (0'5)^2 = 0'375 \\ P(x=3) = \binom{4}{3} \cdot 0'5^3 \cdot 0'5 = 0'25 \\ P(x=4) = \binom{4}{4} \cdot 0'5^4 \cdot 0'5^0 = 0'0625 \end{array}$$

14

$6^3 = 216 \rightarrow$  total casos favor.

$$\boxed{5} - \boxed{6} - \boxed{6} = 17$$

$$\boxed{6} - \boxed{5} - \boxed{6} = 17$$

$$\boxed{6} - \boxed{6} - \boxed{5} = 17$$

$$\boxed{6} - \boxed{6} - \boxed{6} = 18$$

$$\frac{4 \text{ comb.}}{216} = \frac{1}{54}$$

15

$$V_{(3)}^4 = 4 \times 3 \times 2 = \boxed{24}$$

Elija uno, y solo uno, de los dos siguientes problemas. En caso de responder parcial o totalmente a los dos problemas solo se corregirá el problema 1. Si no quiere que se corrija el problema 1 táchelo.

Problema 1

Calcule las siguientes integrales:

a) (1 punto)

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + 4} dx$$

b) (0,75 puntos)

$$\int \frac{x}{(3x^2 + 1)^6} dx$$

c) (0,75 puntos)

$$\int \frac{e^x \operatorname{sen}(e^x)}{3} dx$$

---

Problema 2

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

a) (0,25 puntos) Describa el conjunto de puntos donde la función es continua.

b) (0,75 puntos) Estudie si tiene asíntotas y en caso afirmativo calcule sus ecuaciones.

c) (0,75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y en caso de existir calcule los extremos relativos.

d) (0,75 puntos) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de  $f$ .

Elija uno, y solo uno, de los dos siguientes problemas. En caso de responder parcial o totalmente a los dos problemas solo se corregirá el problema 1. Si no quiere que se corrija el problema 1 táchelo.

**Problema 1**

Dado el plano  $\pi : y - z = 0$

- a) (0,5 puntos) Calcule la distancia del punto  $S(0, 0, 1)$  al plano  $\pi$ .
- b) (1,5 puntos) Calcule el punto  $S'$  simétrico de  $S$  respecto a  $\pi$ .
- c) (0,5 puntos) Determine cuál es la posición relativa entre el plano  $\pi$  y la recta:

$$\begin{cases} 4x - y - z = 3 \\ 2x \quad \quad -z = 1 \end{cases}$$

**Problema 2**

Dada la recta

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudie cuál es la posición relativa de la recta  $r$  y la recta:

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- b) (0,5 puntos) Calcule el coseno del ángulo que forman las rectas  $r$  y  $s$
- c) (1 punto) Calcule la ecuación del plano que es perpendicular a  $r$  y pasa por el punto  $A(1, 2, 3)$ .

### Problema 1

$$\textcircled{1} \rightarrow \int \frac{2x+1}{x^2+4} dx = \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$\rightarrow \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \ln|x^2+4| +$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{1/2}{(\frac{x}{2})^2+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \ln|x^2+4| + \\ \rightarrow \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{1/2}{(\frac{x}{2})^2+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \end{array} \right\} = \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \int \frac{x}{(3x^2+1)^6} dx = \int \overset{u'}{x} \cdot \overset{u}{(3x^2+1)^{-6}} dx = \frac{1}{6} \int 6x \cdot (3x^2+1)^{-6} dx = \frac{(3x^2+1)^{-5}}{30} + C$$

$$= \frac{1}{30(3x^2+1)^5} + C$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \int \frac{e^x \cdot \operatorname{sen} e^x}{3} dx = \frac{1}{3} \int e^x \cdot \operatorname{sen} e^x dx \rightarrow t = e^x \rightarrow dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{dt}{e^x = t}$$

$$= \frac{1}{3} \int \cancel{t} \cdot \operatorname{sen} t \cdot \frac{dt}{\cancel{t}} = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C \xrightarrow{t=e^x} \boxed{-\frac{\cos e^x}{3} + C}$$

## Problema 2

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{1}$$

a)  $x^2 + x - 2 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

La función es continua en todo su dominio.

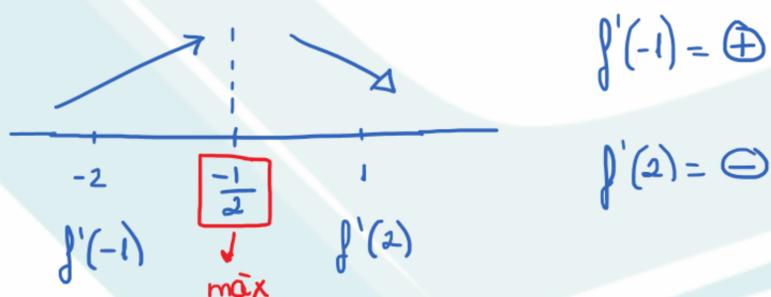
b)  $\boxed{\text{A.V}}$   $\exists$  A.V en  $x = -2, x = 1$

$\boxed{\text{A.H}}$   $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} = 0 \rightarrow \exists$  A.H en  $y = 0$

$\boxed{\text{A.O}}$   $\nexists$  A.O

c)  $f'(x) = 0 \rightarrow$  Ptos relativos

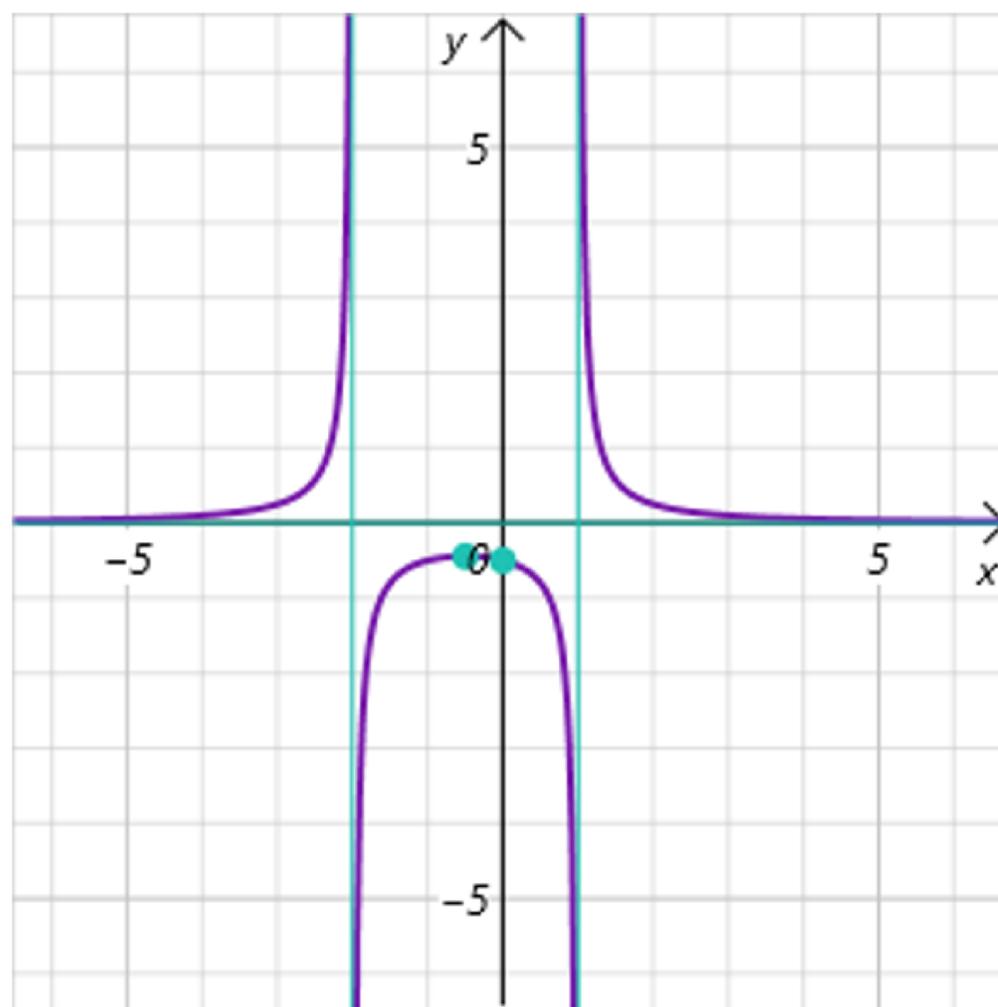
$$f'(x) = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \rightarrow -2x = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{La función es creciente } (-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{1}{2}) \\ \text{" " es decreciente } (-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty) \end{array} \right.$

$$P_{\max} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{9}\right)$$

d)



### Problema 3

a)  $d(S, \pi)$

$$\pi: y-z=0$$

$$S(0,0,1)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

→ valor absoluto

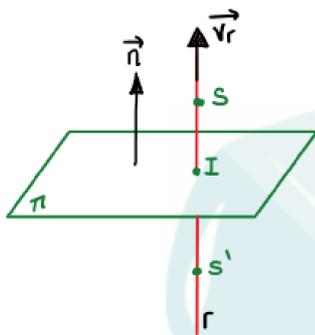
↓  $|\vec{n}|$  → módulo  $\vec{n}$

$$S = (0, 0, 1) \quad , \quad \vec{n} = (0, 1, -1)$$

$x \quad y \quad z$                        $A \quad B \quad C$

$$d(S, \pi) = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ u.}$$

b)  $S'$  de  $S$  respecto a  $\pi: y-z=0$ ,  $S(0,0,1)$



$$\vec{n} = \vec{v}_r = (0, 1, -1)$$

$$r = \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} r \cap \pi \\ Ax + By + Cz + D = 0 \\ 0 + \lambda - (1 - \lambda) = 0 \\ \Rightarrow \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$I = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 - 1/2 \end{cases} \rightarrow I = (0, 1/2, 1/2)$$

→  $I$  es el pto medio entre  $S-S'$ , por tanto:  $I = \frac{S+S'}{2} \rightarrow S' = 2I - S$

$$S' = 2(0, 1/2, 1/2) - (0, 0, 1) = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

c) Posición relativa entre  $r$  y  $\pi$

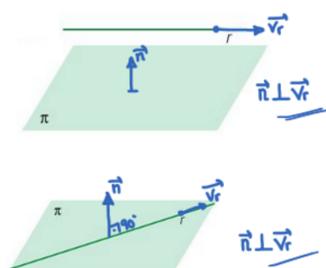
$$r = \begin{cases} 4x - y - z = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \rightarrow z = 2\lambda - 1 \\ y = 4\lambda - (2\lambda - 1) - 3 \end{cases} \rightarrow r = \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r = (0, -2, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 2) \end{cases}$$

$$\pi: y-z=0 \rightarrow \vec{n} = (0, 1, -1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 2, 2) \cdot (0, 1, -1) = 0$$

$r$  y  $\pi$  paralelos  $SI$  (1 sol.)

$r$  y  $\pi$  contenidos  $SC$  (inf sol.)



→ Descartamos:  $P_r \in \pi \rightarrow 0 + (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 0$

$-1 \neq 0 \rightarrow$  NO cumple la igualdad

por tanto NO SON CONTENIDOS.

$r$  y  $\pi$  son paralelos.

otro método (por rangos)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg } A = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

SI = paralelos  
No existen  
ptos en común.

## Problema 4

a) Pos. relativa entre  $r$  y  $s$ .

$$r = \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} P_r &= (1, 0, 1) \\ \vec{v}_r &= (1, 1, 0) \end{aligned}$$

$$s = \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} P_s &= (-1, -2, 1) \\ \vec{v}_s &= (2, -1, 2) \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\vec{v}_r}{\vec{v}_s} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{2} \rightarrow \begin{cases} \text{secantes} \\ \text{cruzan} \end{cases}$$

$$\bullet \overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (-2, -2, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_r P_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow F_1 = F_3 = |A| = 0 \rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes}$$

b)  $\cos \alpha$  de  $r$  y  $s$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

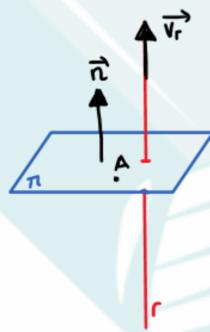
$\alpha = 76'37'' \rightarrow$  No piden el ángulo, solo el coseno.

c)

$$\pi \perp r$$

$$A \in \pi$$

$$A = (\overset{x}{1}, \overset{y}{2}, \overset{z}{3})$$



$$\vec{n} = \vec{v}_r$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + D = 0$$

$$D = -3$$

$$\boxed{\pi = x + y - 3 = 0}$$

$$r = \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} P_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (\underset{A}{1}, \underset{B}{1}, \underset{C}{0}) = \vec{n} \end{array} \right.$$